

**RELATIONS ET QUANTITÉ  
CHEZ  
RUSSELL  
(1897-1913)**

**Mémoire inédit  
(M)**

**Mémoire présenté par Sébastien GANDON  
en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches**

**27 Novembre 2009  
Université Baise Pascal, Clermont**







# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	7
<b>Partie I : Relations et quantités jusqu’au <i>Principles of Mathematics</i></b>	17
<b>Chapitre 1 :</b> Grandeurs, vecteurs et relations chez Russell (1897-1901)	19
<b>Chapitre 2 :</b> Quantités, grandeurs et genres de grandeurs dans les <i>Principles</i>	55
<b>Chapitre 3 :</b> La grandeur mesurable et le statut de la géométrie métrique dans les <i>Principles</i> .	81
<b>Partie II : Relations et quantités dans les <i>Principia Mathematica</i></b>	119
<b>Chapitre 4 :</b> La théorie de la grandeur dans les <i>Principia Mathematica</i>	121
<b>Chapitre 5 :</b> Grandeurs et relations : une défense de l’ <i>Application Constraint</i>	157
<b>Chapitre 6 :</b> Théorie représentationaliste de la mesure <i>versus</i> théorie logiciste de la quantité	193
<b>Conclusion</b>	241
<b>Bibliographie</b>	255



*“The tragedy of Russell’s paradox was to obscure from Frege and from us the great interest of his actual positive accomplishment”.*  
(Boolos 1998, p. 267)

## Introduction

Peu d’études ont jusqu’ici été consacrées aux théories russelliennes de la grandeur, exposées dans la partie III des *Principles* et la partie VI des *Principia*. Quine est un des rares philosophes du XXème siècle à avoir attaché quelque importance à *Principia* VI, puisqu’il y revient à deux reprises, dans l’hommage qu’il a écrit à l’occasion de la mort de Whitehead (Quine 1941) d’abord, et dans *Set Theory and Its Logic* (1962) ensuite. Ce qu’il avance a été repris et développé par deux adeptes du réalisme australien, J. Bigelow et R. Pargetter (voir Bigelow 1988 et Bigelow & Pargetter 1991)<sup>1</sup>. A part quelques pages (408-410) dans Grattan-Guinness 2000, aucune étude critique n’a sinon été consacrée à *Principia* VI. La situation est encore pire en ce qui concerne les *Principles*. Si l’*Essay* a été relativement bien traité (Griffin 1990, Torretti 1978, Michell 1997, Nabonnand 2000a), la théorie de la quantité de 1903 a soulevé peu d’enthousiasme. Levine 1998 et Michell 1999 en parlent brièvement<sup>2</sup> ; Grattan-Guinness 2000 lui consacre une demi-page (298) – mais à part ces maigres remarques, la partie III des *Principles* n’a fait l’objet, dans la littérature secondaire, d’aucun commentaire. Enfin, personne n’a étudié l’ensemble du *corpus* russellien sur la quantité. Quine ne parle que des *Principia*, Levine et Michell, que des *Principles* ; Grattan-Guinness ne cherche pas à reconstituer l’évolution de Russell. Le but de ce mémoire est donc d’abord de combler un manque dans les études russelliennes. La première partie de l’étude vise à présenter la théorie la quantité de 1903<sup>3</sup>, la seconde, celle de 1913<sup>4</sup>.

Étant donné l’importance qu’a Russell dans la philosophie contemporaine, le projet de défricher une partie laissée vierge de son œuvre ne devrait pas avoir besoin d’être autrement motivé. Le fait de laisser de côté tout un pan de l’œuvre d’un auteur fait en effet courir un risque important sur l’interprétation générale que l’on développe de sa pensée. Russell a toutefois la particularité de ne pas encore être un auteur « classique », au sens où Descartes, Kant et Husserl le sont. Les textes de Russell sont le plus souvent utilisés dans la philosophie analytique contemporaine comme s’ils avaient été écrits avant-hier, c-à-d comme des pièces argumentatives, détachées de leur contexte d’origine, pouvant servir à étayer ou au contraire à critiquer tel ou tel raisonnement. Cette illusion de contemporanéité est accentuée par le fait que Russell a eu une postérité en logique très importante, et que les travaux liés aux paradoxes, à la logique intensionnelle, etc., se réfèrent encore aujourd’hui au *Principia*. Certes, il existe des études russelliennes comme il y a des études cartésiennes, kantienne, husserlienne. Mais, à la différence de ce qui se passe dans ces derniers cas, les travaux d’interprétation ne norment pas les usages, très éclatés, qui sont fait aujourd’hui de Russell. Les contemporains puisent dans les écrits du philosophe ce dont ils ont besoin, et ne sont pas autrement intéressés par l’œuvre elle-même prise dans sa globalité. De ce point de vue, les

---

<sup>1</sup> Voir chap. 5.

<sup>2</sup> Voir chap. 3.

<sup>3</sup> Chaps 1-3.

<sup>4</sup> Chaps 4-6.

théories russelliennes de la quantité aurait à peu près le même statut que les études que Dummett a consacré au jeu de tarot – celui d’une partie un peu curieuse de l’œuvre d’un grand philosophe que l’on peut et que l’on doit détacher du reste de sa pensée<sup>1</sup>. Motiver une étude sur la théorie russellienne de la quantité par le seul souci exégétique n’est sans doute pas suffisant. Pourquoi donc s’intéresser, en 2009, aux doctrines « byzantines » de la grandeur contenues dans les *Principles* et les *Principia* ?

1) Jusqu’aux célèbres définitions de Dedekind et de Cantor, les mathématiques étaient conçues comme une science de la quantité<sup>2</sup>. Les choses changent progressivement entre 1860 et 1910, période que M. Epple a récemment décrite comme étant celle de « la fin de la science de la quantité » (Epple 2003). Il ne faudrait cependant pas croire que le mouvement d’« arithmétisation de l’analyse » signe la disparition définitive de la réflexion philosophique et mathématique sur la notion de quantité. À partir de la fin des années 1880, on assiste, au contraire, à l’émergence de nombreux travaux portant explicitement sur ce thème. Des mathématiciens aussi différents que Grassmann (1861), Stolz (1885), Helmholtz (1887), Bettazzi (1890), Poincaré (1893), Burali-Forti (1893 et 1898), Weber (1895), Veronese (1896), Hilbert (1899), Hölder (1901), Huntington (1902) et Hahn (1906) élaborent des « théories de la quantité ». Bien souvent, ils proposent une liste d’axiomes caractérisant le concept<sup>3</sup> ; parfois, ils se contentent d’une analyse poussée de la notion<sup>4</sup>. Les savants ne se détournent donc pas d’un concept en train pourtant de perdre la place qui était la sienne jusque-là en mathématique. Les raisons de cet intérêt sont multiples et complexes, j’y reviendrai tout au long de mon étude – soulignons simplement qu’y voir le signe d’une volonté de réhabiliter la quantité contre le mouvement d’arithmétisation serait une erreur. Mais les mathématiciens ne sont pas les seuls à se pencher, à l’époque, sur la notion. Le concept de quantité et de mesure est aussi au cœur de la réflexion sur les sciences empiriques. En physique, l’émergence de la thermométrie a nécessité un élargissement du cadre de la grandeur extensive. De plus, le débat sur la légitimité de la mesure psychophysique, extrêmement vif, qui commence avec les travaux de Fechner et se poursuit tout au long de la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle, conduit les savants à un réexamen et une réévaluation des concepts de mesure et de quantité<sup>5</sup>. Enfin, troisième domaine dans lequel la notion de grandeur joue un rôle clé : la métaphysique, et notamment les doctrines idéalistes de Bradley et de Bosanquet. La dialectique hégélienne de la quantité est à la base de nombreux développements, que le jeune Russell reprendra et qui structure une bonne partie de ses premiers travaux<sup>6</sup>.

<sup>1</sup> De ce point de vue, la situation chez Russell ressemble à celle qui prévaut chez Frege, lui aussi auteur d’une théorie de la quantité. Notons toutefois que la théorie frégeenne de la grandeur a fait l’objet de nombreuses études critiques : citons entre autres, Dummett 1991, Belna 1997 et l’article de P. Simons dans Demopoulos 1995 – sans parler de Hale 2000. Pour plus, voir chap. 5.

<sup>2</sup> Voir par exemple ce qu’explique Dedekind dans sa préface à 1872 (101-102) : « Les considérations qui font l’objet de ce petit écrit remontent à l’automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur, à l’Ecole polytechnique fédérale de Zurich, pour la première fois dans la situation de devoir exposer les éléments du calcul différentiel, et je ressentais à cette occasion, plus vivement que jamais auparavant, le manque d’un fondement véritablement scientifique de l’arithmétique. En concevant qu’une grandeur variable s’approche d’une valeur limite fixe, et notamment en prouvant la proposition que chaque grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit de façon certaine s’approcher d’une valeur limite, je me réfugiais dans les évidences géométriques. (...) On dit très fréquemment que le calcul différentiel s’occupe des grandeurs continues, et pourtant nulle part n’est donnée une explication de cette continuité ; et même, les présentations les plus rigoureuses du calcul différentiel ne fondent pas leurs preuves sur la continuité, mais font au contraire appel plus ou moins consciemment, à des représentations géométriques, ou permises par la géométrie, ou encore elles s’appuient sur des propositions qui elles-mêmes ne sont jamais prouvées de façon purement arithmétique. »

<sup>3</sup> C’est le cas de Grassmann, Stolz, Helmholtz, Bettazzi, Burali-Forti, Veronese, Hilbert, Hölder, Huntington, Hahn. Voir chap. 1.

<sup>4</sup> Par exemple, l’introduction de Weber 1895 et Poincaré 1902.

<sup>5</sup> Voir chap. 1.

<sup>6</sup> Voir chaps 1-2.



Les notions de grandeur, de quantité et de mesure sont donc, dans l'environnement de Russell, au carrefour de trois axes majeurs. La théorie de la quantité est en premier lieu une théorie mathématique (Russell connaît les recherches de Burali-Forti)<sup>1</sup> ; elle est également au centre de la réflexion sur les sciences empiriques (dont la géométrie métrique, selon Russell, fait partie)<sup>2</sup> ; la doctrine de la quantité est enfin étroitement liée à la métaphysique, plus particulièrement au « paradoxe de la relativité » et au statut de la relation<sup>3</sup>. Le thème que je me propose d'aborder n'est donc pas un sujet périphérique, qui occuperait les marches de la réflexion russellienne. Ce n'est pas non plus un thème marginal dans les considérations épistémologiques des savants et des philosophes du tournant du siècle dernier. Étudier les textes russelliens sur la quantité, ce n'est donc pas se perdre dans les arcanes d'un système autarcique, mais au contraire étudier une des points d'insertion de la pensée de Russell dans le monde intellectuel foisonnant du début du XX<sup>e</sup> siècle. Pour les contemporains, *Principles* III n'était pas une partie à négliger ou à oublier – le sujet était à la mode. Couturat ne s'y est pas trompé, lui qui, dans son commentaire de 1905 visant à faire connaître et populariser l'œuvre de Russell, consacre pas moins de trente pages à la seule doctrine de la quantité<sup>4</sup>. Pourquoi chercher à suivre Russell dans ses analyses de la grandeur et de la mesure ? Parce qu'elles permettent de mieux appréhender le contexte dans lequel ces réflexions voient le jour, tant dans ses dimensions scientifiques et mathématiques, que dans sa dimension philosophique. Ce ne sont pas simplement les *Russellian Scholars* qui peuvent apprendre de *Principles* III et de *Principia* VI ; ce sont potentiellement tous les historiens des mathématiques et les historiens de la philosophie qui s'intéressent à la période charnière du tournant du XX<sup>e</sup> siècle.

2) Dans les *Principles* comme dans les *Principia*, la théorie de la quantité a de nombreux liens avec toutes sortes d'autres développements – de sorte qu'il est difficile de rendre compte de nombreuses thèses russelliennes reconnues aujourd'hui comme centrales, en faisant l'impasse sur cette doctrine. Prenons trois exemples. Celui du statut de la géométrie d'abord. La première dispute entre Poincaré et Russell concerne les axiomes de la géométrie métrique : Poincaré prétend qu'ils sont des conventions, Russell affirme qu'ils sont empiriquement vrais (ou faux). Dans les *Principles*, la distance géométrique, linéaire ou angulaire, est considérée comme une quantité – en conséquence, l'analyse de la géométrie métrique de la partie VI est étroitement connectée avec l'analyse de la quantité de la partie III. On ne peut donc pas espérer rendre la position de Russell intelligible en faisant l'impasse sur *Principles* III. La théorie de la grandeur est tout simplement le cadre conceptuel de la théorie russellienne de la géométrie métrique<sup>5</sup>. Second exemple, celui de la définition du nombre réel dans les *Principia*. La plupart du temps, les commentateurs se concentrent sur la définition russellienne des entiers, laissant entendre que les entiers étant définis (et certains ajustements relatifs aux types étant pris), la construction des réels ne poserait, grâce à Dedekind et Cantor, plus aucun problème particulier. Russell ne suit cependant absolument pas la voie ouverte par Dedekind et Cantor. La notion de nombre réel est introduite extrêmement tardivement par Russell – dans la partie VI, après que les notions de limite, de convergence, de type d'ordre, etc. ont été définies. D'autre part, lorsque Russell et Whitehead finissent par définir les nombres réels, ils lient, contre Cantor et Dedekind, le concept à celui de mesure et de quantité<sup>6</sup>. Négliger *Principia* VI revient donc à considérer que la théorie des réels n'est pas une pièce importante dans le projet logiciste. Or, qui pourrait soutenir une telle chose ?

<sup>1</sup> Voir chap. 1.

<sup>2</sup> Voir chaps. 1-3-6.

<sup>3</sup> Voir chaps. 1-2.

<sup>4</sup> Couturat 1905, 98-126 ; ce, de plus, sans compter le développement sur la géométrie métrique (1905, 180-214).

<sup>5</sup> Voir chap. 3.

<sup>6</sup> Voir chap. 5.

Les deux premiers exemples, même s'ils sont spectaculaires, ne touchent que des aspects spécifiques relevant de la philosophie des mathématiques. Mais l'étude des textes sur la quantité nous apprend également beaucoup de choses sur la logique et la métaphysique – notamment, sur les raisons qui ont conduit Russell à créer sa logique des relations. Comme je le montrerai dans les chapitres qui vont suivre, une des thèses originales et centrales de Russell est que l'on peut considérer les grandeurs comme des relations, et l'addition entre grandeurs comme un produit de relations. Cette idée, confusément présente dès 1897, dans un article où Russell critique la théorie de Couturat, précède donc de deux ans l'élaboration de la nouvelle logique. Dans la version anglaise de *Sur la Logique des Relations* (1900b), Russell développe une théorie relationnelle des distances, qui sera reprise dans les *Principles*. Cette doctrine est à la base de la théorie des familles de vecteurs, développée dans les *Principia*. Il y a donc une profonde unité des réflexions russelliennes ; malgré les changements, l'idée que les grandeurs sont des relations qui se combinent entre elles pour former de nouvelles relations est une constante, qui relie les premiers développements de la période idéaliste aux conceptions tardives des *Principia*. Cette ligne de développement est importante pour qui veut mieux saisir la place de la théorie des relations dans la pensée russellienne. Habituellement, lorsqu'ils s'interrogent sur les raisons pour lesquelles Russell développe une nouvelle logique, les commentateurs renvoient à la notion d'ordre, fondamental en analyse et (dans une moindre mesure) en géométrie<sup>1</sup>. Mais Russell arrive à la notion de relation par plusieurs chemins – celui des relations d'ordre, mais également celui de la comparaison et de l'addition quantitative. Le fait que la logique des relations puisse naturellement fournir un pendant mathématique aux intuitions métaphysiques sur la nature des grandeurs a certainement constitué un des éléments qui a convaincu Russell de la nécessité conceptuelle de la nouvelle logique. Faire l'impasse sur la théorie de quantité, c'est donc s'interdire de comprendre à quel point le concept de relation est central chez Russell.

*Principles* III comme *Principia* VI sont reliés par de multiples fils à des courants majeurs du contexte scientifique du début du XX<sup>ème</sup> siècle ; ils sont d'autre part, intimement connectés à d'autres doctrines (la théorie de l'espace, des nombres réels, des relations) dont la place dans la pensée de Russell est considérée comme centrale. On ne peut donc faire l'économie d'une lecture de ces textes si l'on veut saisir le sens de certaines des thèses qui ont rendues Russell célèbre, si l'on souhaite également accroître sa compréhension du contexte intellectuel très riche à l'arrière-plan de l'œuvre. Mais il y a une dernière raison pour laquelle il faut étudier la théorie russellienne de la grandeur – plus susceptible peut-être d'intéresser le « philosophe analytique » : la théorie de la grandeur de *Principia* VI, véritable aboutissement du processus entamé dans Russell 1900b, peut contribuer à renouveler certaines discussions contemporaines. Je montrerai au chapitre 5 que la théorie relationnelle de la grandeur permet de donner un nouveau sens au principe de l'*Application Constraint*, récemment mis en avant par les néo-logiciens dans leurs constructions des entiers et des réels. Je soutiendrai au chapitre 6 que les développements de Russell et Whitehead permettent de souligner certaines insuffisances philosophiques de la *theory of measurement*, qui constitue aujourd'hui l'approche standard des problèmes relatifs à la quantité et à la mesure. Enfin, dans la conclusion, je suggérerai que l'étude menée ici conduit à remettre en question la ligne de fracture, qui tend à prendre de plus en plus d'importance aujourd'hui, entre une philosophie des fondements des mathématiques et une philosophie des pratiques mathématiques. L'étude qui suit a donc, on le voit, une triple ambition : combler un manque dans les études russelliennes ; montrer l'importance de la théorie de la grandeur à l'intérieur de l'œuvre de

---

<sup>1</sup> Voir entre autres, Griffin 1990.

Russell et dans le paysage intellectuel du début du XX<sup>ème</sup> siècle ; souligner l'actualité de cette réflexion.

\*

\*

\*

Un fait explique que les commentateurs se soient si peu préoccupés de la théorie russellienne de la grandeur : *Principles* III comme *Principia* VI, pour des raisons d'ailleurs différentes, sont de véritables labyrinthes, extrêmement difficiles à cartographier. Comme, d'autre part, ces deux textes semblent n'avoir aucune postérité et paraissent pouvoir être détachés, sans trop de difficulté, de chacune des deux œuvres<sup>1</sup>, le lecteur croisant dans les parages peut légitimement hésiter : pourquoi se lancer dans une exploration d'un territoire aussi hostile, que l'on pressent de plus stérile ?

Prenons d'abord la partie III des *Principles*. Russell commence en disant que toute la partie est une « concession faite à la tradition », que le sujet n'appartient pas à la logique, et que l'on peut développer les mathématiques sans faire aucune référence à la notion de quantité (158) – en bref, en invitant son lecteur à passer son chemin. S'il est courageux et décide d'ignorer l'avertissement, celui-ci fait immédiatement face à une difficulté : Russell tire du principe (ou théorème) d'abstraction des conclusions diamétralement opposées à celles qu'il a tiré une trentaine de pages plus haut. Alors que dans la partie II, le principe est mis en œuvre pour montrer que les entiers se réduisent aux classes, dans la partie III, il est utilisé pour prouver que les grandeurs ne se réduisent pas aux quantités<sup>2</sup>. Passant aux chapitres XX et XXI, le lecteur apprend que les grandeurs ne sont jamais divisibles, mais qu'il y a deux sortes de grandeurs étroitement liées à la mesure, les grandeurs de divisibilité (*magnitude of divisibility*) et les distances (*distances*). Or Russell ne consacre qu'une page, de surcroît, assez confuse, à l'explication de chacun de ces concepts (178, 179). Russell revient sur la notion de distance à la fin de la partie IV, mais les textes sont là encore peu clairs. La tentation est grande alors de se référer aux chapitres de la partie VI consacrés à la géométrie métrique, où ces notions refont leur apparition, pour comprendre ce que veut dire Russell. Mais les concepts ne sont là toujours pas définis – ils sont de plus abordés d'un point de vue étroitement géométrique, ce qui rend délicate l'articulation avec l'analyse développée dans la partie III. Outre cette question de la mesure, un autre problème semble préoccuper Russell dans les chapitres XX et XXI : celui du rapport entre une grandeur et son genre. Le philosophe défend l'idée très étrange que cette relation serait irréductible à la relation de sujet à prédicat, qu'elle serait « *sui generis* » (187). Mais Russell n'en dit pas plus, et l'argumentaire qu'il développe pour parvenir à cette conclusion est très lacunaire. Pour compléter le tableau, toute la partie III des *Principles* est scandée par une référence à un livre inconnu de Meinong, intitulé *Über die Bedeutung des Weber'schen Gesetzes*, non traduit en anglais et dont il n'existe pratiquement aucun commentaire. En résumé, le lecteur de la partie III des *Principles* se trouve immédiatement confronté à trois problèmes, très spécifiques et jamais véritablement clairement formulés par Russell – celui de l'usage du principe d'abstraction, celui du sens des concepts de *distance* et de *magnitude of divisibility*, celui de la forme logique du rapport grandeur / genre – et renvoyé, pour plus d'explication, à un ouvrage oublié de Meinong.

On ne trouvera pas de quoi se consoler dans *Principia* VI. La situation est certes là différente : Russell et Whitehead (cette partie a d'abord été écrite par Whitehead) définissent extrêmement précisément leurs concepts – à la différence de ce qui se passe en 1903, le lecteur sait donc ici toujours de quoi il est question. Mais les développements formels ne font

---

<sup>1</sup> Dans les *Principles*, la question de la quantité réapparaît seulement au chapitre XXXI du Livre IV, au chapitre XXXV du livre V, enfin aux chapitres XXXVII et XXXVIII du livre VI.

<sup>2</sup> Voir chap. 2

l'objet d'aucune reprise philosophique. Les *Principia* nous présentent des calculs – mais pas de commentaire. La partie VI était censée introduire au quatrième livre des *Principia*, sur la géométrie, qui n'a jamais vu le jour (tous les manuscrits préparatoires ont été détruits par Whitehead). On ne peut donc s'y appuyer pour interpréter les distinctions mises en place dans *Principia* VI – notamment celles qui gouvernent la section B, la plus difficile et la plus centrale, consacrée aux « familles de vecteurs ». La théorie de la quantité de Russell et de Whitehead ressemble donc un peu à ces statues de l'île de Pâques, belles, sans doute, mais dont le sens échappe totalement. On peut suivre les auteurs pas à pas dans leurs définitions et leurs démonstrations – on ne saurait dire où ils vont. Et même : affirmer que l'on peut suivre Russell et Whitehead est optimiste. Comme la partie VI se trouve à la fin des *Principia*, les auteurs utilisent dans leurs développements toute la machinerie notationnelle qu'ils ont mis en place dans les parties précédentes. Le pauvre lecteur se trouve donc constamment devoir interpréter des expressions telles que «  $(s' \kappa_{\delta})' s' \kappa_{\delta}' \alpha \subset s' \kappa_{\delta}' \alpha$  » (346) ou «  $s' \kappa_{\delta} = A_a \dot{\kappa} | A_T H'$  » (409). La difficulté est non seulement que Russell et Whitehead utilisent des notations très particulières, qu'il faut reconstituer en cherchant leurs premières occurrences<sup>1</sup>, mais encore que leur symbolisme est souvent extrêmement compact – ainsi, en va-t-il par exemple du « ; » en exposant dans la formule ci-dessus<sup>2</sup>. La tâche a de quoi décourager. Il ne faut cependant pas exagérer la difficulté. Russell et Whitehead, dans des introductions extrêmement bien faites, expliquent, avant chaque section, leur démarche et leur notation. Même si ces textes ne suffisent pas à comprendre l'ensemble des développements (Russell et Whitehead ne font pas parfois ce qu'ils annoncent), ils facilitent grandement la tâche du lecteur. Les constructions ne sont pas de plus très compliquées, de sorte qu'un peu d'effort permet assez vite de saisir de quoi il retourne. Mais là encore, la question du « retour sur investissement » se pose : pourquoi passer du temps à apprendre un nouveau langage qui n'est utilisé que dans les *Principia* VI, censé n'être, de plus, qu'une simple introduction à un quatrième tome jamais publié ? Les notations utilisées par Russell et Whitehead ont joué le rôle d'une barrière s'opposant à la réception des thèses de *Principia* VI. Elles sont également responsables de l'ignorance dans laquelle a été tenu le bel article que N. Wiener a écrit en 1921. Le jeune mathématicien y expose un système de mesure avec seuil et anticipe de près d'un demi-siècle les recherches qui ont été menées dans les années soixante par Suppes et ses collaborateurs<sup>3</sup>. Wiener, qui a été étudiant de Russell, n'explique pas ses notations, se contentant de renvoyer naïvement le lecteur à *Principia* VI !

Dernier point : les deux œuvres ne s'éclairent pas l'une l'autre. La terminologie change des *Principles* au *Principia*. Et il n'est pas du tout évident de reconnaître à quoi les concepts de grandeur de divisibilité et de distance correspondent en 1913 – pas non plus facile de retracer l'origine de la notion de famille vectorielle dans les textes de 1903. Le tableau est donc globalement très sombre, et, devant toutes ces difficultés, il est légitime de se demander si d'autres *corpus* ne méritent pas, plus que celui-ci, qu'on leur consacre une recherche.

C'est la lecture d'un court texte (deux pages) de Russell qui m'a convaincu que tout espoir n'était toutefois pas perdu. Dans le manuscrit anglais de *Sur la Logique des Relations* (1900b), on trouve trois paragraphes, coupés de la version publiée en français : l'un sur les groupes, l'autre sur la distance, le troisième sur les familles cycliques (les angles). Ces trois sections présentent une théorie cohérente de la distance en termes de groupes (ordonnés) de transformation. Or, il est facile de voir que cette doctrine est celle que Russell décrit dans les *Principles* sous le nom de distance ; très simple également de comprendre que cette théorie est à la base de celle présentée dans la section B sur les familles vectorielles de *Principia* VI. Ces trois paragraphes ont été le sésame qui m'ont permis d'entrer à la fois dans *Principles* III et

<sup>1</sup> Il y a heureusement un index des notations dans les *Principia*.

<sup>2</sup> «  $R'S$  » désigne la relation  $R|S|R^{-1}$ , où «  $|$  » désigne le produit relationnel (une composition de relations).

<sup>3</sup> Voir chap. 6.

dans *Principia* VI. Ils expliquent en effet un des points les plus obscurs de la théorie de la quantité de 1903 et donnent un sens à la doctrine difficile des familles de vecteurs de 1913 – mais plus important : ils révèlent qu’il y a un fil courant des *Principles* III à *Principia* VI et permettent de conjecturer l’existence d’une unité organisant le kaléidoscope que constituent les textes sur la quantité. En bref, ils donnent envie au lecteur (ils m’ont donné envie) de pousser plus loin l’analyse. Ce qui suit est donc d’une certaine manière une conséquence de la lecture de ces deux pages supprimées du manuscrit 1900b.

Mon but a été ici de faciliter au lecteur l’accès à *Principles* III et à *Principia* VI. Même muni de la boussole que constitue 1900b, les écrits de Russell demeurent difficiles, souvent décourageants. J’ai cherché donc ici à dégager les grandes articulations de la pensée russellienne, à reconstituer sa cohérence, quitte pour cela à sacrifier certains détails. J’ai parsemé mon texte de tableaux récapitulatifs permettant de baliser le terrain. Concernant plus spécifiquement les *Principles*, j’ai cherché à mettre en avant les distinctions les plus fondamentales et à manifester le caractère systématique de l’analyse. Même si ce n’est pas apparent, Russell développe une théorie très articulée et cohérente de la quantité, qui supporte les développements sur la géométrie métrique. C’est cet édifice conceptuel que j’ai, dans la première partie de cette étude, souhaité reconstituer. Concernant les *Principia*, j’ai insisté sur l’organisation interne de la partie VI, en me concentrant sur les principaux concepts et théorèmes. Je n’ai pas systématiquement retraduit les énoncés de Russell et Whitehead dans le langage d’aujourd’hui, peut-être plus lisible, mais parfois trop prolixe ; je n’ai pas non plus repris les notations des *Principia* à la lettre. J’ai adopté une stratégie mixte, suivant Russell et Whitehead lorsque leur notation me paraissait parlante, adoptant les symboles contemporains lorsque je pensais que c’était nécessaire. D’autre part, les *Principia* ne contiennent pas de reprise philosophique. J’ai tenté, dans les chapitres 5 et 6, de montrer ce qu’une théorie relationnelle de la grandeur pouvait aujourd’hui encore avoir d’attrayant sur le plan philosophique.

J’ai concentré mon travail sur la période 1897-1913, et n’ai pas poursuivi l’enquête aux écrits postérieurs au *Principia*. On pourrait regretter une telle décision. Russell développe, dans *Analysis of Matter* (1927)<sup>1</sup>, toute une théorie de la mesure des grandeurs dans le contexte de la physique relativiste (et des débuts de la physique quantique). Pourquoi exclure ces textes du champ de l’investigation ? Pour les commenter, il aurait fallu inévitablement comparer Russell 1927 aux travaux de Whitehead sur la relativité restreinte et la relativité générale<sup>2</sup>. Ce qui aurait considérablement alourdi le projet. Un tel examen n’aurait, de plus, sans doute pas jeté une lumière rétrospective sur les développements des *Principles* et des *Principia*. La physique einsteinienne (dans laquelle la question de la mesure est absolument centrale<sup>3</sup>) constitue, pour Russell comme pour Whitehead, un événement qu’il faut tenter d’intégrer à un schéma de pensée déjà bien en place. Les changements dans la théorie de la mesure, nécessités par l’émergence d’une nouvelle physique, ne représentent pas un développement naturel du cadre mis en place dans les *Principia*. De ce point de vue, le rapport entre *Principles* III et *Principia* VI n’est pas de la même nature que le rapport entre *Principia* VI et les passages sur la grandeur de *Analysis of Matter* ; ce n’est pas un processus de maturation qui, dans le second cas, fait passer d’une théorie à l’autre. L’étude des écrits de Whitehead et de Russell sur la mesure dans la nouvelle physique représenterait, à n’en pas douter, un intéressant prolongement de ce qui est raconté ici ; mais il n’en constitue ni un pré-requis, ni une clé conceptuelle. En revanche, j’ai inclus dans le champ de mon enquête les prolongements que le mathématicien américain N. Wiener (qui a été l’élève de Russell) a donné à la théorie des *Principia*.

---

<sup>1</sup> Voir notamment le chap. XII, 109-121 et le chap. XXXII, 337-339.

<sup>2</sup> Whitehead 1919 et 1922.

<sup>3</sup> Voir par exemple l’importance que revêt l’argument sur la coordination des horloges dans Einstein 1920, 24 sq.

Quelques mots du plan. La première partie de l'étude est consacrée à la théorie de la grandeur jusqu'au *Principles* ; la seconde, à la théorie des *Principia*. Cette différence d'objet s'accompagne d'une différence de style. La théorie des *Principles* est inclusive ; elle comporte des parties mathématisées (comme l'atteste 1900b) et des développements philosophiques. Celle développée dans les *Principia* est purement formelle ; certes, dans les introductions aux sections, et dans leur correspondance (dont j'use abondamment), Russell et Whitehead se laissent aller à quelques considérations générales ; mais ces passages sont peu développés et les auteurs restent dans l'ensemble extrêmement prudents. Si j'adopte dans la première partie le point de vue de l'historien (de la philosophie, de la logique et aussi parfois des mathématiques), je ne m'en contente pas dans la seconde partie. Je cherche en effet, après avoir exposé le contenu de *Principia* VI, à en dégager les potentialités philosophiques (inexploitées) en confrontant la théorie de Russell et de Whitehead à des questions et des débats contemporains.

Trois chapitres composent la partie I. Le premier est consacré à l'examen des textes qui précèdent l'écriture de *Principles* III. Je me penche d'abord sur la réception des analyses idéalistes de la quantité de Bradley et Bosanquet. J'y souligne notamment qu'une des premières occurrences (elle date de 1897) de la thèse de l'irréductibilité des relations s'effectue dans le contexte d'une reprise de la dialectique « hégélienne » de la quantité. Je montre également que cette première doctrine s'accompagne d'une formalisation mathématique, basée sur les algèbres grassmanniennes. Je donne dans une seconde section quelques éléments contextuels sur les axiomatiques de la grandeur, et sur les diverses discussions dont, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, la quantité et la mesure font l'objet. Enfin, je présente, dans une dernière section, le contenu des trois paragraphes fondamentaux de Russell 1900b. Cette section est centrale ; j'y ferai de nouveau référence dans les chapitres 2, 4 et 5.

Le chapitre II porte tout entier sur *Principles* III. Je présente d'abord la structure conceptuelle et les principales distinctions mises en place dans cette partie. J'insiste tout particulièrement, contre l'interprétation de Michell, sur l'importance qu'a, pour Russell, le problème de la mesure. La seconde section du chapitre est consacrée à la question de savoir pourquoi Russell défend une conception absolutiste des grandeurs, alors qu'il a soutenu dans la partie précédente une approche relativiste des cardinaux. Je soutiendrai que la position de Russell est tout à fait cohérente (je m'oppose ainsi à l'interprétation de Levine), et qu'elle se fonde sur l'idée que les grandeurs (à la différence des nombres) ont un genre. C'est selon moi la division des quantités en différents genres exclusifs les uns aux autres qui rend inévitable une approche absolutiste des grandeurs. Je développerai cette thèse en montrant que la question du rapport entre grandeur et genre, bien identifiée par Russell, a été reprise et développée en une théorie des *determinables* et des *determinates* par W. E. Johnson (un collègue de Russell à Cambridge) au début des années vingt.

Le chapitre III est essentiellement consacré à l'analyse des rapports entre *Principles* III et *Principles* VI, i.e. à l'examen des relations entre théorie de la quantité et géométrie métrique. Dans un premier temps, je montrerai que ce qui a profondément marqué Russell dans le texte de Meinong sur la loi de Weber est l'idée qu'une confusion est constamment commise entre deux sortes de quantités : la grandeur d'un segment (divisible en segments plus petits) et la relation de distance entre les extrémités d'un segment (qui est, elle, indivisible). Dans la seconde section, je montrerai que cette distinction entre deux concepts de longueur constitue la matrice de la réflexion russellienne sur la géométrie ; il y aurait deux géométries différentes, selon Russell : une géométrie empirique, portant sur les grandeurs de divisibilité des segments (qui est un concept non logique) ; une géométrie mathématique, portant sur les

distances relationnelles, définies à partir des rapports anharmoniques projectifs<sup>1</sup>. Dans une dernière section, j'effectue une comparaison entre les philosophies de la géométrie de Poincaré et de Russell.

Trois chapitres composent la partie II sur la théorie de la grandeur dans les *Principia*. Dans le chapitre 4, je présente *Principia* VI. J'expose d'abord la théorie des nombres rationnels et réels (section A de *Principia* VI). Les deux types de nombres sont définis comme des relations de relations. J'insiste sur le fait que toutes les propriétés ordinaires (algébriques et ordinales) des rationnels et des réels suivent des définitions et des axiomes logiques (dont l'axiome de l'infini), sans qu'aucune restriction ne soit posée sur le domaine des relations auxquelles les nombres sont appliqués. Dans la section suivante, j'aborde la théorie des familles de vecteurs (section B). Je présente le concept général, et distingue les principales sortes de familles, en insistant plus particulièrement sur le concept de famille connectée. Dans un dernier temps, je présente la théorie de la mesure proprement dite (sections C et D), qui met en relation la théorie des nombres rationnels et réels et celle des familles vectorielles. Je souligne, dans cette dernière section, la prégnance de certains schémas géométriques.

Dans le chapitre 5, je délaisse la posture de l'historien pour adopter une attitude plus « engagée » dans les discussions contemporaines. Ma thèse est que *Principia* VI est susceptible de renouveler le débat sur l'*Application Constraint* – ouvert par la tentative récente de B. Hale d'étendre la construction néo-logiciste aux réels. Dans une première section, j'examine l'usage que font Pargetter et Bigelow de *Principia* VI dans le contexte d'une théorie physicaliste du nombre. Leur tentative n'est pas très convaincante, mais l'idée de voir dans *Principia* VI une alternative aux définitions standards des réels est pertinente. J'expose, dans une seconde section, la teneur des discussions récentes sur l'*Application Constraint*, suscitées par Hale 2000. Je montre dans une dernière partie que, d'une part, les développements de Russell et de Whitehead résistent très bien aux critiques dont la construction de Hale a fait l'objet, et que, d'autre part, les *Principia* donnent de nouvelles et profondes raisons d'adhérer à l'*Application Constraint*.

Le chapitre 6 est une confrontation entre le point de vue présenté dans les *Principia* et l'approche représentationaliste aujourd'hui standard. Je présente, dans une première section, les éléments de base de la théorie de Suppes. La seconde section est une comparaison des deux paradigmes. Il existe certaines parentés entre l'approche de Russell et Whitehead et celle des théoriciens du *measurement*<sup>2</sup>, mais ce sont les différences qui l'emportent : la comparaison avec les *Principia* permet de mettre à jour certaines failles dans l'architecture conceptuelle de l'approche représentationaliste. Dans un dernier temps, je reprends mes habits d'historien, pour présenter l'article de Wiener, *A new theory of measurement*, publié en 1921 (mais dont l'essentiel est écrit en 1914, lorsque Wiener apprend la logique à Cambridge avec Russell). Ce détour est nécessaire pour bloquer le principal argument que les partisans de la théorie de *measurement* pourraient adresser à la théorie de Russell et de Whitehead : celui d'être extrêmement limitée dans son extension. Wiener reprend le cadre mis en place dans *Principia* VI pour présenter un système « à seuil », dont la destination est explicitement de formaliser la mesure psychophysique – ce qui montre que l'approche de Russell et Whitehead peut être étendue au-delà des structures examinées en 1913, donc que l'argument des représentationalistes ne peut être accepté. De plus, une des seules études existantes de Wiener 1921 est un *Technical Report* de M. Gerlach (1957), une élève de Suppes, qui « traduit » *A new theory of measurement* dans les termes qui sont ceux de la théorie du *measurement*. Son commentaire fournit donc une belle occasion de ressaisir *in vivo* les différences entre les deux approches.

---

<sup>1</sup> Les choses sont en réalité plus compliquées ; je renvoie le lecteur au chapitre 3 pour les nuances.

<sup>2</sup> J'ai choisi de ne pas traduire. Evidemment, « mesure » ne va pas, et je n'aime pas « mesurage ».





# **PARTIE I**

## **Relations et quantités jusqu'au** *Principles of Mathematics*



# Chapitre 1

## Grandeurs, vecteurs et relations chez Russell (1897-1901)

### Introduction

Ce premier chapitre est consacré aux approches de la quantité qui précèdent les *Principles*. L'objectif est triple : 1) détailler le contenu des premières conceptions russelliennes ; 2) dresser un rapide tableau du contexte dans lequel elles émergent ; 3) souligner la présence de traits qui resteront stables jusqu'au *Principia*. Je procèderai chronologiquement. La première section est consacrée aux analyses que Russell déploie en 1897-1898 dans l'*Essay* mais également dans un article important, *On the Relations of Numbers and Quantity*. Je soulignerai ce que l'approche russellienne doit aux penseurs idéalistes, Bradley et Bosanquet. J'insisterai également sur le fait que cette construction métaphysique a un pendant mathématique. Elle s'accompagne en effet d'une révision de la présentation que Whitehead donnait des « espaces vectoriels ». La seconde section est consacrée à l'exposé de certains éléments contextuels, nécessaires à la compréhension de la démarche russellienne. Je présenterai le travail de Burali-Forti sur la quantité, connu de Russell, puis je recenserai les raisons pour lesquelles, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, de nombreux savants (pas tous mathématiciens) ont élaboré des axiomatiques de la grandeur. Les veines problématiques dégagées ici seront constamment croisées et travaillées par Russell jusque dans les *Principia*. La dernière section porte sur un texte difficile et technique, le manuscrit anglais du célèbre *Sur la Logique des Relations*. Trois paragraphes sont spécifiquement consacrés à la notion de grandeur. On y trouve, sous forme condensée, une esquisse qui sera reprise et généralisée dans la théorie des familles de vecteurs des *Principia*. Les premières analyses philosophiques de Russell frappent par leur raffinement. La volonté d'articuler les doctrines métaphysiques aux calculs mathématiques est déjà très présente, et l'habileté russellienne impressionnante. Si l'écart entre les premiers travaux de 1897-99 et la théorie exposée en 1900 est important, on ne peut cependant absolument pas considérer ces tentatives comme de simples brouillons de ce qui reste à venir.

### I. Premières approches

Je me pencherai successivement sur trois textes. Sur l'*Essay*, d'abord, dans lequel on trouve une discussion inaboutie du couple quantité / qualité. Sur *On the Relations of Numbers and Quantity* (1897), ensuite, qui développe une critique détaillée de la théorie de Couturat, dans laquelle Russell, pour la première fois, et avant même l'élaboration de sa nouvelle logique, développe une conception de la quantité comme relation. Enfin, en m'appuyant sur différents manuscrits datant de 1899, je montrerai comment l'approche idéaliste de Russell informe la réception des algèbres vectorielles présentées par Whitehead dans *Universal Algebra* (1898).

#### I-1. Quantité et comparaison dans l'*Essay*

Dans *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897a), la géométrie métrique, conçue comme une géométrie quantitative, est subordonnée à la théorie projective, considérée comme une géométrie de la qualité. Le concept de distance, explique Russell, présuppose en effet « une identité (...) de qualité, dont la détermination est (...) le problème de la géométrie

projective »<sup>1</sup>(1897a, 147). Mais si la distinction entre quantité et qualité structure l'organisation de l'*Essay*, celle-ci n'est pas alors étudiée pour elle-même. Le philosophe focalise en effet son attention sur la « forme de l'externalité », c'est-à-dire sur les seules qualités et quantités spatiales. À l'occasion de l'examen d'une thèse de Erdmann, Russell est néanmoins conduit à préciser le sens général qu'il donne à ces notions. Le philosophe allemand, qui suit sur ce point Riemann, soutient qu'il est possible d'associer une courbure, c'est-à-dire une quantité, aux principales variétés métriques. Russell maintient lui que les espaces qui n'ont pas la même courbure diffèrent qualitativement ; or toute comparaison quantitative suppose une identité qualitative (c'est le point décisif) ; il est donc impossible, contrairement à ce que suppose Erdmann, de comparer quantitativement différents espaces. L'argument russellien selon lequel toute comparaison quantitative présuppose que les termes comparés possèdent une qualité commune ne va cependant pas lui-même sans poser une difficulté. Russell veut-il dire que l'identité qualitative précède logiquement la possibilité d'une comparaison quantitative ? Ou bien souhaite-t-il seulement établir que la possession d'une qualité commune est toujours liée à une comparaison, sans se prononcer sur le statut de cette comparaison ? Dit autrement, Russell exclut-il la possibilité de concevoir l'identité qualitative des termes comparés comme le résultat d'un jugement ?

L'auteur de l'*Essay* semble très hésitant. Peu de textes sont explicitement consacrés au problème, et les passages qui le sont ne sont pas dénués d'ambiguïté (*Ibid.* 163-164, note) :

J'ai parlé, partout, du jugement de quantité comme d'un jugement de comparaison ; comment, alors, une quantité peut-elle être intrinsèque ? La réponse est que, bien que la mesure et le jugement de quantité exprime le résultat d'une comparaison, les termes comparés doivent cependant exister avant la comparaison. (Par exemple), bien que la mesure des distances implique une référence aux autres distances et que leur expression comme grandeur requiert une référence de ce genre, leur existence ne dépend cependant d'aucune référence extérieure, mais exclusivement des deux points entre lesquelles il y a cette distance.

Si le jugement quantitatif est comparatif, l'attribution d'une quantité à une entité, explique Russell, est intrinsèque, c'est-à-dire ne dépend que des propriétés de l'entité et non de l'acte de comparaison. Cette affirmation paraît interdire l'idée que le jugement quantitatif « crée » quoi que ce soit – la grandeur ou la ressemblance qualitative. Pour autant, Russell admet que « l'expression (de la distance) comme grandeur » requiert une référence aux autres distances, c'est-à-dire un jugement de comparaison. Donc, si la distance entre deux points donnés ne dépend que de ces deux points, la distance « comme grandeur » est produite par la comparaison entre ce bipoint et d'autres. Comment, au final, comprendre la position de Russell ?

Avant de nous tourner vers le très important article paru dans *Mind* en 1897, *On the Relations of Numbers and Quantity*, il n'est pas inutile d'examiner comment ce problème se manifeste dans l'école idéaliste anglaise, à laquelle notre auteur se rattache alors explicitement. Dans l'*Essay*, Russell se réfère particulièrement aux analyses de Bosanquet, qui, dans le sillage de Hegel<sup>2</sup>, consacre une partie importante de *Logic, or morphology of the knowledge* (1888) à l'élucidation des rapports entre qualité et quantité. Le disciple de Bradley développe une théorie des formes de jugement (conçu, à la façon de Bradley, comme la reconnaissance d'une identité dans la différence), inspirée par l'organicisme de Spencer. À l'intérieur de ce cadre,

<sup>1</sup> La distinction entre les deux géométries ne recoupe pas celle entre connaissance *a priori* et *a posteriori*. Pour Russell, les deux sous-disciplines sont *a priori*. Comme la géométrie projective, la théorie des « conditions qui rendent la mesure spatiale possible » (1897a, 146) n'est pas empirique – même si les axiomes d'une géométrie métrique particulière, à savoir la géométrie euclidienne, « détermine, à la marge d'erreur près, celle d'entre (les) possibilités *a priori* qui correspond à notre espace réel » (*Ibid.* 146).

<sup>2</sup> Voir Hegel 1830, 348-369.

les jugements quantitatifs, parce qu'ils « ne différencient que des homogènes », forment un rameau divergeant dans la classification des types de proposition<sup>1</sup>.

Pour Bosanquet, les jugements quantitatifs sont caractérisés par une contradiction. Une quantité est d'abord, explique l'auteur, divisible en parties qui sont toutes des quantités indépendantes les unes des autres (Bosanquet, 1888, 123) :

Chaque pouce dans une mesure d'un yard, chaque balle de billard dans un tas, est ainsi distingué ; et si ce n'était pas le cas, les parties n'auraient aucune stabilité et la totalité quantitative cesserait d'exister.

La divisibilité et l'indépendance des éléments formant une quantité garantissent donc l'existence de la quantité comme totalité. Mais, en second lieu, toute « comparaison de degré suppose (...) que la différence (...) soit maintenue dans les limites d'une seule qualité » (*Ibid.*)<sup>2</sup>. Si ce n'était pas le cas, la comparaison deviendrait qualitative. Ainsi :

Chaque nuance de rouge, en plus d'être un degré de rouge en général, est également une teinte particulière et produit une impression distincte (1888, 123).

Le jugement quantitatif exige donc, selon Bosanquet, de considérer les éléments comparés comme des termes indépendants et subsistants par soi ; mais il exige simultanément de concevoir ces éléments comme des instances d'une qualité commune, c'est-à-dire de ne pas les concevoir comme des entités subsistantes par soi. Ou encore, tout élément d'une comparaison est une qualité indépendante, mais, la comparaison effectuée, le terme perd son indépendance et son aspect qualitatif pour devenir un degré : les nuances de rouge, considérées comme différentes qualités, doivent être « jugées, une fois comparées, comme incomparables » (1888, 124)<sup>3</sup>. Selon Bosanquet, quantité et qualité ne peuvent donc être opposées et tenues séparées. Les deux concepts se présupposent l'un l'autre. Le philosophe est ainsi conduit, par un processus que l'on peut à bon droit qualifier de dialectique, à faire intervenir un troisième terme, la comparaison, censée fonder l'articulation du quantitatif et du qualitatif<sup>4</sup>. C'est précisément cette thèse qu'exprime Bosanquet dans un passage (obscur lorsqu'il est tiré de son contexte) cité par Russell dans sa critique de Erdmann (Bosanquet 1888, 124) :

Nous sommes donc conduit à conclure que la comparaison quantitative n'est pas *prima facie* coordonnée avec la (comparaison) qualitative, mais plutôt qu'elle s'y substitue comme *effet de la comparaison de qualité*, qui en tant qu'elle est comparable *devient quantité*, et qui en tant qu'incomparable fournit la distinction entre parties essentielles à la totalité quantitative. (...) La différence entre le rouge et le vert, par exemple, n'est pas, pour la

---

<sup>1</sup> Bosanquet 1888, 91-93. L'étude des formes de jugement occupe les quatre premiers chapitres de son premier livre. Je reviendrai sur la théorie de Bosanquet brièvement dans le chapitre 2.

<sup>2</sup> Voir également Russell, 1903, 171.

<sup>3</sup> L'influence de Hegel, et de la triplicité qualité/quantité/mesure est patente. Voir notamment (Hegel 1830, 532) : « La quantité n'est rien d'autre que la qualité supprimée » ; voir également (*Ibid.* 542) : « (C'est le concept de quantité qui) est au fondement de la définition – courante en mathématique – de la grandeur comme étant ce qui peut être augmenté et diminué. Or, comme d'après cette définition il peut sembler tout d'abord que la grandeur est seulement le variable en général (car augmenter, tout comme diminuer, ne signifie rien d'autre que déterminer autrement la grandeur) – mais en cela elle ne serait pas différente de l'être-là pareillement variable suivant son concept (...) –, il a fallu compléter le contenu de cette définition de façon que nous ayons dans la quantité un variable qui, en dépit de sa variation, reste pourtant le même. Le concept de quantité se montre par là comme contenant en lui-même une contradiction et c'est cette contradiction qui constitue la dialectique de la quantité. » Je laisserai toutefois hors champ la question de savoir dans quelle mesure la présentation de Bosanquet est ou non fidèle à la doctrine hégélienne.

<sup>4</sup> Le problème de la quantité a une très longue histoire, et Hegel n'est, de ce point de vue, que l'héritier d'une riche tradition qui remonte aux discussions médiévales sur la « latitude des formes ». En reprenant les distinctions établies par les médiévaux, on pourrait dire que Bosanquet (comme Hegel) thématise l'opposition entre une conception « additive » (selon laquelle une quantité est un agrégat de quantités plus petites) et une conception « qualitative » (selon laquelle la variation quantitative est une succession de formes différentes) de la quantité. Sur la pérennité de ces problématiques, voir les éclairants articles de J.-L. Solère (Solère 2000 et 2001) ; sur la façon dont Hegel (mais également Kant et Wolff) s'insère dans cette tradition, voir plus particulièrement Solère 2000, 482-487.

perception ordinaire, une différence au sein de la même qualité ; et si elle peut devenir mesurable, elle ne le peut que par référence à une qualité identique, telle que la luminosité, qui tombe en dehors des singularités du rouge et du vert en tant que telles.

Quantité et qualité sont considérées comme deux moments indissociables du jugement de comparaison. Deux quantités sont, en tant que distinctes, des qualités ; deux qualités différentes partagent, en tant que comparées, un genre commun qui les détermine comme degré. Dans cette dialectisation de l'opposition quantité/qualité, la notion de comparaison (Russell emploie parfois, en reprenant le vocabulaire hégélien, le terme de « mesure ») joue le rôle crucial. La comparaison est toujours le germe d'un jugement quantitatif pour autant qu'il pointe vers une espèce commune rassemblant les entités comparées ; simultanément, la comparaison n'est possible que si les termes comparés diffèrent qualitativement. Le problème posé par les jugements quantitatifs se déplace donc chez Bosanquet. À la question : « Qu'est-ce qu'une quantité ? », le disciple de Bradley substitue l'interrogation, non moins épineuse : « Qu'est-ce qu'une comparaison ? »<sup>1</sup>.

## I-2. Quantité et comparaison dans *On the Relations of Numbers and Quantity*

Dans *On the Relations of Numbers and Quantity*, Russell revient sur le concept de grandeur et soutient que la quantité n'est pas une propriété d'une certaine qualité, mais une « catégorie de la comparaison ». L'article se divise en trois moments. Russell s'attaque d'abord à la thèse qui assimile les degrés à des propriétés ; il critique ensuite la conception selon laquelle les degrés sont des catégories purement sensibles, qui échappent à toute détermination conceptuelle ; il conclut en définissant la quantité comme un concept relationnel. Examinons brièvement les différentes étapes du raisonnement.

C'est Couturat que Russell prend d'abord pour cible. Dans *De l'infini mathématique* (1896, 367-375), le philosophe français critique le projet de Helmholtz consistant à définir la grandeur comme l'ensemble des choses pouvant « être dite égales ou inégales à une autre ». Au lieu de définir de façon circulaire la grandeur « par sa comparaison avec d'autres », Couturat cherche à la caractériser par un attribut intrinsèque et indéfinissable « que possède chaque grandeur isolément » (1896, 368). Russell entreprend de montrer, contre Couturat, que penser la grandeur comme une propriété conduit à des contradictions insurmontables. Il commence par distinguer le cas où la différence entre deux quantités du même genre est une quantité de ce genre (la quantité est alors dite extensive), du cas où il n'en est rien (la quantité est alors dite intensive). La différence entre deux longueurs est une longueur, et la quantité longueur est extensive ; la différence entre deux intensités de rouge n'est pas une intensité de rouge, et les degrés de rouge sont par conséquent des quantités intensives<sup>2</sup>. Se concentrant d'abord sur le cas des grandeurs intensives, Russell montre que la différence entre deux degrés ne peut pas être conçue comme une différence qualitative, car, comme Bosanquet l'a indiqué, si c'était le cas, chaque intensité deviendrait une propriété particulière, et la variation quantitative se transformerait en changement qualitatif<sup>3</sup>. Mais, puisque par définition la quantité en question n'est pas extensive, la différence entre deux quantités intensives n'est pas non plus une quantité. Ne pouvant être décrite ni comme une différence entre deux qualités, ni

---

<sup>1</sup> Bosanquet établit une différence entre qualité (*quality*) et genre (*kind*) ; voir (1888, 123-127). Le genre est un produit de la classification, alors que la qualité est donnée dans la perception. Mais cette distinction n'élimine pas le problème soulevé par Russell (la qualité est-elle engendrée par la comparaison ou bien la comparaison ne peut-elle se développer que si une qualité commune est partagée par l'ensemble des termes comparés ?).

<sup>2</sup> Pour plus à propos de cette distinction, voir *infra.* et chapitre 2.

<sup>3</sup> Les nuances de rouge seraient alors, comme chez Bosanquet, des rouges différents, et plus rien n'assurerait l'appartenance à un genre commun permettant une évaluation quantitative.

comme une pure différence quantitative à l'intérieur d'un même genre qualitatif, la différence entre deux quantités intensives n'est pas intelligible<sup>1</sup>.

Mais l'approche de Couturat rend également, explique Russell, très mystérieuse la quantité extensive. Suivant encore une fois Bosanquet, Russell développe une conception « additive » de la quantité extensive, selon laquelle chaque quantité déterminée est un agrégat (Russell dit « totalité ») de quantités extensives plus petites<sup>2</sup>. Ainsi : « La quantité extensive est toujours susceptible d'être divisée en quantités extensives, qui sont donc à leur tour divisibles. Cela conduit à la divisibilité infinie » (Russell 1897c, 75). Or cette propriété d'infinie divisibilité, que la grandeur extensive partage avec l'espace et le temps, est, à l'époque, considérée comme la manifestation d'une contradiction, « la contradiction de la relativité », qui provient de l'opération consistant à subsumer une même et unique chose sous les catégories incompatibles de l'adjectif et du substantif. Chaque grandeur particulière, considérée comme un substantif, est un agrégat d'éléments ; mais comme chacune de ses grandeurs éléments peut être elle-même conçue comme un substantif, aucun élément simple ne peut jamais être distingué. Or « une chose complexe doit être composée de choses simples ». Le seul fait de penser la quantité extensive comme une propriété, i.e. un adjectif, conduit donc inévitablement à la contradiction de la relativité, et doit, pour cette raison, être rejeté.

Mon but n'est pas ici d'évaluer l'argumentaire russellien ou de discuter les nombreuses présuppositions laissées dans l'ombre. Mon propos est plutôt de montrer comment Russell oppose ici à Couturat les éléments de la doctrine hégélienne de la quantité exposés par Bosanquet (qu'il cite d'ailleurs à la fin de son développement). Russell, s'il reformule et affine<sup>3</sup> l'analyse du philosophe idéaliste, n'en modifie pas les grandes lignes. Pour autant, on aurait tort de considérer la confrontation avec Couturat comme une simple répétition des positions de l'*Essay*. Au cours de la discussion, Russell est, pour la première fois, conduit à thématiser pour elle-même la notion de comparaison. La comparaison n'est plus ici conçue comme une « opération » de l'esprit, mais comme une nouvelle forme de catégorie logique, non réductible à la propriété. Cette percée importante est manifeste dans le second et le troisième moment de l'analyse russellienne. Ayant montré que la grandeur n'est pas un prédicat que chaque quantité posséderait isolément, Russell repousse l'hypothèse, pourtant fort naturelle, consistant à considérer la différence de degré comme une différence purement sensible, non conceptuelle. Le philosophe invoque, pour ce faire, un argument proposé par Poincaré dans « Le continu mathématique » paru dans la *Revue de métaphysique et de morale* en 1893<sup>4</sup> :

Si la quantité était de nature sensible, deux quantités qui engendrent des sensations indiscernables devraient être égales. Or les plus petites différences perceptibles entre des sensations sont finies, de sorte qu'aucune raison ne peut expliquer, si la quantité est sensible, la création du continu. Il y a cependant une raison au continu. Supposons trois sensations *A*, *B*, *C* telles que *A* est indiscernable de *B*, *B* indiscernable de *C*, mais non *A* de *C*. Alors, nous avons nécessairement, en nous fondant sur une base purement sensible :

$$A = B, \quad B = C, \quad A \neq C.$$

---

<sup>1</sup> Russell 1897c, 77-78 : « deux quantités intensives du même genre sont, en ce qui concerne les propriétés conceptuelles qui peuvent être attribuées à chacune isolément, complètement identiques ; la différence de quantité est en conséquence une différence de propriété qui ne paraît pas exister avant la comparaison (*is a difference in a property which appears not to exist before comparison*). (...) Cela semblerait réduire la quantité intensive à une relation entre deux termes, et cependant, en affirmant qu'un terme est plus grand qu'un autre, nous affirmons catégoriquement – comme nous l'avons admis au début de notre analyse – que chacun a séparément une quantité. »

<sup>2</sup> La quantité extensive est ainsi le résultat de l'addition des différences quantitatives, qui sont, de par la définition même de la quantité extensive, elles aussi des quantités (voir *supra*). Vu de la perspective qui sera la notre dans le chapitre 6, on pourrait dire que Russell semble confondre ici (ce que les théoriciens du *measurement* appellent) systèmes extensifs et systèmes d'intervalles.

<sup>3</sup> Notamment en distinguant la quantité extensive de la quantité intensive. Mais, pour un hégélien, la distinction entre grandeur extensive et intensive doit être elle-même relativisée ; voir Hegel, 1830, 536-538.

<sup>4</sup> Le texte est repris dans le second chapitre de *La science et l'hypothèse* (1902).

Pour éviter la contradiction, nous devons supposer que *B* n'est pas égal à *A* et *C* ; nous avons abandonné, avec cette hypothèse, la thèse du caractère purement sensible de la quantité. (...) L'idée de quantité continue, de série ordonnée procédant par graduation infinitésimale, est ainsi un produit de la pensée. Les quantités peuvent être données par les sens, mais elles deviennent quantité seulement par un acte de l'esprit (Russell 1897c, 79).

Aucune variation quantitative continue n'est donnée dans l'expérience – ce qui signifie que la grandeur conçue comme « série ordonnée procédant par graduation infinitésimale » est un concept, non une intuition sensible. La quantité doit donc être considérée comme une forme conceptuelle<sup>1</sup>.

Russell vient cependant de rejeter la possibilité de concevoir la quantité comme une propriété. Ce refus, qui s'accompagne du désir de maintenir la variation quantitative dans le giron de l'intelligible, conduit donc inévitablement à introduire des formes conceptuelles qui ne sont pas des propriétés, i.e. des formes conceptuelles relationnelles (1897c, 79-80) :

La quantité est donc conceptuelle, mais n'est pas une propriété intrinsèque des choses quantitatives. Dans ces circonstances, quelle peut être la nature de la quantité ?

(...) La quantité n'est pas une propriété commune des choses quantitatives, pas plus que la similarité est une propriété commune des choses similaires. La quantité est une conception de relation, de comparaison ; elle exprime la possibilité d'un certain genre de comparaison avec autres choses. (...) Dans *une* quantité, considérée en isolation, il est impossible de découvrir (...) une quelconque propriété de la quantité. *Une* quantité est à vrai dire une expression aussi impropre pour des choses qui peuvent être quantitativement comparées qu'*une ressemblance* l'est pour une photographie. (...) La vérité de la quantité est donc – pour employer une tournure hégélienne – la mesure.

La quantité est une catégorie, elle est de l'ordre du concept. Mais parce qu'elle n'est pas une propriété, il est possible de maintenir que, même si aucun prédicat ne distingue deux quantités du même genre, celles-ci diffèrent conceptuellement. Dans « un jugement sur le plus et le moins, on a affaire à un concept de différence qui n'est associé à aucune différence dans le concept (*we have a conception of difference without a difference of conception*) » (1897c, 81). Comme le montre la conclusion de *On the Relations of Numbers and Quantity*, la catégorie de la relation n'est cependant pas encore, en 1897, considérée par Russell comme une forme conceptuelle à part entière. Si le recours à la mesure (entendue comme comparaison) permet d'éliminer les difficultés liées à la quantité définie comme propriété, une contradiction demeure, affectant la notion même de comparaison (1897c, 82) :

Bien que la comparaison quantitative soit conceptuelle, les termes comparés ne doivent avoir entre eux aucune différence conceptuelle. Ils doivent différer, mais non pas dans les conceptions qui leur sont applicables. (...) Bien que les instances (des *infimae species* que sont les espèces de quantité) ne puissent différer sur le plan conceptuel, la comparaison manifeste pourtant des différences parmi elles. (...) Mais si la pensée était adéquate à ces données, un concept différent s'appliquerait à chacune : reconnaître que ce n'est pas le cas, c'est reconnaître que la distinction est inintelligible.

Bien que la quantité soit un concept, sa raison d'être, sa nécessité provient « de l'inadéquation persistante de la pensée aux sens, ou, si l'on préfère, de la fondamentale irrationalité des sens », qui conduit à distinguer ce qui est conceptuellement identique. Dans un texte

---

<sup>1</sup> L'analyse de Russell n'est pas neuve. Elle reprend, sans probablement que l'auteur le sache, des distinctions qui traversent les discussions médiévales sur la latitude des formes. J.-L. Solère montre ainsi qu'une des principales oppositions concerne le statut qu'il faut accorder aux variations quantitatives : la variation appartient-elle seulement aux substrats sensibles, comme le pensait Aristote et comme le prétend encore Saint Thomas, ou bien affecte-t-elle les formes elles-mêmes, comme le pensent les « latitudinistes » ? Voir Solère, 2000, 459-463. Ce clivage est encore plus profond que celui entre partisans d'une théorie additive et partisans d'une théorie qualitative de la grandeur (voir note *supra*.), ces deux dernières doctrines étant, selon Solère, toutes deux « latitudinistes ». Russell, replacé dans ce cadre, occupe une position singulière : la quantité appartient à la forme, non au sensible ; mais conçue comme une forme prédicative, la quantité est contradictoire et inintelligible.



légèrement plus tardif<sup>1</sup>, Russell reprend ce thème kantien en opposant le cas de la quantité, dans lequel un concept de différence n'est associé à aucune différence dans le concept, au cas de la qualité, où une différence dans le concept (entre des qualités) n'est liée à aucun concept de différence (aucune mesure de cette différence n'est possible). La catégorie de relation n'est donc pas encore conçue comme un pur concept, mais comme le lieu d'une tension dialectique entre deux pôles, qualité et quantité, eux-mêmes traversés par l'opposition entre la pensée (le médiatisé) et le sensible (l'immédiateté). La relation « grandeur » est alors encore définie comme une médiatisation de l'immédiateté (une conceptualisation du sensible) – non comme une forme stable de médiatisation (comme une authentique forme conceptuelle). Il faudra attendre 1899, c'est-à-dire la réception de l'article de Moore et la lecture de Leibniz, pour trouver, dans une conférence intitulée *The Classification of Relations*<sup>2</sup>, l'affirmation selon laquelle les propositions (même prédicatives) sont essentiellement relationnelles. L'exemple que Russell donne de relations réellement « relationnelles » (c'est-à-dire asymétriques, irréductibles à la possession partagée de prédicats) est la relation de plus et de moins (*greater and less*), caractéristique de la quantité. Le lien est ainsi fait avec *On the Relations of Numbers and Quantity*, qui, malgré ce qui paraît après-coup comme des insuffisances, engage déjà très profondément la pensée russellienne dans la voie conduisant à étendre aux formes relationnelles la sphère de l'intelligible.

### I-3. La réception de l'*Universal Algebra* et le schématisme vectoriel<sup>3</sup>

Dans les études russelliennes, il est d'usage d'opposer la période idéaliste (1897-1899) à celle, réaliste, qui la suit (1899-1903). Et il est vrai que le développement de la nouvelle logique des relations coïncide avec un tournant métaphysique majeur. Alors que Bradley, comme l'auteur de l'*Essay* lui-même, fondait le développement de la pensée sur la rencontre et le dépassement dialectique de contradictions, Russell, à partir de 1900, souligne le fait que tous les pseudo-paradoxes idéalistes s'évanouissent dès lors que l'on admet des formes relationnelles. Il faut cependant souligner que, même dans sa période idéaliste, Russell affirmait que certains paradoxes étaient « évitables » et pouvaient se résoudre par une analyse plus fine<sup>4</sup>. Ainsi en va-t-il, justement, selon lui, des difficultés liées à la grandeur, que nous avons examinées. Tout indique, en réalité, que l'approche développée en 1897 dans *On the Relations of Numbers and Quantity* a survécu au changement de paradigme. La théorie relationnelle de la quantité, qui prend pourtant sa source dans l'idéalisme de Bosanquet, sort même renforcée du tournant réaliste. Cela signifie-t-il pour autant que l'adoption du nouveau cadre métaphysique n'ait eu aucune conséquence sur le sujet qui nous occupe ? Si elle ne transforme pas la doctrine philosophique de la grandeur, l'émergence de la théorie des relations modifie profondément le cadre mathématique dans lequel est développée la théorie de la quantité. Dès 1898-1899, Russell tente de prolonger son analyse philosophique par une discussion mathématique. C'est alors dans les algèbres grassmaniennes, reprises par Whitehead dans son *Universal Algebra*, que le philosophe croit trouver le pendant formel de ses conceptions métaphysiques. Mais, comme je le montrerai dans la troisième section de ce chapitre, en analysant le manuscrit anglais de *Sur la logique des relations*, l'émergence de la nouvelle

<sup>1</sup> Russell 1896-1899, 25 : « Cette antithèse suggère que quantité et qualité sont des côtés opposés, qui doivent être combinés dans la réalité. Un monde de pures catégories contient une contradiction qui est la contrepartie exacte de celle contenue dans un monde de pures quantités. Nous semblons avoir besoin, pour l'élimination de ces deux contradictions, d'une forme de synthèse, d'une forme de quantités catégoriques ou de catégories qualitatives. Il ne paraît pas impossible que cela puisse être effectué par l'introduction graduelle de médiation dans cette immédiateté qui constitue l'essence des quantités. Pouvons-nous dire : la qualité est la médiation immédiatement donnée, alors que la quantité est l'immédiateté médiatisée ? »

<sup>2</sup> Le texte est publié dans le second volume des *Collected Papers* (Papers 2, 138-146). Sur cette émergence, lente et compliquée, de la logique des relations, voir Griffin 1990.

<sup>3</sup> Pour plus de précision sur cette réception, nous nous permettons de renvoyer à Gandon, 2004.

<sup>4</sup> Voir Russell, 1896-98, 24, où le philosophe distingue les contradictions évitables des contradictions inévitables.

théorie des relations rend possible une nouvelle approche, qui ne repose plus sur les formalismes vectoriels. Si le discours philosophique sur la grandeur reste peu ou prou le même de 1897 à 1903, les théories mathématiques changent, elles, considérablement. Nous allons, ici, analyser brièvement les premières tentatives russelliennes, celles qui précèdent *Sur la logique des relations*.

Repartons de l'analyse proposée dans l'*Essay*. Pour Russell, alors, deux quantités ne diffèrent entre elles que sur fond d'identité qualitative ; deux entités ne sont comparables quantitativement l'une à l'autre qu'à l'intérieur d'une même série<sup>1</sup>. Le formalisme vectoriel, élaboré par Grassmann et repris par Whitehead dans la partie III de son *Universal Algebra*, s'accorde parfaitement à cette approche. À un vecteur (Whitehead dit « extraordinaire ») donné, il est possible d'associer des scalaires (dans le cas qui nous intéresse, des nombres réels). Ainsi une quantité  $m_I$ , représentant par exemple une masse, peut être liée à un extraordinaire  $e_I$ , habituellement interprété par Whitehead comme indiquant la position d'un point<sup>2</sup>. L'identité qualitative est ici représentée par le vecteur  $e_I$  ; la variation quantitative est donnée par la variation des coefficients réels de l'extraordinaire. Une série se présente bien ainsi spontanément comme une variation (de la grandeur scalaire) dans certaines limites (la grandeur vectorielle, correspondant ici à un point de l'espace projectif, doit rester la même). Le symbolisme vectoriel incarne donc naturellement une conception de la grandeur qui juxtapose, sans les articuler, ce qui relève du quantitatif (le scalaire) et ce qui relève du qualitatif (le vecteur)<sup>3</sup>. La dualité scalaire/vecteur donne une facture formelle à la dualité quantité/qualité – le scalaire mesurant la « longueur » (quantité) du vecteur selon l'unité (qualité) choisie (pensons à la façon dont, au collège, la masse est représentée par des flèches verticales de différentes longueurs attachées à un corps).

On a vu cependant que, dans son article de 1897, Russell, s'inspirant de Bosanquet, complexifiait le schéma, perçu comme trop statique, dont il est ici question. Une quantité (un degré de rouge) peut devenir une qualité (un rouge), et une qualité (le rouge) peut être conçue comme une quantité (le rouge comme un degré dans l'échelle du spectre, par exemple). Ce mouvement de dialectisation des oppositions trouve-t-il un écho en mathématique ? Dans les manuscrits datant de 1898-1899, on trouve plusieurs textes « expérimentaux », dans lesquels Russell cherche à donner une version mathématique de la dialectique de la grandeur. Nous n'en donnerons qu'un exemple, tiré de la quatrième partie du manuscrit *On Quantity and Allied Conceptions*, datant de 1898 (134-135)<sup>4</sup> :

<sup>1</sup> J'utiliserai le nom français « série » pour traduire le terme russellien « *series* », qui désigne un ensemble totalement ordonné.

<sup>2</sup> L'élément  $e_i$  représente, dans la partie III de *Universal Algebra*, un point de l'espace projectif (et non un vecteur comme dans les interprétations courantes aujourd'hui). A ce point, Whitehead associe une intensité ou une « masse », le nombre  $\alpha$ . Le lecteur pourrait légitimement se demander pourquoi nous parlons de vecteur là où Whitehead parle de point. Même s'il n'emploie pas cette terminologie, le mathématicien se place en réalité dans le cadre d'un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n+1$  (la base de ce que Whitehead nomme « multiplicité positionnelle » contient  $n+1$  extraordinaires indépendants) sur lequel il définit (par « quotientage ») l'espace projectif de dimension  $n$  des droites vectorielles de  $V$ . Ainsi, la droite  $\alpha e_i$  est un point projectif – et l'intensité  $\alpha$  représente une propriété extra-géométrique, celle de masse. Nous sommes donc bien fondé à parler de vecteur : la définition de l'espace projectif s'effectue, comme c'est encore le cas aujourd'hui, par le biais des espaces vectoriels.

<sup>3</sup> Whitehead invite d'ailleurs lui-même à une telle lecture, « métaphysique », des structures qu'il met en place. Il écrit ainsi (1898, 14-15) : « On gagne en brièveté en considérant chaque élément de la multiplicité,  $A$  (par exemple), comme contenant en lui la multiplicité entière de ses propriétés secondes. Ainsi, (...) la notation  $A$  représente n'importe quel  $A_1, A_2, A_3$ , etc., où le suffixe désigne le mode particulier de la propriété seconde. (...) La seule propriété seconde dont nous parlerons dans ce livre est l'intensité. » Les suffixes ajoutés à  $A$  correspondent précisément aux scalaires accolés aux grandeurs vectorielles dans les calculs géométriques. L'opposition entre propriété principale de la multiplicité et propriétés secondes des éléments recoupe donc bien l'opposition entre qualité et quantité.

<sup>4</sup> « Multiplicité positionnelle » ou « calcul positionnel » est le terme que Whitehead emploie pour désigner ce que nous appelons espace vectoriel. Voir note *supra*.

Les extraordinaires  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ne sont pas des quantités, mais leurs différences sont des quantités. Si nous désignons ces différences par  $e_2 - e_1$ , etc..., alors  $e_2 - e_1$  est l'unité pour ce genre de différence qualitative qui existe entre  $e_2$  et  $e_1$ . Si la quantité de cette différence par rapport à  $e_1$  est  $n_{12}$ , nous aurions à ajouter  $n_{12}(e_2 - e_1)$  de cette différence pour obtenir le nouvel élément. Ainsi, n'importe quel élément (est de la forme)  $e_1 + n_{12}(e_2 - e_1) + \dots + n_{1n}(e_n - e_1)$ , ou  $n_1e_1 + n_2e_2 + \dots + n_ne_n$ .

Russell, en accord avec Whitehead, commence par affirmer que les extraordinaires sont des qualités, qui varient selon l'intensité. Mais il poursuit : la différence entre deux extraordinaires  $e_1$  et  $e_2$  engendre une nouvelle « entité qualitative »  $e_2 - e_1$  (un nouveau « genre de différence qualitative ») susceptible de variation quantitative. Ainsi,  $e_2 - e_1$  est à la fois une direction (une qualité), et une unité que l'on peut multiplier par un scalaire (une quantité) pour repérer n'importe quel point de la droite ; à  $e_1$ , on peut ajouter une quantité  $n_{12}$  de la différence qualitative  $e_2 - e_1$  pour indiquer un élément quelconque de la droite ( $e_1e_2$ ). Cette analyse rompt avec l'ancien schéma de Whitehead qui n'attribuait de quantité qu'à une qualité préalablement identifiée. La formulation proposée par Russell rend au contraire visible le fait que l'algèbre grassmanienne permet de formaliser l'engendrement de nouvelles qualités à partir de qualités données<sup>1</sup>. Ainsi, à partir des qualités de « position »  $e_1, e_2, \dots$ , il est possible, en les soustrayant l'une l'autre, de faire naître une nouvelle forme qualitative, « directionnelle »,  $e_2 - e_1$ . Et la méthode est étendue par Russell. De même que l'on peut créer, à partir de la série des masses attribuées à un point, la série des points sur une droite, de même on peut engendrer, à partir de cette dernière, par une opération analogue, la série des droites dans un faisceau (ou la série des angles planaires)<sup>2</sup>. À chaque fois, ce qui apparaît comme une qualité (une position, une droite) à un certain niveau, est perçu, au niveau supérieur, comme un degré dans une nouvelle série qualitative (série des points sur une droite, série des droites dans un faisceau) – exactement comme, chez Bosanquet, une nuance de rouge perçue d'abord comme qualitativement distincte de toutes les autres, était, à un autre niveau, conçue comme un degré d'une même qualité, le rouge. Les multiplicités positionnelles constituent donc, selon Russell, non pas une juxtaposition statique de considérations qualitatives et quantitatives, mais une nouvelle articulation dialectique et hiérarchisée de différents types de grandeurs (les points, les directions, les angles plans, ..., etc). Le philosophe retrouve dans le calcul grassmanien les ingrédients essentiels de l'analyse idéaliste de la quantité : chaque terme de l'opposition entre qualité et quantité se transforme en son opposé<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> La reformulation russellienne est en fait une critique de la présentation whiteheadienne des algèbres vectorielles. Citons un autre extrait de Russell 1898a (135) : « De ce point de vue, l'intensité définie par Whitehead n'existe pas (...). La ligne droite joignant  $e_1$  et  $e_2$  est cet assemblage d'éléments  $e_1 + \xi_{12}(e_2 - e_1)$  qui diffèrent de  $e_1$  et qui diffèrent entre eux seulement par ce type de différence qui distingue  $e_2$  relativement à  $e_1$ . – Les intensités ne deviendraient importantes que si chaque élément était considéré comme une *chose*, ou un point matériel, doté d'une masse plus ou moins grande. » L'écriture  $\xi_1e_1 + \xi_2e_2 + \dots + \xi_ie_i$ , adoptée par Whitehead, reconduit le schéma classique et statique qui veut qu'à une qualité «  $e_i$  » soit associée une quantité «  $\xi_i$  ».

<sup>2</sup> Voir 1898d, 349 : « Soient  $e_1, e_2$  deux points différents. Alors la différence de positions peut être désignée, bien que  $e_1$  et  $e_2$  ne soient pas des quantités, par  $e_2 - e_1$ . (...) Maintenant,  $e_2 - e_1$  est une unité, dont on peut considérer n'importe quel multiple. (...) Si  $n_{12}$  est un multiple numérique, n'importe quel point de la série déterminée par  $e_1$  et par  $e_2$  est  $e_1 + n_{12}(e_2 - e_1)$ . Soit maintenant  $e_3$  un troisième point. Alors  $e_3 - e_1$  diffère qualitativement de  $e_2 - e_1$ , mais la différence est une quantité. (...) N'importe quel point de la série déterminée par  $e_3$  et  $e_1$  est  $e_1 + n_{13}(e_3 - e_1)$ . La différence entre (ce point) et un point de  $e_1e_2$  est  $n_{13}(e_3 - e_1) - n_{12}(e_2 - e_1)$ . Ainsi, une série complète de lignes droites passant par  $e_1$  est déterminée par la différence entre  $e_3 - e_1$  et  $e_2 - e_1$ . La qualité de n'importe quelle ligne droite de cette série est  $e_2 - e_1 + n_{23}\{(e_3 - e_1) - (e_2 - e_1)\}$  ou  $e_2 - e_1 + n_{23}(e_3 - e_1)$ . » Pour un commentaire plus approfondi, voir Gandon 2004.

<sup>3</sup> L'opération consistant à former la somme de deux « extraordinaires » dont la somme des coefficients est nulle joue un rôle considérable chez Grassmann et ses successeurs, notamment chez Whitehead (1898) et chez Peano (1888 et 1896). Toute « forme de première espèce », c'est-à-dire toute somme de (deux) points multipliés par leur scalaire peut être interprétée, dans le sillage de Möbius, comme le barycentre du système formé par (deux) masses positionnées en chacun des points. Ainsi, «  $e_1 + e_2$  » désigne le milieu des points  $e_1$  et  $e_2$ . Lorsque  $e_1$  et  $e_2$  ont des coefficients qui s'annulent, comme dans  $e_2 - e_1$ , aucun point sur la droite affine ( $e_1e_2$ ) n'est indiqué. Grassmann associe alors l'expression «  $e_2 - e_1$  » à un « déplacement » (*Strecke*), dont la position est le point à l'infini sur ( $e_1e_2$ ), et qui correspond à la direction de la droite affine (Grassmann 1862, 131-133). Autrement dit, le calcul sur les « points » (les qualités) engendre une nouvelle espèce d'objets, les

Reste que les relations, dont Russell affirme dans *On the Relations of Numbers and Quantity* qu'elles sont le socle et la vérité de la quantité, sont absentes dans les formalisations vectorielles. Dans les multiplicités positionnelles, quoi qu'en dise Russell, la série se symbolise sous la forme d'une juxtaposition d'un nombre et d'un extraordinaire :  $e_1 + n_{12}(e_2 - e_1)$  – où  $n_{12}$  est un scalaire variable et  $(e_2 - e_1)$  un vecteur constant. Aucune relation n'apparaît ici. Que les expressions vectorielles puissent être réorganisées de façon à manifester la corrélation entre les divers types de séries est une chose – que le calcul positionnel soit tout entier fondé sur la distinction primitive entre scalaires (quantités) et extraordinaires (qualités) en est une autre, qu'il est impossible d'effacer. Malgré les tentatives de donner un pendant mathématique à la dialectique de la grandeur, il y a donc, à cette époque, un écart entre l'analyse philosophique et la pratique mathématique russellienne. La définition de la grandeur comme catégorie relationnelle, développée par Russell dès 1897, ne trouve, dans les algèbres vectorielles, aucune traduction symbolique directe. Comment donc réajuster le calcul à la prose ? Comment rendre visible, dans la syntaxe des algèbres de Whitehead, la présence des relations ? Russell doit-il modifier, affiner, corriger son analyse philosophique de la grandeur pour penser de façon plus précise les multiplicités positionnelles – ou, au contraire, chercher ailleurs un prolongement à ses considérations métaphysiques ? C'est à ce niveau que la rencontre avec Peano et l'élaboration d'une logique des relations vont s'avérer décisives. Le nouveau cadre logique donne, en effet, à Russell les moyens de formaliser directement l'idée que les grandeurs sont des relations. Au lieu d'adapter sa philosophie aux mathématiques, Russell ferait donc l'inverse, et donnerait en 1900 une version relationnelle du formalisme vectoriel. Le tournant réaliste des années 1899-1900, loin donc de rendre obsolète les premières théories de la grandeur, fournirait les moyens techniques de les défendre et de les accomplir mathématiquement.

## II. La grandeur axiomatisée

C'est dans la première version anglaise de *Sur la logique des relations* (plus complète que celle publiée dans la *Rivista*), daté de 1900, que Russell présente sa théorie relationnelle de la quantité. Le texte est difficile et extrêmement condensé : il consiste en une brève (deux pages) formalisation, couchée dans la nouvelle notation, péanienne, adoptée ici pour la première fois. Non seulement rien n'est dit sur le but et le contexte plus large de la construction, mais, à cause du langage utilisé, le sens des définitions et théorèmes est souvent obscur. Difficulté supplémentaire : si, dans les *Principles*, Russell fait jouer un rôle fondamental à cette doctrine, certaines complications et enjeux propres à l'ouvrage recouvrent sa présence au point de la rendre quasiment indécidable<sup>1</sup>. Un texte permet heureusement de pénétrer au cœur de la nouvelle théorie. Il s'agit de l'article *Les propriétés formales des opérations algébriques*<sup>2</sup>, publié en 1898 par Burali-Forti, que Russell a étudié de près, et utilise en 1900<sup>3</sup>. Je vais ici présenter, dans une première section, l'axiomatique de la quantité élaborée par Burali-Forti. Mais le mathématicien italien est à l'époque loin d'être le seul à proposer une définition axiomatique de la quantité. Dans les trois sections suivantes, je ferai un rapide panorama des motivations qui ont poussé les mathématiciens, physiciens ou même, psychologues à se lancer dans une telle entreprise. Dans la seconde section, je parlerai brièvement des problèmes liés à l'introduction des coordonnées en géométrie projective ; dans

---

déplacements (un nouveau type de qualité) sur lesquels il est possible, dans un second temps, d'effectuer le même genre d'opération pour engendrer un nouveau type de grandeur ; et ainsi de suite. Je reviens sur cette théorie dans Gandon 2005.

<sup>1</sup> Nos deux prochains chapitres sont consacrés à la théorie de la quantité dans les *Principles*.

<sup>2</sup> Burali-Forti a écrit son article en français – j'ai pris le parti de ne pas le corriger.

<sup>3</sup> Un exemplaire de l'article, annoté par Russell, est conservé aux Archives Russell, à McMaster. Couturat 1905 fait une large place à Burali-Forti 1898 dans sa présentation de la théorie russellienne de la quantité ; voir 98-135.

la section trois, de la question des grandeurs non archimédiennes ; dans la section quatre, des problèmes posées par l'émergence des systèmes de mesure non extensionnelles en physique (thermométrie) et en psychologie (mesure psychophysique). Bien évidemment, je ne peux pas, en quelques pages, rendre compte de la complexité et de l'intrication de chacun de ces champs problématiques. Mais il est cependant nécessaire de dresser un rapide tableau du contexte avant d'entrer plus dans le détail, car comme nous le constaterons, ces questions sont toujours à l'horizon de la réflexion de Russell, et les perdre de vue compromettrait sérieusement toute possibilité de saisir le sens réel de la démarche et du raisonnement du philosophe. Dans ce qui suit, je ne prétends donc à rien sinon poser quelques jalons.

## II-1. L'approche de Burali-Forti

Dans *Les propriétés formales des opérations algébriques* (1898), Burali-Forti définit ce qu'il nomme une classe de grandeurs homogènes. Il utilise, pour ce faire, le langage élaboré par son maître Peano. Traduit dans une syntaxe plus lisible aujourd'hui, voici la liste des postulats définissant la structure  $\langle G, + \rangle$ , où  $G$  est un ensemble, et  $+$  une loi interne binaire de  $G$  :

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1-   | $\forall a, b \in G, a+b = b+a$   | commutativité                              |
| 2-   | $\forall a, b, c \in G, a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$  | associativité                              |
| 3-   | $\forall a, b, c \in G, (a+c = b+c) \Rightarrow a = b$  | tous les éléments de $G$ sont réguliers    |
| 4'-  | $\forall a \in G, \exists x \in G, a+x = a$   | existence d'un élément neutre <sup>1</sup> |
| 4''-   | $\forall a \in G, \exists x \in G, a+x \neq a$  | existence d'une grandeur non nulle         |
| 5 -  | $\forall b \in G, \exists x \in G \setminus \{0\}, (a+b) \in G \setminus \{0\}$   |  |
| Définition de l'ordre : $\forall a, b \in G, a > b$ ssi $\exists x \in G \setminus \{0\}, a = b+x$ |   |  |
| 6-   | $\forall a, b \in G, a=b \vee a < b \vee a > b$   | $\langle G, > \rangle$ est un ordre total  |
| 7-   | $\forall a \in G, \exists x \in G \setminus \{0\}, x < a$   |  |
| 8-   | Si $U \subset G, U \neq \emptyset, \exists x \in U, \forall y \in U, y < x$ ,<br>alors : $\exists z \in G, \forall y \in U (y < z \Rightarrow \exists w \in U, y < w)$ <sup>2</sup> |  |

Le postulat 5 implique que  $G$  est strictement positivement ordonnée (si  $a \neq 0, a+b > a$ , quel que soit  $b$  de  $G$ ). L'asymétrie et la transitivité de la relation «  $>$  » découle immédiatement de cet axiome. Le postulat 7 dit qu'il n'existe pas de grandeur minima et le dernier axiome, que tout ensemble de grandeurs borné  $U$  admet une plus petite borne supérieure ; c'est un équivalent de l'axiome des coupures. Pour formuler ces deux axiomes, Burali-Forti introduit un symbole  $\theta$ , dont la signification est la suivante. Si  $a$  est une grandeur non nulle de  $G$ ,  $\theta a$  est l'ensemble des grandeurs non nulles strictement plus petites que  $a$  ; si  $U$  est un sous-ensemble de  $G$ ,  $\theta U$  est l'ensemble des grandeurs non nulles plus petites qu'une grandeur de  $U$ .  $\theta a$  et  $\theta U$  sont ce que Russell appelle des segments, c'est-à-dire lorsque  $\langle G, < \rangle$  est isomorphe à  $\mathbb{Q}$ , le premier élément d'une coupure de Dedekind. L'axiome 8 équivaut alors à poser qu'il existe un  $z \in G$ , tel que  $\theta U = \theta z$ , l'axiome 7 que  $\theta a$  n'est pas vide. J'insiste sur cette procédure, que l'on trouve déjà chez Peano, parce qu'elle est reprise par Russell. Burali-Forti montre ensuite que le principe d'Archimède<sup>3</sup>, et ce que Russell nomme le principe de Du Bois-Reymond (selon lequel toute grandeur est divisible en  $n$  parties égales et ce, quel que soit  $n$ ), suivent de ces postulats<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> L'unicité de l'élément neutre est garantie par l'axiome 1. Dans la suite, cet élément neutre est désigné par « 0 ».

<sup>2</sup> Je donne les formules que l'on trouve dans Burali-Forti 1898, 148 :

1.  $a+b = b+a$  ; 2.  $a+(b+c) = a+b+c$  ; 3.  $a+b = b+c \Rightarrow a=b$  ; 4'.  $\exists G_0 \subset G$  ; 4''.  $\exists G$  ; 5.  $a \in G \Rightarrow a+b \in G$  ; 6.  $a=b \vee a < b \vee a > b$  ; 7.  $a \in G \Rightarrow \exists G \cap \theta a$  ; 8.  $u \in \text{ClsExisLim}^* G_0 \Rightarrow \exists G_0 \cap x \exists (\theta x = \theta u)$ .

$G$  désigne l'ensemble des grandeurs non nulles ;  $G_0$  renvoie à l'union de  $G$  et du singleton grandeur nulle. Pour une définition du symbole  $\theta$ , voir *infra*.

<sup>3</sup> L'axiome d'Archimède est défini par Burali-Forti de la façon suivante :  $\forall b \in G, \exists a \in G \setminus \{0\}, \exists n \in \mathbb{N}, na > b$  (149).

<sup>4</sup> Le principe de Du Bois-Reymond s'énonce comme suit :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in G \setminus \{0\}, \exists b \in G \setminus \{0\}, nb = a$ .

En termes modernes, la classe de grandeurs homogènes  $\langle G, + \rangle$ , telle que définie par Burali-Forti, est un semi-groupe commutatif positivement ordonné dense et complet<sup>1</sup>. Un semi-groupe est ordonné lorsqu'une relation d'ordre total, compatible avec la loi interne<sup>2</sup>, est définie sur  $G$ , ou lorsqu'une telle relation est introduite comme indéfinissable. On peut encore, plus simplement peut-être, définir  $\langle G, + \rangle$  comme le cône positif d'un groupe archimédien complet – cette structure est isomorphe à  $\langle \mathbb{R}^+, + \rangle$ . Au cœur de la structure grandeur, on trouve donc les concepts de semi-groupe (d'ensemble muni d'une loi interne) et d'ordre. Rien d'étonnant à cela. Dans le livre V des *Éléments*, les grandeurs sont définies comme des entités susceptibles d'être comparées (ordre) et ajoutées (loi interne du semi-groupe) les unes aux autres. D'autres conditions sont ajoutées (Archimède, par la définition 2), que Burali-Forti reprend d'ailleurs – mais le cœur de la construction, stable malgré les variations, est constitué par la combinaison de la structure d'ordre et de l'additivité. Au XIX<sup>ème</sup> siècle, on appelle grandeurs extensives les quantités qui sont ordonnées et additives, et on nomme grandeurs intensives celles qui ne sont susceptibles que de plus et de moins (ordre)<sup>3</sup>. La classe de grandeur homogène de Burali-Forti correspond à la structure grandeur extensive, et c'est essentiellement à ce concept que nous nous attacherons dans ce chapitre. Quel but poursuit Burali-Forti en axiomatisant le concept classique, euclidien, de grandeur ? S'agit-il pour lui seulement d'un exercice visant à éprouver la puissance et l'efficacité du nouveau symbolisme péanien ? Il ne le semble pas. Burali-Forti définit les entiers (chapitre 2), les rationnels (chapitre 3) et les réels (chapitre 4) comme des rapports de grandeurs, et il explique dans l'introduction (141) :

Un premier résultat de la méthode que nous venons d'exposer est la rapidité avec laquelle on peut enseigner, dans l'école, les propriétés formales des opérations algébriques en englobant les éléments grandeurs et nombres, que d'habitude sont considérés séparément. Mais un autre résultat bien plus important est celui de pouvoir obtenir l'idée générale de nombre sous forme concrète en le déduisant de l'idée concrète, usuelle, de grandeur, qui est aussi indispensable pour les propriétés métriques de la géométrie.

Sous la motivation didactique, s'en cache donc une autre, de nature fondationnelle. Il s'agit, pour Burali-Forti, de montrer comment l'idée de nombre réel peut être dérivée du concept « plus concret » de grandeur, et de réactiver sous une forme logiquement maîtrisée la vieille idée newtonienne selon laquelle les nombres ne sont que des rapports de grandeurs<sup>4</sup>. Dit autrement, Burali-Forti semble poursuivre un programme de « géométrisation » des réels (tout du moins si l'on rabat le concept « concret » de grandeur à sa dimension géométrique), qui va directement à l'encontre du projet d'arithmétisation de l'analyse. Le projet est réaffirmé dans Burali-Forti 1903 (256) :

Dans mon article Propriétés formales, les nombres (entiers, rationnels, réels) sont définis de façon formelle (définitions nominales) par le biais de postulats sur les grandeurs ; de ceci il résulte la possibilité de faire dépendre les entités qui entrent en jeu dans l'analyse seulement des postulats portant sur la grandeur.

Le traité de Burali-Forti ne sera pas favorablement accueilli. Peano, pourtant alors son maître, lui reprochera ainsi d'avoir utilisé « le postulat de Dedekind » dans sa définition des grandeurs<sup>5</sup>. Les recherches de Burali-Forti s'inscrivent cependant dans un contexte où

<sup>1</sup> Un semi-groupe est un ensemble muni d'une loi interne associative ; lorsqu'un élément neutre est présent, on parle parfois de monoïde.  $\langle G, + \rangle$  est un monoïde, alors que  $\langle G \setminus \{0\}, + \rangle$  est seulement un semi-groupe. Pour plus, voir chap. 4.

<sup>2</sup> Dans le cas d'un semi-groupe commutatif, la compatibilité s'exprime ainsi :  $\forall b, x, y \in G, x < y \Rightarrow (b+x < b+y)$

<sup>3</sup> Sur l'histoire de la distinction entre grandeur extensive et intensive, voir Solère 2000.

<sup>4</sup> Cf. Newton 1707, 2 : un nombre est un « rapport entre une quantité abstraite donnée et une quantité du même genre considérée comme unité ».

<sup>5</sup> Peano 1899 : « La définition antique, que l'on pourrait dire euclidienne : nombre réel = rapport de deux grandeurs – requiert l'analyse de l'idée de « grandeur » ; et dans cette analyse, (telle qu'elle est élaborée par Burali-Forti) se rencontre précisément la même difficulté que celle que l'on affronte directement dans la définition du nombre réel ; il reste en

fleurissent les travaux consacrés à la notion de grandeur. Des savants aussi différents que Grassmann (1861), Stolz (1885), Helmholtz (1887), Bettazzi (1890), Poincaré (1893), Weber (1895), Veronese (1896), Burali-Forti (donc), Hilbert (1899), Hölder (1901), Russell (1900b), Frege (1902), Huntington (1902), Hahn (1906) élaborent tous des axiomatiques de la grandeur<sup>1</sup>. Les systèmes présentés sont très divers ; mais ils ont tous pour noyau commun la définition d'un semi-groupe ordonné. Certains auteurs (Hilbert par exemple) introduisent une opération supplémentaire de multiplication entre grandeurs ; d'autres refusent d'introduire la condition archimédienne (Stolz par exemple) ; d'autres encore introduisent une égalité entre grandeurs (Helmholtz). Tous ces travaux reprennent cependant l'idée qu'un domaine quantitatif est une classe d'entité ordonnée que l'on peut sommer entre elles. Comment expliquer le fait qu'à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, au moment même où le concept de quantité n'est plus considéré comme fondamental par les mathématiciens, tant de savants se soient intéressés à la notion de grandeur ? Levons immédiatement une fausse piste : on aurait tort de voir dans ces travaux les fruits d'une commune résistance et hostilité vis-à-vis du programme d'arithmétisation. Certes, Burali-Forti motive son étude de cette manière. Mais le mathématicien italien est de ce point de vue une exception. H. Weber, l'ami de Dedekind, comme D. Hilbert sont loin de partager ses conceptions. Et comme nous le verrons (chapitre 6), s'ils empruntent de nombreux éléments à Burali-Forti 1898, les auteurs des *Principia* ne partagent pas le projet de « géométrisation » de l'arithmétique du mathématicien italien. Mais alors, si ce n'est pas pour s'opposer au programme d'arithmétisation, pourquoi s'intéresser à la grandeur ? Comment expliquer cette rapide et massive floraison au moment où la notion semble perdre tout intérêt mathématique ? La question est vaste et demanderait une étude approfondie, dont les dimensions dépasseraient de beaucoup le cadre des quelques pages que nous lui consacrons. Indiquons cependant quelques pistes, que nous recroiserons très souvent lorsque nous examinerons les constructions russelliennes.

## II-2. L'introduction des coordonnées dans un espace géométrique

La renaissance de la géométrie pure dans la première moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle a conduit à rouvrir la question du rapport entre méthode synthétique et méthode analytique. Le mathématicien allemand G. von Staudt apporta le premier une réponse rigoureuse au problème, en montrant comment l'introduction de coordonnées pouvait se justifier d'un point de vue purement géométrique. Brièvement dit, en se fondant entièrement sur des considérations synthétiques, Von Staudt élabore une « algèbre des jets », un calcul additif et multiplicatif entre certaines configurations de points. Il montre que la droite projective munie de deux opérations d'addition et de produit, a les propriétés d'un corps archimédien complet (je modernise évidemment ici la construction). C'est cette parenté structurelle entre réels et entités géométriques qui justifie la possibilité d'introduire des coordonnées, i.e. d'associer à chaque point de l'espace des triplets de nombres de façon à ce que les principales formations géométriques (plans, droites, surface quadratiques, ...) soient associées à certains systèmes d'équation (équations linéaires, systèmes de deux équations linéaires, équations quadratiques, ...). Le calcul de Von Staudt sera simplifié par Hesse, qui fait lui reposer la définition de l'addition et du produit géométrique directement sur la construction du quadrilatère, permettant de déterminer d'une façon purement géométrique le quatrième harmonique  $D$  d'un point quelconque  $C$  par rapport à un couple de point quelconque  $A, B$  (voir figure 1)<sup>2</sup>.

---

géométrie un obstacle équivalent à celui que l'on trouve dans la définition du nombre réel en général et qui est franchi à l'aide d'un postulat bien particulier, je veux parler du postulat de Dedekind. »

<sup>1</sup> Ces auteurs se citent parfois les uns les autres ; ainsi, Huntington (1902), avant de présenter sa propre version, énumère les travaux de ses prédécesseurs et situe sa propre contribution par rapport à eux.

<sup>2</sup> Sur cette histoire de l'algèbre des jets, voir Nabonnand 2007. Voir également Coxeter 1947 (chap. 4), Coxeter 1949 (chap. 10), Veblen & Young 1910 (141-168), Artin 1957 (51-104).

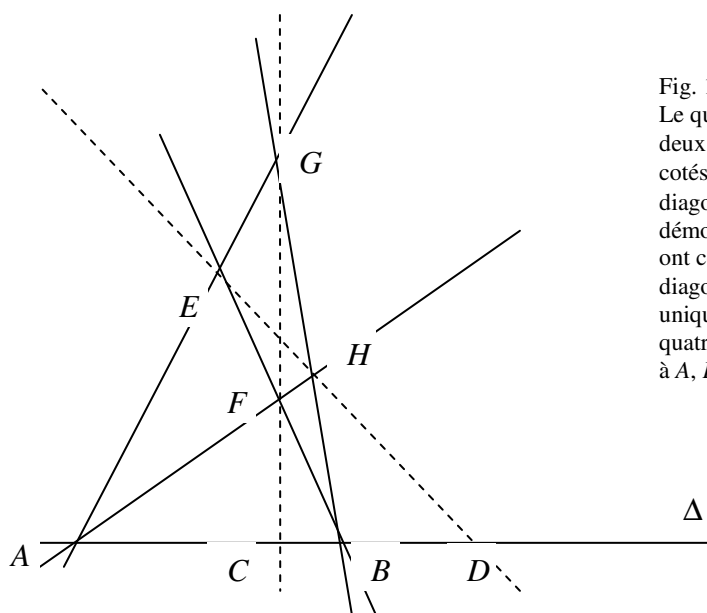


Fig. 1 : la construction du quadrilatère.  
Le quadrilatère  $EFGH$  est tel que les deux cotés  $EF$  et  $GH$  croisent  $\Delta$  en  $B$ , les cotés  $EG$  et  $FH$  croisent  $\Delta$  en  $A$ , la diagonale  $FG$  croise  $\Delta$  en  $C$ . On démontre que tous les quadrilatères qui ont ces caractéristiques sont tels que leur diagonale restante ( $EH$ ) coupe  $\Delta$  en un unique point  $D$ .  $D$  est défini comme la quatrième harmonique de  $C$  par rapport à  $A, B$ .

Afin de donner un peu de chair à cette démarche, reprenons la présentation que Klein donne dans ses *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*. Klein considère l'ensemble des points engendrés par l'application itérée de la construction du quadrilatère à partir de trois points de base, désignés par « 0 », « 1 » et «  $\infty$  ». Cet ensemble, défini par les trois points, est nommé réseau de Möbius. La manière dont les opérations géométriques sont définies chez Staudt et Hessenberg permet d'associer de façon réglée à chaque élément du système un nombre rationnel. Par exemple, le quatrième harmonique de 0 par rapport à 1 et  $\infty$  a la coordonnée « 2 », celui de 1 par rapport à 2 et  $\infty$  la coordonnée 3, etc... On peut par ce procédé associer à chaque entier algébrique un et un seul point du système (voir figure 2).

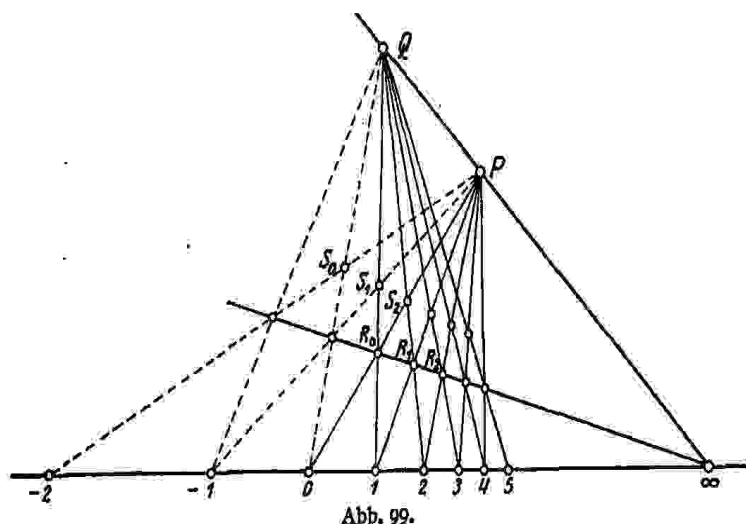


Fig. 2: tiré de Klein, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlin : J. Springer, 1928, 159.

Par une méthode analogue, il est possible d'associer un point à chaque fraction de l'unité (le 0 joue alors le rôle que jouait le point  $\infty$  précédemment), et en combinant les deux méthodes, d'associer à chaque point du système une coordonnée rationnelle. G. von Staudt, en invoquant un simple principe de continuité, étendait cette coordination à tous les points de la droite.



Comme le montrera Klein, son raisonnement, sur ce point, n'est pas complètement satisfaisant, mais je laisserai ici le sujet de côté<sup>1</sup>. La même procédure, appliquée à deux autres droites convenablement choisies, permet d'associer à chaque point de l'espace à trois dimensions un triplet de nombres de manière telle que les équations de la géométrie analytique correspondent à leurs interprétations géométriques attendues – de façon à ce que les équations linéaires correspondent à des plans, les équations quadratiques à des surfaces quadratiques, etc.

Cette méthode purement géométrique d'introduction des coordonnées repose essentiellement sur la mise à jour d'une structure commune, de nature algébrique, entre deux domaines différents : celui des nombres d'une part, celui des configurations géométriques de l'autre. Certes, lorsque, en voulant résumer, plus haut, la démarche de Von Staudt, j'ai dit que le mathématicien allemand souhaitait démontrer que le calcul géométrique qu'il définit a les propriétés d'un corps archimédien complet, je commettais un grossier anachronisme : la notion de structure algébrique abstraite, celle de corps notamment, n'était évidemment pas encore dégagée. Il reste que le projet de Von Staudt est bien celui d'une algébrisation de la géométrie<sup>2</sup>. La volonté de justifier la coordination par des méthodes géométriques conduit à dégager un socle commun aux deux domaines, sur lequel la représentation numérique des entités géométriques peut s'appuyer. Dans ce contexte, la notion de quantité a joué un rôle fondamental. En l'absence de toute thématization des structures algébriques, le concept de grandeur a désigné, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, ce que les nombres et certaines configurations géométriques (segments, couples de paire de points, etc...) avaient en commun. En bref, au lieu de dire que le calcul géométrique avait une structure de corps archimédien complet, certains mathématiciens de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle affirmaient qu'il avait la structure d'un « système de nombre » ou d'un « domaine quantitatif ».

Étayons cette idée par l'analyse de deux exemples. Dans le chapitre III des *Grundlagen*, après avoir défini (§15) une addition et une multiplication entre segments dans le plan euclidien, Hilbert montre que les propriétés de son « calcul des segments » sont identiques à celles de ce qu'il appelle « un système de nombre » (§13), ou dit autrement d'un corps. Cette identité de structure justifie, explique-t-il, l'introduction de coordonnées et le passage à la géométrie analytique. Dans *Über den Zahlbegriff*, un peu plus tardif (1900), Hilbert revient sur cette question en soulignant l'importance de la définition axiomatique des nombres réels, qu'il oppose à la définition génétique. Dans une approche génétique, explique-t-il, les nombres réels sont introduits à partir des entiers. Dans la définition axiomatique, seule l'architecture formelle, algébrique et ordinale, du corps des réels est définie, sans que la nature des éléments soit précisée. Or, explique Hilbert, précisément parce qu'elle laisse de côté la question de la nature des éléments, pour se concentrer seulement sur la forme des relations qu'ils ont entre eux, l'approche axiomatique est seule à même de manifester les « analogies et (...) relations entre (l'arithmétique et la géométrie) »<sup>3</sup> – analogies et ressemblances qui fondent, dans la tradition de Von Staudt la possibilité d'introduire des coordonnées. La critique des méthodes

<sup>1</sup> Sur cette lacune dans le raisonnement de Staudt, et sur l'ensemble des recherches qu'elle suscitera, voir Gandon 2004.

<sup>2</sup> Sur cet aspect, voir Nabonnand 2007.

<sup>3</sup> Citons plus longuement le texte (Hilbert 1900, 1090) : « Si nous considérons les très nombreux ouvrages qui existent dans la littérature sur les principes de l'arithmétique et sur les axiomes de la géométrie, et si nous les comparons les uns aux autres, alors, en dépit de beaucoup d'analogies et de relations entre les deux sujets, nous ne pouvons pas ne pas remarquer une différence dans la méthode d'investigation. Rappelons d'abord la façon d'introduire le concept de nombre. Partant du concept du nombre 1, on conçoit ordinairement les autres entiers positifs rationnels 2, 3, 4, ... comme provenant du procès de décompte, et on développe les lois de leur calcul ; ensuite, en exigeant que la soustraction soit universellement applicable, on atteint les nombres négatifs ; puis on définit les fractions, disons comme paires de rationnels (...) ; et finalement, on définit les nombres réels comme coupure ou comme suite fondamentale (...). Nous appelons cette méthode d'introduction du concept de nombre la méthode génétique, parce que le concept le plus général de nombre réel est engendré par extension successive à partir du simple concept de nombre. On procède de façon essentiellement différente dans la construction de la géométrie (...). Nous posons la question de savoir si la méthode génétique est en réalité la seule appropriée pour l'étude du concept de nombre, et la méthode axiomatique pour la fondation de la géométrie. »

génétiques n'est ici absolument pas, comme c'est le cas chez Burali-Forti, le signe d'une opposition au programme d'arithmétisation ; la démarche axiomatique répond à un projet très particulier, celui de mettre à jour des « analogies et relations entre arithmétique et géométrie », et est conçue donc plutôt comme un complément de l'arithmétisation.

La même démarche se manifeste du célèbre<sup>1</sup> article *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass* (1901) écrit par O. Hölder, un disciple de Hilbert. Hölder est encore plus explicite que son maître. Il considère, d'abord, comme Dedekind, que les vérités arithmétiques sont « les produits de la seule pensée » et qu'elles n'ont pas besoin d'axiomes pour être démontrées. Mais il explique, ensuite, qu'une théorie de la quantité doit malgré tout être formulée afin de pouvoir vérifier que les segments de droite sont bien des grandeurs, et de pouvoir introduire des coordonnées<sup>2</sup>. La première partie de son traité est consacrée à la théorie de la grandeur (définie comme un semi-groupe positivement ordonné archimédien complet) ; dans le premier paragraphe de la seconde partie, une axiomatique des points et des intervalles sur la droite euclidienne est formulée, et Hölder montre, dans le second paragraphe que les intervalles vérifient les axiomes de la quantité ; dans le dernier paragraphe, il se fonde sur ce résultat pour introduire des abscisses sur la droite euclidienne. Ici la structure quantité est explicitement perçue comme une structure algébrique, commune à plusieurs domaines (numériques, géométriques, mécaniques, ...), dont l'intérêt est de permettre une articulation réglée de ces différents champs, et de justifier ainsi l'introduction de coordonnées.

### II-3. Les systèmes non-archimédiens

Comme le dit P. Ehrlich, entre le début des années 1870 et l'apparition des travaux d'Abraham Robinson en analyse non-standard en 1961, « un vaste et diversifié ensemble de mathématiques non archimédiennes, techniquement profond et philosophiquement fécond (...) a vu le jour »<sup>3</sup>. La motivation première des partisans des systèmes non archimédiens, au premier rang desquels il faut compter Stolz et Veronese, n'était pas d'élaborer un traitement du calcul différentiel avec des infinitésimaux. Le principal *impetus* semble avoir été fourni par les travaux de Paul du Bois-Reymond sur la vitesse de croissance des fonctions<sup>4</sup>. Citons le début de la monographie que G. Hardy (1910) a consacré aux grandeurs non archimédiennes :

Les notions d'« ordre de grandeur » (...) d'une fonction  $f(x)$  de variable continue  $x$ , lorsque  $n$  est « grand », ou « petit » ou « presque égal à  $a$  », sont importantes même dans les niveaux les plus élémentaires de l'analyse mathématique. Nous y apprenons que  $x^2$  tend vers l'infini avec  $x$ , et que de plus  $x^2$  tend plus rapidement vers l'infini que  $x$ , i. e. que le rapport  $x^2/x$  tend également vers l'infini ; et que  $x^3$  tend également plus rapidement que  $x^2$  vers l'infini, et ainsi de suite indéfiniment. Nous sommes alors conduit à l'idée d'une « échelle de l'infinité » ( $x^n$ ) formée par les fonctions  $x, x^2, \dots, x^n, \dots$ . Cette échelle peut être complétée par l'interpolation de puissances non entières de  $x$ . Mais il y a des fonctions dont le taux de croissance ne peut être mesuré par aucune fonction de notre échelle, même ainsi complétée. Ainsi,  $\log x$  tends vers l'infini plus lentement, et  $e^x$  plus rapidement que n'importe quelle puissance de  $x$  ; et  $x(\log x)$  tend vers l'infini plus lentement que  $x$ , mais plus rapidement que n'importe quelle puissance de  $x$  plus petite que la première. (...) C'est l'étude systématique de (ces idées), la recherche des

<sup>1</sup> Les partisans de la *theory of measurement* de Suppes voit dans cet article la première occurrence d'un théorème de représentation (voir pour plus sur la théorie représentationnelle de la mesure, chap. 6).

<sup>2</sup> Comme il l'explique au début de son article (Hölder 1901, 237) : « (Si les vérités arithmétiques sont les produits de la seule pensée), il n'en va pas de même en géométrie et en mécanique, où certains axiomes fondés sur l'expérience sensible (...) sont présumés. Comme pour la géométrie et la mécanique, la théorie des grandeurs mesurables peut être fondée sur un ensemble de faits que je nomme « axiomes de la grandeur » ou « axiomes de la quantité ». (...) Afin de prévenir dès le début tout malentendu, notons que les axiomes de la théorie des grandeurs ne doivent pas être présumés pour la géométrie (...) en les appliquant aux segments de droite et aux aires. Bien au contraire, que les axiomes de la théorie des grandeurs mesurables soient satisfaits par les segments de droites découlent des axiomes purement géométriques concernant les points et les segments de la droite. »

<sup>3</sup> Ehrlich 2006, 3. Je me suis beaucoup inspiré de cet article pour rédiger cette sous-section.

<sup>4</sup> Je laisse de côté ici le motif géométrique, particulièrement développé chez Veronese. Voir sur ce point Ehrlich 2006, 65-73.

théorèmes généraux les concernant et des méthodes disponibles pour les manipuler qui est le sujet du *Infinitärcalcul* ou ‘calcul des infinités’ de Paul du Bois-Reymond. (Hardy 1910, 1-2 ; cité dans Ehrlich 2006, 9)

Souhaitant prendre en compte ces échelles de fonctions, O. Stolz élabore, dans son *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* (1885), une axiomatique de la grandeur « absolue », dans laquelle la condition d’Archimède n’est pas reprise<sup>1</sup>. Stolz définit d’abord six axiomes gouvernant le signe d’identité et la relation d’ordre stricte : (i) si  $A = B$ , alors  $B = A$  ; (ii) Si  $A > B$ , alors  $B < A$  ; (iii)  $A = B$  ou  $A > B$  ou  $A < B$  (la disjonction étant exclusive) ; (iv) si  $A = B$  et  $B = C$ , alors  $A = C$  ; (v) si  $A = B$  et  $B > C$ , alors  $A > C$  ; (vi) si  $A > B$  et  $B > C$ , alors  $A > C$ . La relation d’égalité est une relation d’équivalence, qui partitionne l’ensemble des quantités en classes de grandeurs égales, et la relation «  $>$  » induit un ordre sur cette partition. La situation chez Stolz n’est donc pas très différente de celle qui prévaut chez Burali-Forti (dont le système ne comporte pas d’égalité) : les quantités du mathématicien italien correspondent aux classes d’équivalence de Stolz<sup>2</sup>. Stolz introduit ensuite une loi interne additive qui satisfait les conditions suivantes :

- (vii)  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- (viii)  $A + B = B + A$
- (ix)  $A + B = A' + B'$  si  $A = A'$  and  $B = B'$
- (x)  $A + B > A' + B'$  si  $A > A'$  and  $B = B'$
- (xi)  $A + B > A$
- (xii) quelle que soient  $A, B$  du système telles que  $A > B$ , il y a une grandeur  $X$  telle que  $A = B + X$ .

Ces axiomes, présents également chez Burali-Forti, garantissent la compatibilité entre l’addition et l’ordre. Mais à la place des postulats 7 et 8 de *Les propriétés formales des opérations algébriques*, Stolz ajoute une condition de divisibilité, déjà présente chez du Bois-Reymond, qui provient directement de la proposition X, 1 d’Euclide :

- (xiii) Pour tout élément  $A$  du système et pour tout entier  $n$ , il y a un  $X$  dans le système tel que  $nX = A$ .

On retrouve donc chez Stolz la combinaison, caractéristique de toutes les théories de la quantité, d’une structure de semi-groupe et d’une structure d’ordre. Mais contrairement à ce qui prévaut chez Burali-Forti, Stolz laisse ouverte la possibilité que le système ne satisfasse pas le postulat d’Archimède. Le mathématicien allemand montre que tous ces axiomes s’appliquent aux comparaisons et additions entre taux de croissance de fonctions, telles qu’elles ont été élaborées par du Bois-Reymond<sup>3</sup>.

Stolz, donnant dans ses travaux un exemple de systèmes non archimédiens, on aurait pu s’attendre à ce qu’ils soient bien reçus de la communauté scientifique. Il n’en fut cependant rien : Cantor s’opposa très fermement à ces nouveaux systèmes, mettant en cause leur cohérence. L’émergence des structures non archimédiennes s’est donc effectuée dans un contexte extrêmement polémique. Je ne rentrerai pas dans cette histoire à multiples rebondissements<sup>4</sup>. Le point que je veux souligner est simplement que les objections de Cantor ont fortement contribué au développement des axiomatisations de la grandeur. En effet, en

<sup>1</sup> « Absolu » a ici le même sens que dans l’expression « géométrie absolue » de Bolyai – il s’agit pour Stolz d’axiomatiser un noyau commun à plusieurs théories possibles, archimédiennes ou non, de la grandeur.

<sup>2</sup> Sur cette question du rapport entre quantités et classes de quantités égales, voir chapitre 2.

<sup>3</sup> Ehrlich 2006, 12-13.

<sup>4</sup> Pour une description de ces discussions et de leurs enjeux, voir Ehrlich 2006, 25-55.

mettant en cause la cohérence de la notion de grandeur non archimédienne, Cantor a obligé les partisans de ces systèmes à étudier de façon systématique la dépendance entre les axiomes ; inversement, les réponses de Stolz et de Veronese ont conduit Cantor et ses disciples à reformuler leur arguments et à expliciter leurs présupposés. De même que l'axiomatisation de la théorie des ensembles a été une des réponses aux paradoxes ensemblistes, de même l'étude systématique des axiomatiques de la grandeur a constitué une réponse aux objections cantorienne. Prenons un seul exemple. Stolz prétend dans son *Allgemeine Arithmetik* que le continu, au sens de Dedekind, est archimédien. Veronese montre cependant que la preuve qu'il donne de ce théorème est erronée. Dans son *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass* dont nous avons déjà parlé, O. Hölder revient sur cette question (il en fait l'historique dans sa longue note 8). Hölder dérive (§4) la condition d'Archimède de sept axiomes, qui comprennent l'axiome des coupures (l'axiome 7), mais aussi la condition de trichotomie sur l'ordre, des axiomes de compatibilité entre addition et ordre, etc – mais pas la commutativité de l'addition. Hölder souligne que, contrairement à ce que les formulations de Veronese laissaient supposer, l'axiome d'Archimède ne dérive pas du seul axiome des coupures, mais seulement de la totalité des sept axiomes. Hölder ne s'arrête pas là : il montre qu'un système de grandeur obéissant aux six premiers axiomes (donc non nécessairement continu au sens de Dedekind) et à la condition d'Archimède, est nécessairement commutatif. Le résultat est surprenant : il met à jour l'existence d'un lien entre la condition d'Archimède et un fait purement algébrique, la commutativité de l'addition. L'axiome d'Archimède a ainsi des conséquences inattendues que seul le travail d'axiomatisation peut révéler.

Résumons. À l'intérieur des mathématiques, au moins deux courants de recherche différents conduisent, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, à la notion de quantité. La question de l'introduction des coordonnées, d'abord, a incité les savants de l'époque à dégager une structure commune aux nombres et aux objets géométriques, structure que la théorie de la quantité se chargeait de décrire. Le problème de la nature et de la consistance de l'idée de grandeur non archimédienne, ensuite, a amené les mathématiciens à formaliser la notion, et à étudier de façon systématique le poids logique de chacun des axiomes. Comme nous le verrons, la question de la coordination est très importante pour Russell. La seconde ligne problématique est moins présente, Russell se rangeant, certainement trop vite, sous la bannière cantorienne.

#### II-4. Mesurer les phénomènes

Un autre fil, extérieur aux mathématiques celui-là, conduit les savants de la seconde moitié du XIX<sup>ème</sup> à s'intéresser de près à la notion de quantité. La mutation que subit la physique, et plus généralement les sciences empiriques, au cours du siècle aboutit en effet à une très grande complexification du problème de la mesure<sup>1</sup>. À la fin du XVIII<sup>ème</sup>, la science reine est la mécanique, et les mesures de la masse, du mouvement, des vitesses, des accélérations et des moments, si elles posent des problèmes techniques, ne soulèvent alors pas vraiment de difficultés de principes. Les corps sont étendus spatialement et ils « occupent » une certaine durée : ils peuvent par là même être mesurés. Tout change avec l'émergence de nouveaux domaines d'étude comme l'électromagnétisme et la thermodynamique. Comment mesurer la température ? Là encore de nombreux défis techniques, souvent liés à des problèmes épistémologiques, font obstacle à l'élaboration d'une véritable thermométrie, comparable à la métrologie<sup>2</sup>. Mais la question plus fondamentale de la mesurabilité de ce qui est conçu comme une qualité se pose. Y a-t-il un sens à mesurer les températures ? Que signifie l'énoncé « il fait deux fois plus chaud maintenant que tout à l'heure » ? On peut mettre bout à bout des

<sup>1</sup> Sur cette évolution, voir Roche 1998, chap. 9-12.

<sup>2</sup> Sur la thermométrie, voir Chang H. 2004.

segments, ajouter des masses – mais comment additionner des températures ? La phrase « il fait aussi chaud maintenant que tout à l'heure », pourtant plus simple que la précédente, a-t-elle même un sens ? On peut superposer des segments pour vérifier leur égalité – comment « superposer » deux gaz pour déterminer s'ils ont ou non la même température ?

Le même genre de problème émerge, de façon encore plus aigüe, dans un autre domaine, celui de la psychologie empirique. Fechner, dans les années 1850, défend l'idée que les sensations, parce qu'elles peuvent être comparées « en grandeur » (ordinalement), sont des quantités ; leur mesure semble toutefois requérir la possibilité d'exprimer une sensation donnée comme la somme de deux autres. Or comment sommer des sensations ? Fechner pense pouvoir mesurer les sensations indirectement, par la mesure de leur stimulus. Mais un obstacle s'oppose à ce projet : la mesure indirecte présuppose que la relation quantitative entre la sensation et le stimulus soit connue, ce qui semble nécessiter une mesure indépendante du stimulus et de la sensation<sup>1</sup>. Fechner contourne la difficulté en considérant la forme « différentielle » de la relation entre sensation et stimulus. Le savant propose, de façon très astucieuse, d'admettre que la plus petite augmentation perceptible  $s$  d'une sensation  $S$  est indépendante de l'intensité de la sensation. Cette hypothèse, combinée à la « loi de Weber », selon laquelle  $s$  est proportionnelle à l'intensité du stimulus  $E$ , donne le résultat suivant : l'intensité  $S$  de la sensation est proportionnelle au logarithme de  $E^2$ . Comme les températures, les sensations ne semblent pas pouvoir être ajoutées les unes aux autres ; mais l'émergence d'une thermométrie comme d'une psychophysique conduit à admettre qu'elles sont mesurables ; comment arbitrer le conflit ?

Comme le note O. Darrigol<sup>3</sup>, la question des fondements de la mesure n'est pas au cœur des préoccupations des physiciens expérimentateurs et des psychologues de la fin du XIX<sup>e</sup>me. Les problèmes, plus concrets, de reproductibilité, de marge d'erreur, etc... occupent alors le devant de la scène. Une forme de pragmatisme permet aux laboratoires de continuer à perfectionner les procédures de mesure et collecter des faits expérimentaux en mettant entre parenthèses les questions fondationnelles. Mais du côté des philosophes, la réaction a été très vive. S'appuyant sur la distinction kantienne entre quantité extensive et intensive, J. von Kries, lui-même professeur de physiologie à Freiburg, rejette, en 1882, toute possibilité de mesurer les sensations<sup>4</sup>. Il avance essentiellement deux arguments : l'égalité quantitative entre sensations n'est pas transitive et les sensations ne sont pas additives ; or la transitivité de l'égalité comme l'additivité sont des conditions nécessaires à toute mesure. La critique de Von Kries invitait donc à définir de façon plus précise les hypothèses que devaient satisfaire une structure empirique pour pouvoir être considérée comme mesurable (pour plus sur Von Kries, voir chapitre 3). Même s'il reste très prudent sur le problème lié à la mesure psychophysique, il ne fait ainsi guère de doute que Helmholtz a cette question en tête lorsqu'il élabore sa définition axiomatique de la quantité dans son célèbre *Zählen und Messen* (1887)<sup>5</sup>. Les axiomes de la quantité sont, pour le savant allemand, autant de conditions que les phénomènes doivent satisfaire pour qu'une mesure soit possible. Helmholtz considère ainsi, comme Von Kries, que l'égalité doit être transitive et qu'une opération de combinaison des grandeurs doit être définie. Mais cette dernière opération est considérée comme primitive, et n'est pas dérivée de la divisibilité spatio-temporelle, ce qui laisse la porte ouverte à l'élaboration d'échelle de mesure non mécanique (à une thermométrie, voire à une psychométrie). L'attitude de Helmholtz diffère donc de celle, purement pragmatique, des « expérimentateurs » (physiciens ou psychologues) qui évitent toute question concernant la

---

<sup>1</sup> Sur ce cercle, que l'on retrouve également en thermométrie, voir Chang H. 2004, 57-60

<sup>2</sup> Parmi les multiples exposés consacrés à Fechner, citons Heidelberg 2004 et Stevens 1986.

<sup>3</sup> Darrigol 2003, 520, 565-570.

<sup>4</sup> Sur Von Kries 1882, voir Niall 1995 et Darrigol 2003, 538-540.

<sup>5</sup> Pour une analyse des sources et de la signification du travail de Helmholtz, je renvoie à Darrigol 2003.

possibilité conceptuelle d'étendre la mesure à des phénomènes non mécaniques. En même temps, le savant allemand semble ne pas condamner par principe la possibilité des nouvelles formes de mesure. Si les conditions, rassemblées sous la forme d'une axiomatique, sont expérimentalement satisfaites, alors la mesure est possible<sup>1</sup>.

L'axiomatisation n'a pas pour but, chez Helmholtz, de déterminer la puissance déductive de tel ou tel axiome ; elle n'a pas non plus pour but de dégager une forme commune à l'arithmétique et à la géométrie. Elle vise seulement à expliciter les conditions expérimentales requises pour qu'il y ait possibilité de mesure. Ce troisième chemin, extra-mathématique, vers l'axiomatisation de la théorie de la quantité, ne doit pas pour autant, sous prétexte que nous nous intéressons à l'œuvre d'un philosophe des mathématiques, être ignoré. Comme nous le verrons, des considérations liées à la thermodynamique ou à la psychophysique sont fréquentes chez des auteurs comme Poincaré, Meinong ou Wiener, que connaît et auxquels répond Russell ; elles ne sont, de surcroît, pas absentes chez Russell lui-même (voir notamment chapitre 3).

En soulignant le rôle de ces trois sphères problématiques (coordination d'un espace, analyse des systèmes non archimédiens, examen des conditions de possibilité de la mesure), je n'ai pas visé l'exhaustivité. Il y a sans doute d'autres raisons pour lesquels les savants au tournant du siècle dernier focalisent leur attention sur la grandeur. Je ne prétends pas non plus que les distinctions entre ces trois courants se manifestent comme telles pour les acteurs eux-mêmes. Ainsi, O. Hölder, qui sera perçu comme l'ancêtre de la *theory of measurement* (dont l'objet est de résoudre le problème empirique de la mesure), ne distinguait pas dans son article la question de la coordination de celle de l'analyse du poids logique de chacun des axiomes. En distinguant ces axes problématiques, j'ai seulement voulu montrer que la notion de grandeur se trouve, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, au carrefour de mouvements profonds et hétérogènes traversant les mathématiques et plus généralement la science. Chacune de ces perspectives imprègne, d'une façon ou d'une autre, les constructions théoriques et les discussions suscitées par le concept de grandeur, et il convient de garder ces différents contextes en tête lors de l'analyse détaillée des théories ; tel point, crucial lorsqu'il est inséré dans tel champ problématique, peut perdre beaucoup de son intérêt dans un autre contexte<sup>2</sup>.

### III- The Logic of Relations with Some Applications to Arithmetic and the Theory of Series

En 1901, Russell fait paraître en français dans la *Rivista* de Peano un très important article, *Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries* (Russell 1901a), qui contient sous forme ramassée l'essentiel de l'œuvre à venir. Ce texte est tiré d'un manuscrit, qui a été publié dans le troisième volume des *Collected Papers*, intitulé *On the Logic of Relations with Applications to Arithmetic and the Theory of Series* (Russell 1900b). Comme l'étude du manuscrit le montre, les deux versions diffèrent sur des points importants. La table des matières de Russell 1901a est la suivante :

- §1. Théorie générale des Relations
- §2. Les nombres cardinaux
- §3. Les Progressions

---

<sup>1</sup> Comme le note Darrigol, ce souci guide la formulation même des postulats, qui doivent, selon Helmholtz, pouvoir se prêter à une vérification expérimentale.

<sup>2</sup> Ainsi par exemple, l'alternative consistant à soit admettre une relation d'égalité entre quantités soit à s'en passer, comme le fait Burali-Forti, est fondamentale lorsque l'on met l'accent, comme Helmholtz, sur les procédures concrètes de mesure ; elle est moins importante dans une perspective plus directement formelle.

- §4. Le fini et l'infini
- §5. Les séries condensées
- §6. Les séries fondamentales dans une série condensée

Le plan de Russell 1900b est comme suit :

- §1. Propositions générales de la logique
- §2. Groupes
- §3. Nombres cardinaux
- §4. Progressions
- §5. Séries condensées et leurs segments
- §6. Progressions dans les séries condensées
- §7. Distance
- §8. Angles

Dans les deux traités, la théorie des *series* (des ensembles ordonnés) est presque la même : après un exposé général sur la théorie des relations (§1 de 1901b et 1900b), Russell donne les propriétés des nombres cardinaux définis comme classes de classes équinumériques (§2 de 1901b et §3 de 1900b), puis il passe à la théorie des progressions (§3-4 de 1901b et §4 de 1900b), pour aboutir à l'étude des types d'ordre  $\eta$  (§5 de 1901b et 1900b) puis à celle des suites fondamentales (§6 de 1901b et 1900b). Mais, dans la version publiée, trois paragraphes ont complètement disparu : la section 2 (consacrée à la théorie des groupes), et les sections 7 et 8 (portant sur la distance et les angles) du manuscrit anglais. Ces passages ont pour nous une extrême importance. Ils contiennent la première théorie générale et relationnelle de la grandeur. Le fait qu'ils n'aient pas été publiés ne signifie absolument pas que les conceptions qu'ils présentent aient été abandonnées par Russell. Comme nous le montrerons, la théorie de la distance joue un rôle fondamental dans les *Principles*, et le schéma introduit en 1900b constitue la matrice de la doctrine de la quantité développée dans la partie VI des *Principia*. Il est donc dommage que ces trois sections, il est vrai difficile à déchiffrer, n'aient pas jusqu'à présent reçu l'attention qu'elles méritent dans la littérature secondaire. Je vais ici d'abord exposer la théorie de la distance et des angles, puis étudier la définition clé que Russell donne des groupes. Dans un troisième et dernier temps, je reviendrai sur la doctrine de la distance, en montrant comment elle est reliée à la précédente analyse vectorielle des quantités. Je reproduis le contenu des trois sections dans l'Appendice à ce chapitre.

### III-1. Distances et angles

Dans les deux dernières sections de *On the Logic of Relations with Applications to Arithmetic and the Theory of Series*, Russell élabore une théorie générale de la grandeur, en donnant une définition de la distance (dont l'auteur dit explicitement qu'elle ne se réduit pas à la distance spatiale<sup>1</sup>), puis une définition de l'angle. Cette occurrence de la notion d'angle dans le cadre d'un développement qui se veut complètement général peut surprendre. Mais Russell explique que cette seconde théorie a simplement pour but de compléter la première (1900b, 611) :

Nous avons vu que, dans une série ayant un terme entre deux termes quelconques, il est généralement nécessaire de considérer la relation génératrice comme transitive. (Lorsqu'elle) est transitive, il s'ensuit, puisqu'elle est aliorelative, que la série ne peut pas être close. Ainsi aucune de nos théories précédentes ne s'applique aux angles.

---

<sup>1</sup> Dans les *Principles*, Russell précise : « Le mot (distance) sera employé pour couvrir une conception bien plus générale que celle de distance dans l'espace. » (180).

Comme nous allons bientôt le voir, la théorie générale de la distance s'applique aux séries ouverte dense. Cette hypothèse exclut la possibilité de définir des quantités dans des séries closes ; or de telles grandeurs existent, comme nous le montre les distances angulaires, mais aussi « la ligne droite elliptique, les nombres complexes d'un module donné »<sup>1</sup> ; d'où la nécessité d'étendre le cadre mis en place dans le §7. Nous verrons, dans notre chapitre 4, que cette dualité entre quantité « linéaire » et « angulaire » se retrouve jusque dans les *Principia*. Je vais d'abord me consacrer à la notion de distance, pour Russell, la plus fondamentale. Je dirai quelques mots ensuite de la définition de l'angle.

Dans 1900b, Russell définit la distance ainsi :

$$(*) \quad \Delta = FG \cap L \ni \{x, y \in \lambda . \supset_{x, y} . \exists L \cap R \ni (xRy) : Q = R_L . \\ R_1, R_2, R_3 \in L . R_1QR_2 . \supset_{R_1, R_2, R_3} . R_1R_2 = R_2R_1 . R_1R_3 Q R_2R_3\} .$$

Précisons la terminologie et quelques éléments de syntaxe.  $F$  désigne la classe des séries denses,  $G$  la classe des groupes ;  $L$  désigne un ensemble de relations bijectives<sup>2</sup> qui ont le même domaine et codomaine<sup>3</sup> noté  $\lambda$  ;  $Q$  est la relation qui ordonne  $L$  ; la juxtaposition de deux signes de relation ( $R_1R_2$ ) désigne le produit relationnel de  $R_1$  par  $R_2$  (pour plus à ce sujet, voir *infra*). Ces quelques indications montrent que Russell met ici en place une structure « à trois étages » : il faut, pour comprendre (\*), distinguer un ensemble  $\lambda$  d'entités ; un ensemble  $L$  de relations entre ces objets ; un ensemble de relations que satisfont les relations éléments de  $L$  (ainsi,  $Q$  ordonne les éléments de  $L$  et non de  $\lambda$ ). Faisons un schéma :

Niveau supérieur	=	relations définies sur $L$ (relations entre termes du niveau intermédiaires)
Niveau intermédiaire	=	ensemble $L$ de relations bijectives ayant pour domaine et codomaine $\lambda$ .
Niveau inférieur	=	ensemble $\lambda$ d'individus.

Quelle structure Russell définit-il sur  $L$  ? On vient de le dire,  $L$  est une série dense et un groupe. Les relations de  $L$  peuvent donc être comparées ordinalement et il existe une loi interne, le produit relationnel, permettant d'engendrer une relation de  $L$  à partir de deux autres. Les conditions énumérées entre les accolades précisent quelles sont les stipulations supplémentaires que  $L$  doit satisfaire. En premier lieu («  $\exists L \cap R \ni (xRy)$  »), un couple quelconque de  $\lambda$  est toujours lié par une relation de  $L$  (ou dit autrement, l'« action » de  $L$  sur  $\lambda$  est transitive). En second lieu, («  $R_1, R_2 \in L . \supset_{R_1, R_2} . R_1R_2 = R_2R_1$  »), le produit relationnel, donc le groupe, est commutatif. Enfin, («  $R_1, R_2, R_3 \in L . R_1QR_2 . \supset_{R_1, R_2, R_3} . R_1R_3 Q R_2R_3$  »), une condition de compatibilité entre l'ordre et l'opération de groupe est posée. Donc en termes plus modernes, Russell définit une distance  $\Delta$  comme une série dense de relations bijectives ayant même champ, formant un groupe commutatif compatible avec la relation d'ordre, et dont l'action est transitive sur  $\lambda$ . Vérifions que cette description coïncide avec celle donnée par Russell :

*Note.* Ceci est la définition d'un type de distance, c-à-d d'une classe de distances quantitativement comparables. Un type de distance est une série, dans laquelle il y a un terme entre deux termes quelconques, qui est également un groupe. N'importe quelle paire de termes appartenant au champ de ce groupe est reliée par une relation du groupe. Si  $Q$  est la relation en vertu de laquelle les relations du groupe forment une série, et si  $R_1$  et  $R_2$  sont des

<sup>1</sup> Russell 1903, 205.

<sup>2</sup> Sur la bijectivité des relations, voir section suivante.

<sup>3</sup> Le domaine d'une fonction  $R$  est l'ensemble des  $x$  tels qu'il existe un  $y$  tel que  $xRy$ . Si  $R$  est une relation « many-one », et que l'on note  $x = R(y)$ , alors le domaine correspond à l'image par  $R$  du domaine de définition (qui est ce que Russell nomme le « codomaine »).



relations de ce groupe telles que  $R_1QR_2$ , alors  $R_1R_2 = R_2R_1$ , et la relation  $Q$  a encore lieu lorsque les deux côtés sont multipliés par n'importe quelle relation du groupe.

Russell ajoute ensuite deux dernières conditions (3.6 et 3.7) :

$$\Delta'_Q = \Delta_Q \cap L \ni \{R, R' \in L : \supset_{R, R'} \cdot \exists n \cap p \ni (R^n Q R')\} \quad (\text{Postulat d'Archimède})^1$$

$$\Delta''_Q = \Delta'_Q \cap L \ni \{n \in \mathbb{N} \cap L : \supset_{x, y} \cdot \exists \lambda \cap z \ni (x R y \cdot x R^n z)\} \quad (\text{Postulat de linéarité : Du-Bois Reymond})^2$$

Russell s'inscrit donc dans une perspective résolument « cantorienne », puisque, contrairement à Stolz, la condition d'Archimède est introduite dès le début.

D'une certaine façon, on retrouve dans la définition russellienne de la distance la combinaison alors classique entre une structure additive de groupe ou de semi-groupe, et une structure d'ordre. Mais dans les axiomatiques de la quantité de la fin du XIXème siècle, on ne rencontre jamais une telle distinction entre un ensemble de base et une structure relationnelle qui agit sur lui. Les éléments du groupe ne sont ordinairement pas précisés ; ils ne sont jamais caractérisés comme étant des relations, et l'addition n'est jamais définie comme étant un produit relationnel. Cette approche standard est donc à la fois plus abstraite et plus directe que celle de Russell. Quel sens donner à la construction russellienne, à première vue, inutilement compliquée ?

Avant de répondre à cette question, quelques mots sur le paragraphe 8 et la théorie des angles. Russell se contente en réalité de définir une série close, pouvant être dense (i.e. dans laquelle la relation de succession entre éléments n'est pas introduite dans la définition). Comme l'explique l'auteur, l'idée est une nouvelle fois de considérer une série dont les éléments sont des relations (Russell 1900b, 611) :

En considérant des séries dans lesquelles (comme dans le cas des angles) les termes de la série sont eux-mêmes des relations asymétriques, le manque (d'une théorie qui s'applique aux angles) peut être comblé.

La définition, compliquée, d'une série close ( $S_c$ ) est la suivante :

$$u \in S_c \cdot =_{\text{Déf}} :: \exists \text{Rel} \cap R \ni (u \supset \rho) \cdot R \cap R^{-1} = \Lambda : x \in u \cdot \supset_x \cdot x \in \text{Rel} \cdot x \neq x^{-1} \cdot \sim x R x^{-1} \cdot x^{-1} \in u : \\ x, y \in u \cdot x R y \cdot \supset_{x, y} \cdot y R x^{-1} :: x, y \in u \cdot x \neq y \cdot x \neq y^{-1} \cdot \supset_{x, y} : x R y \cdot \cup \cdot y R x :: x \in u \cdot \supset_x \cdot x_R \supset u.$$

Dans les *Principles*, Russell livre ce commentaire, qui permet de saisir le sens de la formule précédente (1903, 205) :

Soient  $x, y, z, \dots$  un ensemble de relations asymétriques, et soit  $R$  une relation asymétrique qui lie deux  $x, y$  ou  $y, x$  quelconques, sauf quand  $y$  est la relation réciproque de  $x$ . Posons aussi que  $R$  est telle que, si elle lie  $x$  et  $y$ , elle lie  $y$  et la relation réciproque de  $x$  ; et si  $x$  est n'importe quel terme de la collection, posons que tous les termes avec lesquels  $x$  a soit la relation  $R$  soit la relation  $R^{-1}$  soient des termes de la collection. Toutes ces conditions sont satisfaites par les angles, et chaque fois qu'elles sont satisfaites, la série résultante est close. Car  $x R y$  implique  $y R x^{-1}$ , et en conséquence  $x^{-1} R y^{-1}$ , et donc  $y^{-1} R x$  ; ainsi par le moyen des relations  $R$  il est possible de revenir de  $x$  à  $x$ .

Prenons le cas des angles. Les relations asymétriques  $x, y$  correspondent à des droites orientées d'un faisceau planaire ; la relation  $R$  est la relation d'ordre entre droites orientées du faisceau<sup>3</sup> ; la réciproque  $x^{-1}$  d'un élément  $x$  du faisceau correspond à un changement de sens

<sup>1</sup> Le «  $Q$  » en indice du  $\Delta$  indique que la relation qui ordonne  $L$  est  $Q$ .

<sup>2</sup> J'ai modifié légèrement la définition donnée par Russell qui emploie la notation  $(xy)$  et  $(xz)$  dont j'expliquerai le fonctionnement seulement en III.3.

<sup>3</sup> La relation  $R$  lie deux éléments du faisceau (les relations asymétriques éléments de la série) lorsque ces éléments se suivent quand on parcourt le cercle dans un sens déterminé, et lorsque les angles qui les séparent sont inférieures à un angle plat.

sur un même support de droite (dans la figure qui suit, à des flèches alignées pointant dans des directions opposées). Le schéma suivant (figure 3) peut aider à comprendre ce dont il est question<sup>1</sup> :

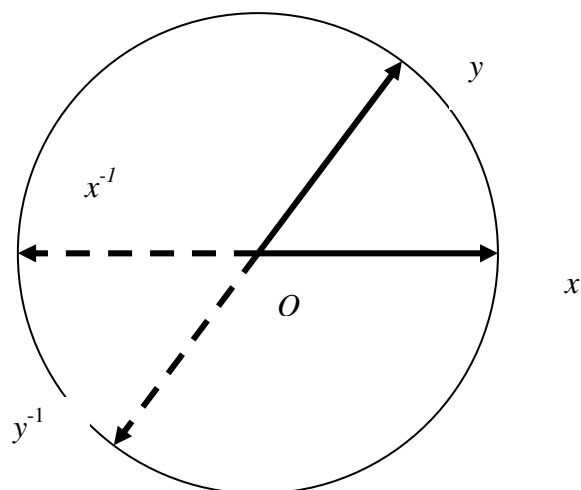


Fig. 3 : La relation  $R$  lie deux « flèches » d'origine  $O$  (les relations asymétriques éléments de la série) lorsque ces flèches se suivent dans le sens direct, et qu'elles forment entre elles un angle inférieur à un angle plat. Ainsi, on a  $yRx$ , mais non  $yRx^{-1}$ .

Comme l'explique Russell lui-même, dans cette analyse des séries closes, l'idée d'élément antipodal joue un rôle central. Chaque « flèche » a ici une et une seule relation qui lui est opposée. En 1913, dans les *Principia*, Russell et Whitehead proposeront une autre approche, fondée directement sur l'idée d'angle comme relation entre deux droites orientées. Je renvoie au chapitre 4 pour une description rapide de la théorie ultérieure.

À la différence de la structure distance, aucune relation d'ordre transitive n'est définie sur les ordres cycliques ; aucune analyse du produit relationnel entre éléments de  $u$  n'est de plus développée. Mais on retrouve, dans le §8 comme dans le §7, l'idée que les grandeurs sont des relations. À l'ensemble de base  $\lambda$ , il est possible, dans le cas des angles, de faire correspondre le champ des relations de  $u$  (les points des demi-droites du faisceau) ; aux relations de  $L$ , les éléments  $x, y$ , etc. de  $u$  (les demi-droites du faisceau) ; aux relations entre éléments de  $L$ , la relation d'ordre cyclique  $R$ .

### III.2- La définition relationnelle du groupe

Revenons à la définition que Russell donne de la distance. Comment expliquer l'approche, très indirecte, du philosophe ? La clé de la construction se trouve au début de l'article (§2), dans la théorie que Russell développe de la notion de groupe (1900b, 594-595) :

$$\text{Groupe} = G = \text{Cls}'1 \rightarrow 1 \cap K \ni \{P \in K, \supset P^{-1} \in K : P, R \in K \supset_{P,R} PR \in K, \pi = \rho\}$$

$K$  est un groupe si et seulement si  $K$  est une classe de relations injectives définies sur un même ensemble  $\lambda$  telle que, si  $R \in K$ , alors  $R^{-1} \in K$ , et telle que si  $R_1$  et  $R_2 \in K$ , alors

<sup>1</sup> On peut revenir à présent sur la définition de  $u$  comme série close. «  $\exists \text{Rel} \cap R \ni (u \supset \rho)$  » signifie que  $R$  est une relation dont le champ inclut  $u$  ; «  $R \cap R^{-1} = \Lambda$  » signifie que  $R$  est asymétrique ; les clauses «  $x \in u, \supset_x, x \in \text{Rel}, x \neq x^{-1}, \sim xRx^{-1}, x^{-1} \in u$  », «  $x, y \in u, xRy, \supset_{x,y}, yRx^{-1}$  », «  $x, y \in u, x \neq y, x \neq y^{-1}, \supset_{x,y} : xRy \cup yRx$  » se comprennent d'elles-mêmes ; «  $x \in u, \supset_x, x_R \supset u$  » signifie que l'ensemble des images de  $x$  par  $R$  (noté à l'époque  $x_R$ ) est inclus dans  $u$ .

$R_1 R_2 \in K$ . Remarquons tout de suite que la combinaison de la seconde condition (existence de l'inverse) et de la première (les relations injectives de  $K$  sont définies sur le même ensemble) impliquent que les relations de  $K$  soient bijectives.

Que signifie  $R^{-1}$  et  $R_1 R_2$  ?  $R_1 R_2$  est le produit relationnel de  $R_1$  par  $R_2$ . Un produit relationnel est une relation entre relations que Russell définit ainsi :

$x$  et  $y$  ont la relation  $R_1 R_2$  ssi il existe un  $z$  tel que  $x R_1 z \wedge z R_2 y$ .

Si  $R_1$  est la relation « est frère de » et  $R_2$  la relation « est père de »,  $R_1 R_2$  est la relation « est oncle paternel de »<sup>1</sup>. La relation  $R^{-1}$  se définit elle de cette façon :

$x$  et  $y$  ont la relation  $R^{-1}$  ssi  $y$  et  $x$  ont la relation  $R$ .

On a immédiatement  $R^{-1} R = \text{Id}_\rho$  et  $R R^{-1} = \text{Id}_{\rho^{-1}}$  (Id désignant la relation identité que chaque entité possède avec elle-même et avec nulle autre, restreinte au domaine  $\rho$  de  $R$  dans le premier cas, et au domaine  $\rho^{-1}$  de  $R^{-1}$  dans le second). On pourrait être tenté d'interpréter le produit relationnel comme une opération de composition de fonctions, la réciproque d'une relation représentant l'inverse d'une fonction. Il faut cependant prendre garde : le produit relatif est plus général que la composition. Les facteurs du produit sont en effet des relations, et non pas nécessairement des fonctions (qui sont des relations très particulières, « *many-one* », dans la terminologie russellienne). Cette différence n'est pas sans conséquence. Lorsque l'on compose deux fonctions  $f$  et  $g$ , il faut toujours vérifier que l'image du domaine de définition de  $g$  soit contenue dans l'ensemble de définition de  $f$  – si ce n'est pas le cas, aucune fonction n'est définie par la composition de  $g$  et de  $f$ . Et des contraintes similaires pèsent sur l'inversion. Rien de tel chez Russell : le produit relationnel définit toujours une relation (possiblement vide) et toute relation a un inverse<sup>2</sup>. Autrement dit, l'existence du produit relationnel et de l'inverse est donnée avec les relations, et aucune hypothèse supplémentaire sur les relations entre lesquelles ce produit est pris n'est nécessaire. Ce point est déjà présent dans *On the Logic of Relations*, puisque la théorie du produit relationnel et de la relation réciproque est développée dans la section 1, consacrée à la théorie générale des relations<sup>3</sup>, mais il vaut aussi dans les *Principia*<sup>4</sup> et dans toute la période intermédiaire<sup>5</sup>.

Je posais plus haut la question du sens de la définition russellienne, artificiellement compliquée, semblait-il, de la distance. Nous avons maintenant tous les éléments pour répondre. La structure grandeur est toujours, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, conçue comme un semi-groupe (ou un groupe) ordonné. La formalisation de l'ordre ne pose évidemment aucun problème dans la nouvelle logique des relations. En revanche, savoir comment représenter l'opération de groupe est beaucoup plus difficile. Une opération binaire d'addition doit-elle être conçue comme une relation à trois termes ? Comme une relation entre une relation binaire et une autre entité ? Comme une fonction propositionnelle ? Comme une nouvelle entité logique indéfinissable ? Le problème est réel. Il signale un écart entre relations et opérations

<sup>1</sup> Sur l'opération produit relationnel, nous renvoyons à Sackur 2005, 174-194 et Landini 2008, 178-182 ; voir également Russell-Whitehead 1910, 256-264, et notre chap. 4.

<sup>2</sup> Dans certains contextes, comme par exemple l'étude des théorèmes de représentation pour diverses sortes de semi-groupes, les mathématiciens reviennent à des définitions de la composition et de l'inversion aussi générales que le sont les définitions russelliennes (voir Howie 1995, chap. 1).

<sup>3</sup> Voir Russell 1900b : 1. 72 (pour la définition de l'inversion) et 2.1 (pour la définition du produit).

<sup>4</sup> Russell 1910, \*31 (voir notamment \*31.13 :  $E ! Cnv'P$ ), \*34. Il y a toutefois une restriction à apporter : le produit relatif de  $R$  et de  $S$  a un sens ssi le domaine de  $S$  et le codomaine de  $R$  ont le même type. Mais cette restriction est « logique », puisque que la théorie des types est une théorie logique.

<sup>5</sup> Voir Russell 1903, chap. 2.

que Russell semble ne pas parvenir à réduire<sup>1</sup>. Comment donc concevoir l'addition entre grandeurs ? Dans la définition que Russell donne en 1900b, la notion de groupe apparaît comme un concept appartenant de plein pied à la logique des relations. Un groupe est une classe  $K$  de relations bijectives définies sur un même ensemble  $\lambda$  telle que, si  $R \in K$ , alors  $R^{-1} \in K$ , et telle que si  $R_1, R_2 \in K$ , alors  $R_1 R_2 \in K$ . L'addition est ici un produit relationnel, c'est-à-dire une relation entre relations, dont les propriétés sont étudiées dans une des branches de la nouvelle logique. Certes, en posant que les éléments des groupes sont des relations, un tel raisonnement conduit inévitablement à distinguer trois niveaux : l'ensemble sur lequel agissent les relations, l'ensemble des relations, et la structure relationnelle qui gouverne ce second étage. Mais, et c'est ce point qui est fondamental pour Russell, il règle complètement et définitivement la question du statut de l'opération de groupe.

On pourrait objecter à cette approche qu'elle restreint l'extension du concept de groupe. Un groupe, dans son sens usuel, est n'importe quel ensemble muni de n'importe quelle loi interne satisfaisant les « bonnes » propriétés (clôture, existence du neutre, existence de l'inverse). Les éléments n'ont donc pas à être des relations, et la loi ne doit pas nécessairement être un produit relationnel. Mais un théorème de représentation, central à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, dû à Cayley et bien connu de Russell, stipule que tout groupe « abstrait » est isomorphe à un groupe de transformations<sup>2</sup>, ou encore, que tout groupe peut être fidèlement « représenté » par un groupe dont les éléments sont des transformations et dans lequel la loi interne est la composition entre transformations. Russell ne fait ici qu'exploiter ce résultat élémentaire, alors très célèbre, en en modifiant simplement la terminologie : au lieu de parler de transformations, il parle de relations (bijectives ayant pour domaine et codomaine le même ensemble  $\lambda$ ), et au lieu de parler de composition, il parle de produit relationnel. Le changement, mathématiquement sans importance, est cependant crucial, car il permet de présenter la théorie algébrique des groupes comme une extension de la logique des relations, le résultat de Cayley garantissant que la reformulation relationnelle ne nous fait pas perdre en généralité.

La manœuvre a plusieurs conséquences. Un coût d'abord. La nouvelle approche contraint Russell à introduire dès le départ une structure beaucoup plus forte que celle définie par Burali-Forti. Ayant en vue le théorème de représentation de Cayley, Russell doit caractériser la grandeur comme un groupe, non pas seulement comme un semi-groupe ordonné. Mais cette première conséquence, technique, n'est peut-être pas la plus importante<sup>3</sup>. En effet, le tour de force est ici avant tout ontologique, il est d'avoir défini les grandeurs comme des relations et l'addition quantitative comme une composition de relations. Cela paraît à première vue étrange<sup>4</sup>. Russell veut-il vraiment dire que toutes les grandeurs sont des relations ? Une masse, par exemple, semble être la propriété d'un corps. Russell prétend-il qu'une masse est en réalité une relation ? La question est ici de savoir quel degré de généralité Russell attache à

<sup>1</sup> J. Sackur (dans 2005, 174-194) instruit ce dossier et montre à quel point Russell semble « embarrassé devant le concept d'opération ». Sackur fait de la non-réductibilité de l'opération à la relation l'origine de la critique de Wittgenstein. Voir également Marion 1998.

<sup>2</sup> Cayley, 1878. Le mathématicien ne considère dans son article que les groupes finis.

<sup>3</sup> Nous verrons en particulier comment Russell et Whitehead affaiblissent en 1913 la structure algébrique introduite sur l'ensemble  $L$  des relations.

<sup>4</sup> Ce jeu entre quantités et opérations est moins original qu'on pourrait le croire. Il sous-tend en effet le calcul des opérations, développé dans par l'école algébrique anglaise au cours du XIX<sup>ème</sup>. Voir par exemple ce qu'écrit A. de Morgan 1849, 115 : « Le sujet de l'arithmétique est le *nombre* ; sa première opération est *compter* ou énumérer. (...) Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers, la direction que nous donnons en formant le symbole arithmétique  $a + b$  est « procède de  $a$ , formé en premier lieu, de la même façon que tu procèdes à partir de 0 pour former  $b$  ». Maintenant si  $a$  et  $b$  *représentent* des nombres, nous devons bien entendu penser au nombre lorsque nous faisons cela. Néanmoins la *description de l'opération* ne contient aucune idée numérique (...) C'est seulement « Fais avec  $X$  comme tu as fait avec  $Y$  pour faire  $Z$  », et tout livre d'art (*every book of art*), quel que soit son sujet, abonde de ces sortes d'instruction. Dans notre algèbre symbolique, cela se montre ainsi :  $B$  est  $0+B$ , de sorte que, dans  $A+B$ , on voit que  $A$  prend simplement la place de 0. » Pour une analyse plus fouillée de cette interaction entre quantité et opération dans l'école anglaise, voir Gandon 2009b.

sa théorie. Dans les *Principles*, comme nous le verrons bientôt, l'ambiguïté sera levée : les distances sont alors conçues comme un genre de grandeurs parmi d'autres, non relationnelles. Dans les *Principia*, au contraire, les masses seront explicitement considérées comme des relations (voir chap. 4 et 5). Dans *On the Logic of Relations*, Russell reste vague : s'il affirme explicitement que la notion de distance ne doit pas être restreinte à la grandeur géométrique, il ne maintient pas pour autant que toutes les sortes de quantités sont des distances. Rappelons cependant la critique que Russell avait adressée à la théorie de Couturat en 1897 – la quantité ne peut être caractérisée comme une propriété, même indéfinissable, elle doit être définie comme une comparaison, c'est-à-dire une relation :

Dans une quantité, considérée en isolation, il est impossible de découvrir (...) une quelconque propriété de la quantité. Une quantité est à vrai dire une expression aussi impropre pour des choses qui peuvent être quantitativement comparées qu'une ressemblance l'est pour une photographie.

Pour Russell, une quantité a alors le même genre d'être qu'une ressemblance. La nouvelle théorie logique développée dans Russell 1900b s'ajuste parfaitement à ces considérations métaphysiques, héritée de l'idéalisme : une distance se présente en effet comme une relation, non plus une propriété ou une entité indéterminée. L'idée qu'une quantité est au fond une relation, loin de paraître absurde, coïncide très exactement aux conclusions auxquelles Russell avait abouti en 1897, au terme de sa critique de Couturat. La nouvelle doctrine apparaît donc comme le pendant mathématique, qui faisait jusque là défaut, aux développements philosophiques sur la quantité. Elle est donc appelée à se substituer aux algèbres vectoriels, dont Russell avait un temps estimé qu'ils constituaient le bon cadre pour élaborer une théorie mathématique de la grandeur. La fin de la §7 de *On the Logic of Relations* vise précisément à montrer comment, en partant du concept de distance, il est possible de revenir aux vecteurs. Voyons comment.

### III.3- Grandeurs et vecteurs

Russell introduit d'abord (\*1.3), ce que je nommerai (faute de mieux) l'intervalle  $(xy)$ ,  $x$  et  $y$  appartenant à  $\lambda$ . L'intervalle  $(xy)$  désigne l'ensemble des points  $z$  de  $\lambda$  qui ont une relation « positive » à  $x$  et « négative » à  $y$ <sup>1</sup>. Russell cherche ensuite à dériver une relation d'ordre entre des intervalles à partir de la relation d'ordre entre les relations de  $L$ . À ce niveau, il commet une erreur. Nous avons vu que Russell demande, dans la définition de la distance, que le groupe de transformation agisse transitivement sur  $\lambda$ , c'est-à-dire que chaque couple dans  $\lambda$  soit relié par au moins une relation de  $L$ . L'unicité n'est officiellement pas requise. Dit autrement, le groupe  $L$  n'est pas censé agir simplement, mais seulement transitivement<sup>2</sup> sur  $\lambda$ . Or, dans les démonstrations qui suivent la définition des intervalles, Russell fait comme si chaque couple dans  $\lambda$  était relié à une seule relation de  $L$ . Ainsi, après avoir posé que :

$$(x, y)KR \text{ ssi } xRy,$$

Russell définit l'égalité et la relation « < » entre intervalles ainsi :

$$(xy)=(zw) \text{ ssi } (x, y)KK^{-1}(z, w). \\ (xy)<(zw) \text{ ssi } (x, y)KQK^{-1}(z, w).$$

<sup>1</sup> Si  $\text{Id}_\lambda$  représente la transformation identité sur  $\lambda$ ,  $(xy) = \{z \in \lambda \mid \exists R_1 \in L, R_1 Q \text{Id}_\lambda, x R_1 z \wedge \exists R_2 \in L, \text{Id}_\lambda Q R_2, z R_2 y\}$

<sup>2</sup> Un groupe agit transitivement sur un ensemble si deux éléments  $x, y$  quelconques de cet ensemble sont tels qu'il existe au moins une opération  $g$  du groupe telle que  $g.x = y$ . Un groupe agit simplement sur un ensemble si deux éléments  $x, y$  quelconques de cet ensemble sont tels qu'il existe au plus une opération  $g$  du groupe telle que  $g.x = y$ . Un groupe agit régulièrement sur un ensemble ssi il agit simplement et transitivement sur cet ensemble.

La relation «  $<$  » est-elle une relation d'ordre ? Est-elle asymétrique ? A priori, rien ne permet de l'affirmer. Il se pourrait que  $(x, y)KR_1$ ,  $(x, y)KR_2$ , et que  $(z, w)KS$ , avec  $R_1QS$  et  $SQR_2$ . Dans ce cas, on aurait bien  $(xy)<(zw)$ , puisque  $R_1QS$ , mais on aurait également  $(zw)<(xy)$ , puisque  $SQR_2$ . Si  $x$  et  $y$  sont liés par plus d'une relation de  $L$ , alors ce qu'affirme Russell peut se révéler faux<sup>1</sup>. Nous admettrons donc, comme semble le faire Russell lui-même dans la suite, que l'action de  $L$  sur  $\lambda$  est régulière (transitive et simple)<sup>2</sup>. La relation «  $<$  » sur les intervalles est alors une relation d'ordre, qui, de plus, est dense. Russell dérive ensuite une relation d'ordre sur  $\lambda$ , en posant :  $zPy = (yz)KQId_\lambda$ <sup>3</sup>. Il montre que  $P$  est compatible avec  $<$ , au sens où  $yPz \Leftrightarrow \forall x(xy)<(xz)$ . Imaginons que  $\lambda$  soit l'ensemble des points de la droite euclidienne orientée, alors «  $yPz$  » peut se lire «  $y$  vient après  $z$  », et «  $(xy)<(xz)$  » peut se lire « l'intervalle entre  $x$  et  $y$  est plus petit que l'intervalle entre  $x$  et  $z$  ».

Parvenu à ce stade, Russell (et c'est le point crucial) revient au produit relatif entre éléments du groupe  $L$ , et introduit une notation qui s'apparente à celle du calcul vectoriel utilisée dans les années 1898-99. Russell note  $RR$ ,  $R^2$ . Et il généralise :  $R^n$  est le produit  $n$  fois itérées de  $R$  par elle-même. On a ainsi  $R^m R^n = R^{m+n}$ . De plus, Russell pose (\*3.5), toujours avec  $m$  et  $n$  entiers :

$$xR^{m/n}y = xSy \text{ ssi } R^m = S^n.$$

Cette définition jouera un rôle crucial dans les *Principia* (voir chap. 4). Le lien avec la notion de rapport euclidien est évident. Chez Euclide, deux segments  $R$  et  $S$  ont le rapport  $m/n$  ssi, partant d'un point quelconque,  $m$  pas de longueur  $R$  nous amènent exactement au même point que  $n$  pas de longueur  $S$ . Russell ne fait ici que substituer à la notion de grandeur le concept de distance relationnelle. Cette notation avec exposant est utilisée pour introduire des coefficients devant les intervalles. Russell pose ainsi que,  $n$  étant un entier quelconque, et  $x, y$  des éléments de  $\lambda$  tels que  $xRy$ , avec  $R \in \lambda$  :

$$zR^n w \text{ ssi } (zw) = n(xy),$$

et il en dérive que (\*3.4):

$$(xRy \wedge xR^m z \wedge zR^n w) \Rightarrow ((xw) = (m+n)(xy)),$$

puis que (\*3.51) :

$$(xRy \wedge xR^{m/n} z) \Rightarrow ((xz) = m/n (xy)).$$

Russell n'en reste pas là, puisqu'il introduit des coefficients réels. Pour ce faire, Russell assume que la structure distance satisfait au postulat d'Archimède et au postulat de linéarité, à savoir que :

<sup>1</sup> Soulignons que le fait que le groupe soit commutatif, ordonné, dense, et qu'il agisse transitivement sur  $\lambda$ , n'implique pas qu'une seule relation lie deux éléments quelconques du domaine de base. Prenons comme ensemble  $\lambda$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, et comme ensemble  $L$  le groupe ordonné des rotations, de centre  $O$ . Ce groupe est isomorphe à  $(\mathbb{R}, <, +)$ , il est donc dense et archimédien. De plus, il agit transitivement sur  $\lambda$ . Mais il n'opère pas régulièrement, car toutes les rotations d'angle un multiple de  $2\pi$  laissent invariants tous les points de  $\lambda$ .

<sup>2</sup> De fait, dans les *Principles*, l'existence mais aussi l'unicité sont explicitement requises. Voir notamment 1903, 180 : « Par un genre de distance, j'entendrai un ensemble de relations quantitative asymétriques telles qu'une et seulement une lie une paire quelconque de termes d'un ensemble donné. »

<sup>3</sup> Russell écrit  $(yz)QI'_\lambda$ , ce qui ne veut strictement rien dire, puisque  $Q$  est une relation entre des éléments de  $L$ , et non entre des segments. On comprend ici les réactions agacées de Whitehead à la lecture des textes de Russell.

- 1)  $\forall R, R \in L, \exists n \in \mathbb{N}, R^n > R'$
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \lambda, \exists z \in \lambda, n(xz) = (xy)$

Russell définit ensuite  $\theta(xy)$  comme l'ensemble des  $(xz)$ , tels que  $(xz) < (xy)$ .

Puis il formule sa définition centrale \*4.4, dont l'intelligibilité est rendue difficile par ce qui semble être des coquilles<sup>1</sup>.  $U$  étant une classe de rationnels,  $\theta U$  est d'abord caractérisé comme étant l'ensemble des rationnels  $r$  inférieurs à un membre de  $U$  ; c'est ce que Russell, suivant Peano et Burali-Forti, nomme segment de rationnels (c'est le premier élément d'une coupure de Dedekind). Russell cherche alors, en posant  $u = \theta U$ , à définir  $xR^u y$ . La définition s'effectue en deux parties :

- $\forall z \in \lambda, \forall p \in \theta U, xR^p y \Rightarrow (xz) < (xy)$
- $\forall p \in U, \forall q \in \mathbb{Q}, (p < q \wedge xR^q z) \Rightarrow (xy) < (xz)$

La première partie dit que,  $R$  étant la distance unité, si  $x$  est lié à un point  $z$  par une distance appartenant à  $\theta U$ , alors la distance  $(xz)$  est plus petite que  $(xy)$  ; la seconde dit que si  $x$  est lié à un point  $z$  par une distance  $q$  plus grande que toutes celles contenues dans  $U$ , alors la distance  $(xz)$  est plus grande que la distance  $(xy)$ . L'élément  $x$  étant fixé, l'existence et l'unicité de  $y$  suit des conditions posées sur la distance (notamment du postulat d'Archimède et de linéarité).

Complétant la démarche de Russell, il serait aisé, en fixant arbitrairement un élément origine dans  $\lambda$ , d'introduire une structure de groupe sur l'ensemble des intervalles en question. On pourrait alors montrer que, les coefficients rationnels étant définis comme ils le sont ici, cette introduction équivaut à la définition d'un espace vectoriel sur le corps des rationnels (ou des réels)<sup>2</sup>. Le jeu sur les exposants des relations et les coefficients des intervalles nous permet ainsi de retrouver la distinction familière dans le calcul vectoriel entre scalaire d'une part, et (pour reprendre la terminologie alors en vogue) « extraordinaire » de l'autre. Pour le dire de façon simple, si nous considérons  $(xy)$  comme le vecteur unité, alors  $(xz) = r(xy)$  signifie que  $(xz)$  mesure  $r$  pour l'unité  $(xy)$ , ou encore que la quantité associée au vecteur  $(xy)$  est  $r$ . Réapparaît ici la distinction entre quantité (le «  $r$  ») et qualité (l'unité vectorielle  $(xy)$ ).

Dans ses textes « expérimentaux » de 1898-99, Russell, on l'a vu, fondait sa théorie mathématique de la quantité sur les algèbres grassmanniennes. Mais le schématisme vectoriel s'ajustait mal avec les considérations métaphysiques et ontologiques développées par ailleurs, puisque aucune place n'était faite à la notion de relation. Le manuscrit de 1900 représente de ce point de vue un véritable tour de force. Non seulement Russell réussit à développer une théorie mathématique purement relationnelle de la grandeur, mais mieux : il montre comment, à partir de cette doctrine, considérée comme ontologiquement première, il est possible d'engendrer les notations vectorielles plus familières. L'ancien point de départ, la juxtaposition scalaire-vecteur (quantité-qualité), n'apparaît plus que comme une forme notationnelle superficielle, derrière laquelle se dissimule le schéma logique plus profond des relations et des produits relationnels. Dans le nouveau cadre, les scalaires apparaissent d'abord comme exposants relationnels. La force de la nouvelle théorie est donc double. Elle installe la relation au cœur de la théorie mathématique des quantités, et comble par là l'écart

<sup>1</sup> Il y a plusieurs coquilles dans la définition. Russell met un  $R$  majuscule à la place d'un  $r$  minuscule dans le premier antécédent, puis distingue deux lettres,  $r$  et  $p$ , là où une aurait convenu dans la première partie de la définition.

<sup>2</sup> Soient  $(xy)$  et  $(xz)$  deux intervalles d'extrémité  $x$  quelconque ; on peut facilement montrer qu'il existe un intervalle  $(yw) = (xz)$ , et on s'en sert pour définir  $(xy) + (xz) = (xw)$ . L'addition ainsi introduite est une loi de groupe commutatif sur l'ensemble des intervalles d'extrémité  $x$ . On vérifie ensuite que ( $r$  et  $s$  étant des rationnels ou des réels)  $0(xy) = (xx)$ ,  $r(xy) + (xw) = r(xy) + r(xw)$ , et que  $r(s(xy)) = (rs)(xy)$ .

qui s'était ouvert en 1898-1899 entre l'analyse logique et la discussion métaphysique. Mais la beauté de la chose est que la manœuvre ne fait rien perdre : les schématismes vectoriels réapparaissent comme des formations dérivées d'une machinerie relationnelle plus fondamentale et plus générale. Point de départ en 1898, les algèbres grassmanniennes sont conçues en 1900 comme l'aboutissement d'un processus tout entier fondé sur la logique des relations<sup>1</sup>.

## Conclusion

Reprenons, pour conclure, le fil de notre histoire. En 1897, Russell s'approprie une conception idéaliste, post-hégélienne, de la grandeur, selon laquelle la « vérité » de la quantité et de la qualité est la mesure. La double position d'une variation et d'une identité que requiert le concept de *magnitude* ne s'effectue qu'à partir d'un terme plus général : la catégorie relationnelle de la comparaison. Russell combine, en 1898-1899, cette ligne de pensée, issue d'une tradition métaphysique séculaire, à l'analyse des algèbres grassmanniennes, découvertes à l'occasion de la lecture de *A Treatise on Universal Algebra*, écrit par son ancien professeur A. N. Whitehead. Le calcul positionnel se présente comme un dépassement inabouti de l'opposition entre qualité et quantité. D'un côté, en effet, le symbolisme vectoriel juxtapose et fige ce qu'il faudrait articuler : une « quantité » scalaire et une « qualité » vectorielle ; de l'autre, le formalisme grassmannien rend compte de façon très élégante de l'articulation dialectique entre quantité et qualité : il se présente, selon Russell, comme un calcul général sur les séries et les séries de séries. La question, que ces développements appellent et ne règlent pas, est celle de l'adéquation entre le discours philosophique et le formalisme mathématique. Russell affirme d'une part que la grandeur est en son fond une catégorie relationnelle ; il prétend d'autre part que la grandeur est une série, c'est-à-dire alors, la combinaison d'un « extraordinaire » et d'un nombre variable. Comment concilier les deux thèses ? L'élaboration de la théorie des relations ne fait qu'aviver la tension, car une telle construction fournit le cadre, conceptuel et notationnel, permettant de penser les séries de façon relationnelle. Théorie relationnelle de la grandeur et développement algébrique sur les vecteurs ne s'opposent plus seulement comme une approche philosophique et mathématique du même concept – l'opposition envahit désormais le terrain de la logique, rendant plus pressante encore l'élaboration d'une doctrine unitaire de la grandeur mesurable. Les grandes lignes de la solution proposée par Russell, exposée dans son 1900b, sont les suivantes : les grandeurs sont des relations, plus exactement des transformations définies sur le même domaine, qui forment un groupe abélien dense pour l'opération produit relationnel. Russell montre que cette définition permet de « dériver » le schématisme vectoriel de Whitehead : les vecteurs sont des relations, et les additions vectorielles des produits relationnels. La notation vectorielle n'est plus présentée comme une donnée première, qui saisirait directement la structure conceptuelle sous-jacente. Elle est dérivée d'un symbolisme plus fondamental, tout entier articulé autour de la relation et du produit relationnel.

Si j'ai pris le temps d'exposer ce qui pourrait sembler n'être que des détails techniques, c'est pour deux raisons. Les premières tentatives de Russell paraissent illustrer de façon exemplaire une exigence qui demeurera constante jusqu'au *Principia* : il ne faut pas séparer théorie mathématique et doctrine métaphysique de la quantité. Cela signifie deux choses. Une discussion métaphysique qui ne permet de déboucher sur aucune formalisation de la notion n'est pas considérée par Russell comme satisfaisante. Inversement, une théorie mathématique

---

<sup>1</sup> La manœuvre de Russell ressemble, à certains égards, à celle qu'il propose dans *On Denoting* (1905). Dans le nouveau cadre, il est possible de considérer les scalaires et les vecteurs de Whitehead comme des sortes de symboles incomplets – comme des parties non autonomes du nom *R*<sup>n</sup>. Pour plus sur l'importance qu'a chez Russell la distinction entre forme apparente et forme profonde, voir chap. 5.



qui incorpore des présupposés métaphysiquement contestables doit être amendée. Le premier point n'est pas très original. Que la discussion philosophique d'un concept aussi technique que la quantité doive être articulée à une analyse des pratiques mathématiques n'est contestée par personne. Le second est plus singulier : que des considérations métaphysiques puissent et doivent servir de normes dans l'évaluation de théories mathématiques fait immédiatement débat. Or l'abandon des algèbres vectorielles au profit d'une théorie purement relationnelle de la distance repose, chez Russell, avant tout sur la discussion des thèses de Couturat, c'est-à-dire sur des raisons « métaphysiques ». L'analyse philosophique, dans sa dimension la plus traditionnelle (en l'occurrence, la discussion des apories liées à la quantité), peut ainsi servir, chez Russell, à évaluer la valeur d'un développement mathématique. Je reviendrai sur ce point important dans ma conclusion générale.

La seconde raison qui m'a conduit à développer en détail les premières constructions russelliennes est que l'on y trouve les grandes lignes des théorisations ultérieures. Mieux : l'ignorance de ces premières tentatives, notamment de Russell 1900b, compromet sérieusement la possibilité d'accéder au sens des travaux ultérieurs. En effet, dans les *Principles*, le philosophe, comme nous le verrons, utilise abondamment la théorie de la distance mise au point en 1900. Mais il ne la présente qu'en de très rares occasions, et lorsqu'il le fait, l'usage du langage ordinaire interdit de saisir de quoi il est véritablement question. Seule la présentation symbolique, plus ramassée du manuscrit *On the Logic of Relation*, permet d'explicitier le contenu de la notion et d'en mesurer la force. Dans les *Principia*, une théorie générale des familles de vecteurs, nouveau nom de la grandeur, est élaborée. Si l'usage de la langue vernaculaire ne fait pas ici obstacle au sens, la notion de famille de vecteurs est beaucoup plus générale, et partant beaucoup moins transparente, que celle de distance. Ces premières réflexions sur la quantité, loin de constituer des tentatives sans lendemain, sont en réalité la clé pour comprendre l'ensemble de la théorie russellienne de la grandeur.

**APPENDICE : le texte des trois sections du manuscrit anglais supprimées dans *Sur la logique des relations***









## Chapitre 2

### Quantités, grandeurs et genres de grandeurs dans les *Principles*.

#### Introduction

Les *Principles* constitue le seul moment dans le parcours russellien, où la notion de quantité est abordée dans toutes ses dimensions, mathématiques, métaphysiques, épistémologiques. On ne retrouve une telle exhaustivité ni dans les premiers textes, ni dans les *Principia*. C'est surtout dans le livre III et dans les chapitres sur la géométrie métrique du livre VI que le sujet est traité ; mais des remarques importantes sont disséminées un peu partout dans l'ouvrage. Étant donnée son importance, je consacrerai deux chapitres à l'examen du *corpus*. Ma thèse est que Russell a, à l'époque, une véritable doctrine de la quantité, unifiée et systématique. Il s'agit bien là d'une thèse, car la cohérence et l'unité de l'exposition russellienne est loin d'être apparente à première vue. Sans doute faut-il voir dans cette désorganisation de façade la conséquence de l'éparpillement des textes : Russell développe tel aspect de sa théorie dans la partie III, et ne parle de tel autre aspect que dans la partie VI ou dans une remarque marginale de la partie IV ou V. Quoi qu'il en soit, une systématisme doctrinale existe bel et bien, et mon but, dans les deux chapitres qui suivent est de la mettre en évidence.

Deux questions structurent la réflexion russellienne : celle de la nature des grandeurs, d'une part, celle de la nature des grandeurs mesurables, de l'autre (toutes les grandeurs ne sont pas, on le verra, mesurables). Je vais consacrer ce chapitre à l'étude du premier problème, et réserver la seconde au chapitre suivant. Concernant la nature des grandeurs, une double distinction gouverne la pensée russellienne. Russell défend d'abord une conception absolutiste des grandeurs selon laquelle les grandeurs ne se réduisent pas aux quantités ; il maintient d'autre part (le point est moins connu) que le rapport entre les grandeurs au genre auquel elles appartiennent possède une forme logique tout à fait singulière, « *sui generis* », non réductible aux formes prédicatives ou relationnelles. Je défendrai dans ce chapitre que les deux distinctions (entre quantités et grandeurs d'une part, entre grandeurs et genres de grandeurs de l'autre) sont liées et doivent donc étudiées simultanément.

Je commencerai par une première visite des principales thèses qui sous-tendent l'ensemble de la conception russellienne de la quantité, telle qu'elle est exposée dans la partie III des *Principles*. Les textes sont difficiles et peu commentés, il convient donc de les présenter de la façon la plus neutre et la plus simple possible avant d'entrer dans le vif du sujet et d'enrichir progressivement le propos. La seconde section sera consacrée à la distinction entre grandeur et quantité. Je défendrai d'abord l'idée que, si Russell soutient une position absolutiste, c'est parce que cette position lui paraît plus à même de faire ressortir la singularité logique du rapport entre grandeurs et genres. J'élargirai ensuite la perspective, en montrant que le problème de la forme logique du rapport grandeur / genre a une très longue histoire et qu'il refait surface, sous la forme d'une théorie des *determinables* et des *determinates*, chez Johnson, un collègue de Russell à Cambridge, au début des années vingt – sans doute également chez le Wittgenstein de la période intermédiaire.

#### I. La théorie de la grandeur dans la partie III des *Principles*

Le but de cette section est de familiariser le lecteur à la doctrine russellienne. J'indiquerai et articulerai entre elles les principales idées développées par Russell, sans entrer dans le détail des questions, mais en tentant de ne négliger aucun aspect. Je reviendrai dans les autres sections de ce chapitre et dans le chapitre suivant sur les distinctions ici mises en place.

## I.1 : Grandeur et relation d'ordre

Au début du chapitre XIX, introductif à la partie III des *Principles* intitulée « Quantité », Russell écrit (159) :

En fixant la signification d'un terme comme *quantité* ou *grandeur*, on se trouve confronté à cette difficulté, que, de quelque façon qu'on définisse le mot, on est apparemment obligé de s'écarter de l'usage. Cette difficulté surgit à chaque fois que deux caractéristiques, habituellement supposées inséparables, se révèlent, à la suite d'un examen plus approfondi, susceptibles d'exister séparément. Dans le cas de la grandeur, la signification usuelle semble impliquer (1) une disposition à avoir des relations de *plus grand* et de *plus petit*, (2) la divisibilité. De ces caractéristiques, la première est supposée impliquer la seconde. Mais comme je propose de rejeter l'implication, je dois admettre ou bien que certaines choses qui sont indivisibles sont des grandeurs, ou bien que certaines choses qui sont plus grandes ou plus petites que d'autres ne sont pas des grandeurs. Comme l'un de ces deux écarts par rapport à l'usage est inévitable, j'opterai pour le premier, qui je crois est le moins grave. Une grandeur sera donc définie comme tout ce qui est plus grand ou plus petit que quelque chose d'autre.

Nous avons vu au chapitre précédent que deux éléments définissaient ordinairement la grandeur : la comparabilité d'une part, l'additivité (ou la divisibilité), d'autre part. Une quantité est en effet usuellement dite plus grande ou plus petite qu'une autre quantité du même genre – en cela, elle est comparable aux autres quantités du même genre. Mais une quantité peut également se décomposer en plusieurs autres quantités du même genre, ou au contraire s'ajouter à d'autres pour engendrer une nouvelle quantité du même genre – en cela, les grandeurs sont additives (ou divisibles). Dans l'extrait cité, Russell affirme vouloir rompre avec cette définition, pour tenir compte du fait que les deux constituants du concept de grandeur sont indépendants l'un de l'autre. Il peut, souligne-t-il, y avoir des choses comparables qui ne sont pas divisibles, et inversement, des entités divisibles non comparables. Et, parce que le premier cas lui paraît plus important que le second, le philosophe définit la grandeur par la seule comparabilité ordinale. La divisibilité n'est donc pas, affirme Russell, une propriété définitionnelle de la quantité. La rupture annoncée est en réalité plus rhétorique que réelle. On l'a vu, dans la conception traditionnelle de la quantité, les quantités non divisibles mais comparables les unes aux autres sont appelées « intensives », et distinguer des autres sortes de quantités divisibles, nommées « extensives ». Russell ne ferait donc ici que modifier à la marge la terminologie<sup>1</sup>. En faisant apparaître la grandeur extensive comme un cas particulier d'une structure plus vaste, ce changement modifie malgré tout le centre de gravité de la théorie (sur cette modification, voir *infra*. sur Michell et chapitre 3 sur Meinong). Russell n'insiste toutefois pas beaucoup sur ce dernier point. Il aborde en effet, à la suite du passage cité plus haut, un autre sujet : celui de la nature de la comparabilité propre aux grandeurs. Deux grandeurs du même genre, en plus de pouvoir être plus grandes ou plus petites, sont-elles aussi susceptibles d'être égales ?

On pourrait penser que l'égalité devrait être mentionnée, en même temps que plus grand et plus petit, dans la définition de la grandeur. Nous verrons toutefois qu'il y a des raisons de penser que – aussi paradoxale que cette vue puisse apparaître – ce qui peut être plus grand ou plus petit qu'un terme ne peut jamais être égal à aucun terme, quel qu'il soit, et *vice versa*. Mais il faudra pour cela faire une distinction, dont la nécessité deviendra de plus en plus évidente au fur et à mesure que nous avancerons, entre le genre des termes qui peuvent être égaux, et le genre de ceux qui peuvent être plus grands ou plus petits. J'appellerai les premiers des *quantités*, et les

---

<sup>1</sup> Russell reprend la terminologie « intensif » / « extensif » au §171 (182-183).



seconds des *grandeurs*. Une règle de mesure réelle est une quantité : sa longueur est une grandeur. Les grandeurs sont quelque chose de plus abstrait que les quantités : lorsque deux quantités sont égales, elles ont la *même* grandeur.

Russell établit ici une distinction, fondamentale dans sa théorie, entre quantité et grandeur. Les quantités sont des objets particuliers, spatio-temporellement identifiés (le plus souvent, voir *infra.*), qui peuvent être égales ou inégales. Les grandeurs sont en revanche des propriétés ou des concepts, possédés par ces quantités ; à la différence des quantités, elles ne peuvent pas être égales entre elles. De plus, l'ordre entre quantités est induit par l'ordre entre les grandeurs : deux quantités égales le sont parce qu'elles possèdent la même grandeur ; une quantité est plus petite qu'une autre parce que la grandeur qu'elle possède est plus petite que la grandeur possédée par l'autre.

La question que soulève Russell, et à laquelle il répond dans la suite du chapitre, est la suivante : est-il nécessaire d'introduire des grandeurs, en plus des quantités ? Ne devrait-on se passer des premières, et ne retenir que les secondes ? Au lieu d'induire l'ordre entre les quantités à partir de l'ordre entre les grandeurs, ne pourrait-on pas faire l'inverse ? Le problème est, d'un point de vue logique, le même que celui posé dans la le chap. XI des *Principles* à propos des nombres entiers. La relation d'équinuméricité (« *similarity* ») entre classes est une relation d'équivalence, qui permet de définir les entiers comme des classes d'équivalence. Pourquoi ne pas utiliser la relation d'égalité entre quantités de la même manière et définir les grandeurs comme des classes de quantités égales ? Russell envisage, et rejette une telle solution. Contre une conception « relativiste », il soutient une approche « absolutiste » de la grandeur : les quantités sont égales entre elles parce qu'elles ont toutes une même grandeur ; non l'inverse. Nous aurons à comprendre pourquoi il en est ainsi.

Un troisième élément doit être mentionné. Les grandeurs se distribuent, selon Russell, en différents genres (« *kinds of magnitude* ») à l'intérieur desquels s'effectuent les comparaisons. Un même objet peut tomber sous plusieurs genres ; une corde donnée a, par exemple, une longueur et une masse. Mais une grandeur n'a nécessairement qu'un genre : une longueur n'a pas de masse, et inversement, une masse n'a pas de longueur. Il est important de réaliser que ces « *kinds of magnitude* » sont extrêmement divers et hétérogènes entre eux. Russell parle de la longueur, de l'aire, du volume, de l'angle – mais aussi de la luminosité, du prix, du plaisir, de la souffrance, de la ressemblance, etc... La grandeur ne relève pas des seules mathématiques. Comme il l'explique au début du chapitre XX, « la forme comparative en grammaire est *prima facie* signe de quantité » (171) : il suffit de parler d'un rouge « plus rouge » qu'un autre, pour que le rouge puisse être défini comme un genre de grandeur.

Arrêtons-nous un instant sur cette structuration du champ de la grandeur. Elle ne va pas de soi. Prenons l'exemple du plaisir. A-t-on vraiment affaire ici à un genre ? Ou bien doit-on distinguer, comme Mill le soutenait, différents genres de plaisir, entre lesquels toute comparaison quantitative serait impossible<sup>1</sup> ? Cette question rejoint celle, évoquée dans le chap. 1, concernant la nature de la comparaison quantitative. Doit-on considérer que c'est la comparaison qui « crée » le genre (la qualité invariante, qui sert de support à la comparaison quantitative), ou bien au contraire, que le genre préexiste et que la comparaison quantitative ne peut s'effectuer qu'à l'intérieur d'un genre déjà donné ? Dans les *Principles*, c'est une forme de « réalisme » des genres qui prévaut. Le monde apparaît comme structuré en

---

<sup>1</sup> La distinction entre différents genres de plaisir est la clé de voûte de la critique que Mill adresse à Bentham. La discussion est très connue au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Voir notamment Moore 1903, §46-48. Russell fait allusion à ce débat à la fin du chapitre XX (Russell 1903, 174) : « Revenons (...) à la célèbre proposition de Bentham : « les quantités de plaisir étant égales, le tricot vaut autant que la poésie ». Ici, la différence qualitative entre les plaisirs est le sujet même du jugement ; mais, afin de pouvoir dire que les quantités de plaisir sont égales, il faut pouvoir faire abstraction des différences qualitatives, et accorder une certaine grandeur au plaisir. Si cette abstraction est légitime, la différence qualitative ne doit pas véritablement être une différence de qualité, mais seulement une différence de relations à d'autres termes, comme, dans le cas présent, une différence dans la relation causale. »

différents types de grandeurs, séparés les uns des autres, et formant chacun un ordre total strict ; toute comparaison qui transgresserait la barrière générique est rejeté comme étant une absurdité<sup>1</sup>. La « dialectique de la grandeur », importante pour Russell dans les années 1897-1900, semble donc, à première vue, abandonnée<sup>2</sup>. L'image qui sous-tend tout l'effort théorique est très clairement celle d'un espace où les grandeurs se répartissent en ensembles disjoints et indépendants les uns par rapport aux autres.

Connectant les notions de quantité, de grandeur, de genre, un principe important est formulé toujours au chapitre XIX (167) :

On doit donc admettre comme un axiome (comme dans le cas des couleurs) que deux grandeurs du même genre ne peuvent coexister en un même endroit spatio-temporel, ou subsister comme relations entre la même paire de termes ; et ceci fournit l'unicité requise pour la grandeur.

Si une même corde peut mesurer trois mètres et peser un kilo, elle ne peut pas en même temps mesurer un et trois mètres. La notion de genre de grandeur joue, *via* ce principe d'incompatibilité, un rôle fondamental dans nos raisonnements. Russell va ainsi jusqu'à suggérer que « ce sont de tels jugements synthétiques d'incompatibilité qui conduisent aux jugements négatifs » (167). Notons que l'axiome ne porte pas sur la relation, binaire, entre genres et grandeurs, mais sur la relation ternaire entre genres, grandeurs et quantités. Ce qu'il faut exclure, c'est la possibilité pour une *quantité* d'instancier deux *grandeurs* différentes appartenant à un même *genre*.

Résumons sur un schéma ce que nous avons appris :

<b>Genre</b>	<b>A,</b>	<b>B, ...</b>
<b>Grandeur</b>	Les éléments $a_1, a_2, \dots$ de <b>A</b> strictement ordonnés entre eux.	Les éléments $b_1, b_2, \dots$ de <b>B</b> strictement ordonnés entre eux
<b>Quantité</b>	Les éléments $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots$ « concrets » qui ont une même grandeur $a_i$	Les éléments $\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots$ « concrets » qui ont une même grandeur $b_i$

Russell distingue différents genres de grandeurs (**A**, **B**, ...); ces genres contiennent des grandeurs (des concepts) strictement ordonnés entre eux ( $a_1, a_2, \dots$ ;  $b_1, b_2, \dots$ ); à chaque grandeur particulière est associée les objets concrets ( $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots$ ;  $\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots$ ). Les grandeurs constituent donc un niveau intermédiaire entre les quantités particulières et les genres dont elles sont des instances. Une grandeur ne peut pas appartenir à des genres différents. Une quantité peut, elle, avoir différentes grandeurs, à condition que ces grandeurs appartiennent à des genres différents.

## I.2 : Divisibilité et indivisibilité

Comme nous aurons l'occasion de le voir au chapitre 3, la notion russellienne de divisibilité pose de nombreux problèmes. Je vais ici effectuer un premier survol du concept en faisant

<sup>1</sup> Levine 1998 (117-119) note que l'ontologie russellienne, dans la période 1898-1900 (qui précède la rencontre avec Peano mais où le philosophe est sous l'influence du platonisme de Moore), divise l'« être » en diverses séries fondamentales indépendantes les unes des autres (espace, temps, nombre, divers genres de grandeurs, etc...).

<sup>2</sup> La conception idéaliste du rapport quantité / qualité influence considérablement la façon dont Russell conçoit le rapport entre grandeur et genre de grandeur. Voir *infra*.

deux mises au point : la première concerne la thèse selon laquelle les grandeurs sont indivisibles ; la seconde porte sur le rapport entre divisibilité et théorie des tous et des parties. Cet examen nous permettra à la fois de cerner de façon plus précise l'idée centrale selon laquelle les grandeurs sont définies par la comparabilité et de nous familiariser avec certaines questions et notions difficiles qui reviendront par la suite.

### 1) L'indivisibilité des grandeurs :

Russell ne se contente pas de soutenir que la divisibilité n'est pas un constituant de la grandeur, il maintient que, toute grandeur, quel que soit son genre, est simple et indivisible. Ainsi (173) :

Toutes les grandeurs passées jusqu'ici en revue ont été, à strictement parler, indivisibles. Dès lors, la question se pose : n'y a-t-il aucune grandeur divisible ? Ici, une distinction doit être faite. Une grandeur est essentiellement une, non plusieurs. En conséquence, aucune grandeur ne peut être correctement exprimée comme un nombre de termes. Mais la quantité qui a de la grandeur ne peut-elle pas être une somme de parties, et la grandeur une grandeur de divisibilité ? Si tel est le cas, chaque tout consistant en parties sera un terme unique possédant la propriété de divisibilité. (...) Mais, bien que le tout qui a de la divisibilité soit évidemment divisible, sa divisibilité, qui est rigoureusement la seule chose qui soit une grandeur, n'est pas à proprement parler divisible. La divisibilité ne consiste pas elle-même en parties, mais seulement en la propriété d'avoir des parties. Afin d'obtenir de la divisibilité, il est absolument nécessaire de concevoir le tout comme un *un*, et de considérer la divisibilité comme son adjectif. En conséquence, bien que dans ce cas nous ayons une mesure numérique et toutes les conséquences mathématiques de la division, cependant, d'un point de vue philosophique, notre grandeur reste toujours indivisible.

Bien des choses ne sont pas claires dans ce passage, mais l'idée générale est facile à saisir : aucune grandeur n'est divisible. Même les grandeurs extensives, que Russell appelle ici les « grandeurs de divisibilité » (sur ce point, voir *infra*.), ne sont pas divisibles. Ce qui peut, dans certaines circonstances, être divisée, ce sont les quantités qui ont les grandeurs. Ainsi, il est possible de couper en deux parties égales une corde donnée ; mais il n'est pas possible de diviser la longueur elle-même, ou « la propriété d'avoir des parties ». La distinction entre quantité et grandeur conduit donc Russell à réserver la possibilité de la division à la seule quantité, et à maintenir que les grandeurs sont essentiellement simples. Russell ne soutient pas seulement que la divisibilité n'est pas un critère définitionnel de la grandeur ; il affirme, plus radicalement, que la grandeur est par essence indivisible – que c'est seulement la quantité qui, dans certaines circonstances, peut être divisée.

### 2) La divisibilité des totalités :

Que veut dire exactement « être divisible » ? Dans les *Principles*, la notion de divisibilité a rapport à la doctrine du tout et des parties. Au chapitre 16, trois sortes de relation entre partie et tout sont distinguées. Les deux premières sont liées à la notion de classe ou d'agrégat. Russell reprend en effet la distinction, initialement faite par Peano, entre éléments (appelé « termes »<sup>1</sup>) et sous-ensembles (appelés « parties ») d'une classe<sup>2</sup>. Dans les deux cas, une relation entre « partie » et « tout » est présente, mais elle est différente à chaque fois. En plus des agrégats, il existe un autre genre de totalités, les « unités », qui sont « toujours des propositions », et que l'on ne peut pas définir simplement comme la collection de leurs éléments (les éléments des unités sont appelés « constituants »). Cette dernière sorte de tout exhibe une unité bien plus forte et résistante que les agrégats : si les unités sont divisibles, les entités qui résultent de leurs divisions ne permettent pas de les recomposer. L'analyse du tout

---

<sup>1</sup> Russell 1903, 143.

<sup>2</sup> *Ibid.*, 138-139.

en ses parties nous fait ici perdre quelque chose. En quel sens Russell parle-t-il de divisibilité, lorsqu'il dénie que les grandeurs sont divisibles ? Le concept d'unité ne joue aucun rôle dans la question qui nous occupe. Comme nous l'avons vu, si les grandeurs ne sont pas divisibles, ce n'est pas parce qu'elles sont des unités complexes, mais parce qu'elles sont simples. Et à l'inverse, les quantités divisibles ne sont jamais conçues comme des unités, mais toujours comme des agrégats. C'est donc toujours de la division d'agrégat qu'il est question dans la partie III des *Principles*. Russell, lorsqu'il parle de la division des tous quantitatifs, parle-t-il toutefois de la division en termes ou de la division en parties ?

A ce stade, une distinction doit être faite. Quand un tout a un nombre fini de termes, Russell affirme que la division est une division en « termes »<sup>1</sup>. Ainsi, si une partie de  $m$  termes est considérée dans une totalité de  $n$  termes (avec  $m < n$ ), elle représentera une fraction  $m/n$  de la totalité<sup>2</sup>. Mais lorsque un agrégat a un nombre infini d'éléments, il n'est plus possible de raisonner de la même manière, car, rappelle Russell, Cantor a montré que les parties propres peuvent alors avoir le même nombre de termes que l'ensemble considéré (151). Dans ce cas, c'est seulement la division en sous-ensembles, non la division « complète », qui est pertinente. À la totalité ainsi divisée en parties, est attachée, affirme Russell, un genre de grandeur nommée « grandeur de divisibilité » (c'est la notion utilisée par Russell dans le passage cité *supra*). Reprenons l'exemple donné par le philosophe lorsqu'il introduit le concept à la fin de la partie II (151) :

Dire que  $A$  est une moitié de  $B$  veut dire :  $B$  est un tout, et si  $B$  est divisé en deux parties similaires qui ont la même grandeur de divisibilité l'une avec l'autre, alors  $A$  a la même grandeur de divisibilité que chacune de ces parties.

Ce qui importe ici, ce n'est pas le nombre d'éléments de  $A$  et de  $B$  (car  $A$  et  $B$  étant similaires, ils en ont le même nombre), mais autre chose : le nombre et/ou la taille des « parties » de  $A$  et de  $B$ . Mais comment décompte-t-on ces parties ? Comment les mesure-t-on ? Et de quelle famille de sous-ensembles de  $A$  et de  $B$  Russell parle-t-il exactement ? Comme nous le verrons dans le chapitre 3, Russell ne fournit que très peu d'explications sur ce point. Je laisserai pour l'instant la difficulté de côté, en retenant seulement le lien existant entre divisibilité et théorie des tous et des parties.

Résumons les résultats obtenus dans le schéma suivant :

<b>Genres</b>	$A, B \dots$	
<b>Grandeurs</b>	Éléments <b>indivisibles</b> $a_i$ de $A$ , $b_i$ de $B$ , ... strictement ordonnés entre eux.	
<b>Quantité</b>	Agrégats <b>divisibles</b> $\alpha_{i,1}, \dots$ qui ont une même grandeur $a_i$	
	↙	↘
	Touts finis : division en <b>termes</b>	Touts infinis : division en <b>parties</b>

<sup>1</sup> *Ibid.*, 150-152.

<sup>2</sup> Il ne faut pas confondre les fractions et les rapports. Les rapports sont des relations entre entiers, ou plus précisément entre membres d'une progression (149-150). Les fractions sont des relations entre partie et tout (150-152). La différence a une conséquence importante : la notion de rapport irrationnel n'a pas de sens, alors que rien ne s'oppose *a priori* à ce qu'il y ait des fractions irrationnelles.

Les grandeurs sont toujours indivisibles, alors que les quantités sont parfois divisibles. Lorsqu'elles le sont, elles peuvent être soit divisibles en termes, soit divisibles en parties. Dans le schéma, j'ai fait comme si toutes les quantités étaient divisibles. Il n'en est en réalité rien : Russell affirme que certaines quantités ne sont pas des agrégats. Ainsi, les plaisirs ne sont pas considérés comme des quantités divisibles (« la somme de deux plaisirs n'est pas un nouveau plaisir, mais est simplement deux plaisirs » (180-181)). Lorsque Russell veut souligner que certaines quantités ne sont pas des agrégats, c'est toutefois généralement le cas des grandeurs relationnelles qu'il évoque. C'est vers ce genre particulier de grandeurs que nous allons maintenant nous tourner.

### I.3 : Les grandeurs relationnelles

Nous l'avons vu, dans le chapitre 1, que Russell envisage dans le manuscrit anglais de *Sur la logique des relations*, l'existence de grandeurs relations, qu'il appelle alors « *distances* ». Dans les *Principles*, Russell ne fait toutefois aucune référence explicite à 1900b. L'exemple que le philosophe utilise dans le chapitre XX, lorsqu'il aborde la question, est celui de la ressemblance entre les couleurs (171) :

La différence entre deux nuances de couleur est certainement une différence de qualité, non pas simplement une différence de grandeur ; et lorsque nous disons qu'une chose est plus rouge qu'une autre, nous ne sous-entendons pas que les deux sont de la même nuance. S'il n'y avait aucune différence de nuance, nous dirions probablement que l'une est *plus claire* que l'autre, ce qui est un genre de comparaison complètement différent. Mais bien que la différence de deux nuances soit une différence de qualité, cette différence de qualité est cependant elle-même susceptible de degrés, comme le montre la possibilité de l'arrangement sériel. Chaque nuance de couleur semble être simple et inanalysable ; mais les couleurs voisines dans le spectre sont plus similaires que les couleurs éloignées. (...) Nous avons par conséquent un cas indubitable de relations qui ont de la grandeur. La différence ou ressemblance de deux couleurs est une relation, et est une grandeur ; car elle est plus ou moins grande que d'autres différences ou ressemblances.

La ressemblance entre deux nuances de rouge est susceptible de plus ou de moins : c'est donc une grandeur ; mais la ressemblance est évidemment aussi une relation. Il y a donc des grandeurs relationnelles, auxquelles il faut appliquer les distinctions fondamentales de la théorie de la grandeur<sup>1</sup>. Mais comment leur appliquer les schémas présentés plus haut ? À quoi correspond la distinction entre quantités et grandeurs lorsque les grandeurs considérées sont des relations ? Et comment effectuer la distinction entre genres de grandeurs lorsqu'on a affaire à des grandeurs relationnelles ?

Le premier problème ne présente pas de difficulté particulière. Reprenons l'exemple de la ressemblance. Une « quantité » de ressemblance entre deux rouges  $g_1$  et  $g_2$  est la relation instanciée ou la « proposition »  $g_1 R g_2$ . La relation  $R$  est la grandeur associée à cette quantité ;  $R$  est en effet ici ce que toutes les quantités de ressemblance égales à celle qui existe entre  $g_1$  et  $g_2$  ont en commun. Ainsi, deux nuances de vert,  $h_1$  et  $h_2$ , peuvent se ressembler plus, de la même manière, ou moins que ne se ressemblent  $g_1$  et  $g_2$ . Si la ressemblance entre  $h_1$  et  $h_2$  est la même que celle entre  $g_1$  et  $g_2$ , alors on aura  $g_1 R g_2$  et  $h_1 R h_2$ . Les quantités relationnelles égales ne sont pas distinguées les unes des autres par leurs localisations spatio-temporelles, mais par les termes que leur commune grandeur relie (167) :

---

<sup>1</sup> Bien évidemment, les distances de Russell 1900b, qui ne sont pas simplement (rappelons-le) des distances géométriques, tombent sous la catégorie de grandeurs relationnelles. Peut-être est-il possible de concevoir les ressemblances comme des exemples de « distances » ; sur point, voir *infra*.

Lorsqu'une grandeur peut être particularisée par une position temporelle, spatiale, ou spatio-temporelle, ou lorsque, **s'il s'agit d'une relation, elle peut être particularisée par la prise en compte de la paire de termes entre lesquels elle a lieu**, alors la grandeur ainsi particularisée s'appelle une *quantité*. (je surligne)

Les quantités relationnelles ne sont donc pas des agrégats : s'il fallait leur assigner un statut, il faudrait leur accorder celui d'unité ( $g_1Rg_2$  comme  $h_1Rh_2$  sont des propositions). Russell a donc raison de dire que les quantités relationnelles « ne sont pas même concevables comme divisibles » (162). On peut formuler ce que nous venons de dire légèrement différemment, en appliquant à la grandeur « ressemblance » l'opposition entre conception absolutiste et conception relativiste. Pour un relativiste, qui considère les grandeurs comme des ensembles de quantités égales, la ressemblance  $R$  ne serait ici rien d'autre que la classe des couples  $(g_1, g_2)$ ,  $(h_1, h_2)$ , ... (ou des propositions  $g_1Rg_2$  et  $h_1Rh_2$ , ...) quantitativement égaux entre eux. Pour un absolutiste, en revanche, la grandeur  $R$  est une entité, indépendante des termes auxquelles elles s'appliquent ; elle ne doit pas, par conséquent, être réduite à une classe de relations particularisées. Il est intéressant de constater que Russell au §54 des *Principles* envisage et rejette l'idée, reprise et popularisée par Stout par la suite<sup>1</sup>, consistant à définir les relations (et plus généralement, les universaux) à partir des relations instanciées (des « tropes »). Ce passage fait lui-même écho à un texte écrit en 1900, *Do Differences Differ?* (1900c), dans lequel Russell adopte le point de vue qu'il critique dans les *Principles*. Or, dans 1900c, Russell considère explicitement sa position comme une défense du « relativisme »<sup>2</sup>.

La question de l'application de la distinction quantité / grandeur aux grandeurs relationnelles n'est toutefois pas la plus difficile. C'est en effet le problème de la division de la grandeur en différents genres qui est le plus épineux. Dans un article intitulé *Quantities*, daté de 1988, John Bigelow et Robert Pargetter distinguent deux manières de concevoir la quantité. La première pose qu'il y a différents genres de grandeur, et que c'est à l'intérieur de chacun de ces genres que les différences de degré apparaissent (Bigelow & Pargetter 1988, 290-291). Cette approche correspond à celle que j'ai attribuée jusqu'ici à Russell dans les *Principles*. La seconde, que les auteurs font remonter à la fois à Platon et à Berkeley<sup>3</sup>, pose qu'il n'y a fondamentalement qu'un seul genre de grandeur et que ce genre est relationnel. Les degrés s'attribuent, dans cette seconde approche, à une relation (de « participation » ou de « ressemblance ») que des particuliers ont avec un particulier paradigme (1988, 288-290). Reprenons l'exemple de Russell, celui du rouge. Il est possible de sélectionner un échantillon de couleur rouge, et ensuite de classer les autres rouges en fonction de leur plus ou moins grande « distance » par rapport à ce paradigme. Ce qui varie en degré n'est pas ici la couleur, mais la différence ou la distance entre la couleur donnée et le paradigme, i.e. la relation de ressemblance que des particuliers ont avec l'échantillon standard. Dans ce schéma, ce qui tient lieu de la différence entre genres, est la différence entre les paradigmes – ainsi, les degrés de masse sont définis comme des degrés de ressemblance pris par rapport à une masse particulière, les degrés de plaisir comme des degrés de ressemblances par rapport à un plaisir particulier, etc. Mais le genre de la relation « quantitative » reste, lui, en revanche le même, que la relation soit appliquée à des masses, à des plaisirs ou à quoique ce soit d'autres. Il n'y a

<sup>1</sup> Voir Stout 1921, et pour un commentaire, van der Schaar 2004.

<sup>2</sup> 1900c, 556 : « Lorsque deux termes diffèrent, ils ont (...) seulement une relation, à savoir celle de différence spécifique, unique et individuelle, simple et inanalysable, partagée par aucune autre paire. La différence elle-même n'est pas une relation, au sens où elle ne relie aucun terme ; c'est un concept de classe, auxquels les différences sont reliées comme le rouge à la couleur. (...) La doctrine (...) peut être généralisée à toutes les relations. Une relation, quelle qu'elle soit, qui relie réellement deux termes ne peut pas en relier deux autres ; il n'y a ainsi qu'une proposition au sein de laquelle la relation spécifiée relie, bien qu'il y ait bien évidemment d'autres propositions dans laquelle elle est reliée. »

<sup>3</sup> Alors que, dans la doctrine platonicienne, les paradigmes auxquels « participent » les différents particuliers sont des formes séparées, dans le nominalisme de Berkeley, ce sont certains particuliers qui jouent le rôle de standard dans la comparaison. La différence est importante, mais, comme Bigelow et Pargetter le montrent, elle ne remet pas en cause l'unité profonde du schéma : la variation de degré est comprise dans les deux cas comme une variation dans la relation qu'ont certains individus vis-à-vis d'un autre, d'une forme chez Platon, d'un particulier arbitrairement choisi chez Berkeley.

fondamentalement dans ce paradigme qu'un genre de grandeur : la « participation » (Platon), la « ressemblance » (Berkeley) ou la « distance » (Russell 1900b).

Bigelow et Pargetter mettent en évidence l'existence d'une tension potentielle entre l'idée qu'il y a des grandeurs relations et l'idée que les grandeurs sont divisées en genres distincts. Si l'on en croit les deux philosophes australiens, l'adoption de la stratégie « Platon-Berkeley » conduirait à renoncer à classer les grandeurs en divers types, et vice versa. En 1903, Russell divise les grandeurs en différents genres, tout en développant une approche relationniste de la grandeur. Retrouve-t-on chez lui la tension décrite par Bigelow et Pargetter ?

Le modèle « Platon-Berkeley » exerce, à n'en pas douter, un attrait réel sur Russell. En témoigne la conclusion de *On the Relations of Numbers and Quantity* (1897) déjà citée :

Dans une quantité, considérée en isolation, il est impossible de découvrir [...] une quelconque propriété de la quantité. Une quantité est à vrai dire une expression aussi impropre pour des choses qui peuvent être quantitativement comparées qu'une ressemblance l'est pour une photographie.

Russell joue avec cette idée dans plusieurs textes datant de 1898-1900. À la fin de *An Analysis of Mathematical Reasoning* (1898), il écrit ainsi (216) :

Observons (...) que chaque fois que nous avons une multiplicité (*manifold*) de quantités, les différences entre ces quantités forment une nouvelle multiplicité (*manifold*) de quantités. (...) On peut facilement voir que ces différences sont toujours des quantités.

Russell affirme qu'à tout genre de grandeur, il est possible d'associer un autre type de grandeur, dont les éléments sont les différences entre les grandeurs du premier genre<sup>1</sup>. Ainsi, on peut associer à la grandeur masse, la série des différences qu'ont les masses par rapport à une masse *a* fixée arbitrairement. Les éléments de cette nouvelle multiplicité quantitative ne sont pas à proprement parler des masses, mais des degrés de ressemblances entre les masses et *a*. Mais la tentation est alors grande de réduire la masse elle-même à un degré de ressemblance entre des corps et le corps paradigme *a*. Si toutes les séries quantitatives, quels que soient leurs genres, donnent lieu à des séries de distances, pourquoi ne pas pousser la logique de la stratégie « Platon-Berkeley » jusqu'à son terme, et concevoir toutes les grandeurs comme des exemples de distance, ainsi que le suggère Russell dans son 1897c et dans son 1900b ? Comme nous le verrons, Russell et Whitehead semblent en 1913 aller jusque-là (voir nos chapitres 4 et 5).

Dans les *Principles*, cependant, Russell résiste fermement à la tentation. L'idée que les grandeurs doivent être divisées en « *kinds* » séparés constitue le cadre fondamental de la réflexion, et les grandeurs relations ne sont conçues que comme des genres, importants certes, mais particuliers de grandeurs. Russell renonce notamment à l'idée que toutes les séries quantitatives puissent donner lieu à une nouvelle grandeur formée de la différence entre les quantités de la série originale. « Qu'une série particulière contienne ou non des distances (est) une question que l'on ne peut pas décider par des arguments », affirme-t-il en 1903 (253). Russell paraît donc, dans les *Principles*, vouloir brider la puissance de l'approche relationnelle des quantités : les grandeurs relations sont un (ou plutôt des) genre(s) de grandeurs parmi d'autres. Elles ne constituent pas la matrice de toutes les grandeurs. Ce point est important ; il marque une rupture à la fois avec les conclusions de *On the Relations of Numbers and Quantity* (1897) et avec ce qui sera développé dans les *Principia*.

Enrichissons les schémas précédents des différents éléments passés ici en revue :

---

<sup>1</sup> Il est très probable que cette possibilité d'engendrer des nouvelles séries à partir de la différence entre des éléments d'une série de base ait un lien avec l'usage, particulier, que Russell fait à l'époque des algèbres vectoriels (voir le chap. 1).

<b>Genres</b>	Non relationnels : $A, B, \dots$		Relationnels : $R, S, \dots$
<b>Grandeurs</b>	Les concepts indivisibles $a_i$ de $A$ , ... strictement ordonnés entre eux		Les relations indivisibles $r_i$ de $R$ , ... strictement ordonnées entre elles
<b>Quantité</b>	Touts <b>divisibles</b> $\alpha_{i,j}$ qui ont une même grandeur $a_i$	Quantités <b>indivisibles</b> $\alpha_{i,j}$ (ex. plaisirs)	Les relations instanciées <b>indivisibles</b> $ar_i b, cr_i d, \dots$ qui ont une même relation $r_i$ .
	$\nwarrow$ Touts finis	$\searrow$ Touts infinis	

Il faut distinguer entre genres relationnels et les genres non relationnels de quantité. Au genre relationnel peut être appliquée la différence entre quantité et grandeur appliquée ailleurs. Enfin, une distinction doit être faite entre quantités divisibles et quantités indivisibles. Les quantités relationnelles ne sont jamais divisibles ; les quantités non relationnelles le sont parfois.

#### I.4 : Les grandeurs mesurables : l'interprétation de Michell et la différence divisibilité / distance

J. Michell, dans un ouvrage consacré à l'histoire de la mesure en psychologie (Michell 1999), dépeint Russell comme le précurseur de la théorie moderne, « représentationaliste », de la mesure. Dans la théorie de Suppes et de ses collaborateurs, la mesure est pensée comme une corrélation entre un système numérique et un système empirique, corrélation qui préserve certaines caractéristiques structurelles (pour plus, voir chapitre 6). Comment Russell conçoit-il la mesure dans les *Principles* ? Pour établir sa thèse, Michell (1999) cite, en le tronquant, un texte que l'on trouve au début du chapitre XXI (176) :

La mesure des grandeurs est, en son sens le plus général, une méthode quelconque par laquelle une correspondance unique et réciproque est établie entre toutes les ou une partie des grandeurs d'un genre et tous les ou une partie des nombres, selon les cas, entiers, rationnels, ou réels. (...) En ce sens général, la mesure requiert une certaine relation un-un entre les nombres et les grandeurs en question – une relation qui peut être directe ou indirecte, importante ou triviale, selon les circonstances. (...) Puisque les nombres forment une série et que tout genre de grandeur forme également une série, il sera souhaitable que l'ordre des grandeurs mesurées corresponde à celui des nombres, i.e. que toutes les relations de *entre* soient les mêmes pour les grandeurs et leurs mesures. Partout où il y a un zéro, il sera bon que celui-ci soit mesuré par le nombre zéro. Ces conditions, ainsi que d'autres, qu'une mesure, dans la mesure du possible, doit satisfaire, peuvent être posées; mais elles ont une importance pratique, plutôt que théorique.

Michell commente (1999, 118) :

L'idée de Russell est que la mesure met en jeu une correspondance un-un entre les grandeurs d'une quantité et un sous-ensemble d'un des systèmes numériques (entier, rationnel ou réel) de telle sorte que l'ordre des grandeurs est représenté par l'ordre des nombres correspondants. Ceci constitue, autant que je le sache, le premier énoncé explicite de la conception représentationaliste de la mesure.

Russell serait un précurseur de la théorie du *measurement* parce qu'il définirait la mesure comme une assignation numérique préservant l'ordre entre les quantités. En développant une théorie ordinale de la grandeur, Russell, si l'on suit Michell, aurait été bien au-delà de la simple reconnaissance qu'il y a des grandeurs « intensives » non additives ; il aurait élaboré une autre approche de la mesure dans laquelle les nombres, loin d'être des « rapports » entre quantités, sont simplement associés aux grandeurs. La conception représentationaliste, selon laquelle la mesure est une corrélation entre nombres et grandeurs qui respectent certaines



conditions structurelles (un homomorphisme), serait donc contenue en germe dans l'approche russellienne.

Cette analyse n'est guère convaincante. Citons l'ensemble du texte sur lequel s'appuie Michell (j'ai fait apparaître en gras le passage tronqué par le commentateur) :

(...) En ce sens général, la mesure requiert une certaine relation un-un entre les nombres et les grandeurs en question -- une relation qui peut être directe ou indirecte, importante ou triviale, selon les circonstances. **La mesure en ce sens peut être appliquée à de très nombreuses classes de grandeurs; en un sens plus important et plus étroit, nous allons voir qu'elle s'applique à deux grandes classes, les distances et les divisibilités.**

**Concernant la mesure prise dans son sens le plus général, il y a peu de chose à dire.** Puisque les nombres forment une série et que tout genre de grandeur forme également une série, il sera souhaitable que l'ordre des grandeurs mesurées corresponde à celui des nombres, i. e. que toutes les relations de *entre* soient les mêmes pour les grandeurs et leurs mesures. Partout où il y a un zéro, il sera bon que celui-ci soit mesuré par le nombre zéro. Ces conditions, ainsi que d'autres, qu'une mesure, dans la mesure du possible, doit satisfaire, peuvent être posées; mais elles ont une importance pratique, plutôt que théorique.

La lecture de la citation non tronquée montre que Russell opère une distinction entre la mesure prise au sens le plus général, celle dont parle Michell, et la mesure prise au sens étroit, dont le commentateur ne dit absolument rien. Or c'est la mesure en ce second sens qui intéresse Russell. De la corrélation ordinale entre nombres et quantités, il y a peu de « chose à dire » et une telle possibilité est de toute façon peu « importante », explique le philosophe. Michell met donc artificiellement en exergue une partie de la théorie des *Principles* que Russell considère comme tout à fait triviale (voir pour plus sur la définition ordinale de la grandeur, les développements sur Meinong au chapitre 3). Les « échelles ordinales » n'ont d'ailleurs, contrairement à ce que semble suggérer Michell, guère eu d'importance dans le développement du paradigme représentationaliste<sup>1</sup>. Ce genre d'assignation a été longtemps considéré comme trop pauvre pour être perçu comme une véritable mesure, et Russell reprend ici l'idée : la mesure, au sens général de représentation qui préserve l'ordre, n'est pas digne d'intérêt.

Ce qu'il faut comprendre, c'est donc précisément ce que Michell passe sous silence : la mesure prise au sens étroit. Le problème auquel Russell est confronté est simple. Dans l'approche traditionnelle (euclidienne), l'additivité joue un rôle essentiel dans la définition des rapports entre grandeurs, donc dans la mesure. Or Russell exclut la divisibilité de la grandeur ; comment, dès lors, rendre compte de la mesure des grandeurs extensives, les plus familières, celles-là même dont parle Euclide ? Michell fait comme si Russell ignorait ce problème, comme s'il se concentrait sur les seules échelles ordinales. Mais Russell ne peut pas éviter la difficulté : une chose est de dire qu'il y a des grandeurs non extensives mesurables (en un sens général), autre chose est de nier la possibilité de mesurer les grandeurs extensives. Ne serait-ce que parce qu'il a en vue l'application de la théorie de la quantité à la géométrie, Russell ne peut pas négliger cette question. Comme il l'affirme au §166 (178), « la mesure requiert que, dans certains cas, la proposition « cette grandeur est double de celle-ci » ait une signification intrinsèque. » Mais comment donner un sens à ce genre de proposition lorsque l'on caractérise les grandeurs comme étant indivisibles ? Tel est le véritable sujet de la mesure des grandeurs, abordée dans le chapitre XXI.

Dégageons les grandes lignes de la réponse russellienne, sans pour l'instant entrer dans les détails<sup>2</sup>. La thèse de Russell est que deux types de grandeurs donnent lieu à une mesure en un sens théoriquement intéressant : les « grandeurs de divisibilité » et les « distances ». Russell consacre le §167 à l'analyse des premières, le §168 à l'analyse des secondes.

<sup>1</sup> Pour une histoire de la « *theory of measurement* », voir Diez 1997 en plus de Michell 1999.

<sup>2</sup> La théorie russellienne des grandeurs mesurables est fortement influencée par Meinong 1896 ; je renvoie le lecteur au prochain chapitre pour une analyse de cette influence et pour un traitement plus approfondi de la question de la mesure.

La théorie des grandeurs de divisibilité est fondée sur l'idée que, si les grandeurs sont toujours indivisibles, il peut arriver que les quantités qui ont ces grandeurs soient divisibles (178) :

Bien que les grandeurs soient (...) incapables d'addition (...), les quantités peuvent être ajoutées de la façon expliquée dans la partie II (sur les agrégats). L'addition de deux grandeurs de divisibilité donne simplement deux grandeurs, et non une grandeur. Mais l'addition de deux quantités de divisibilités, i.e. de deux tous, donne un unique nouveau tout, à condition que l'addition soit du genre qui résulte de l'addition logique en considérant les classes comme des tous formés par leurs termes.

Prenons l'exemple de la longueur des segments. Les longueurs étant des grandeurs, elles ne peuvent pas être sommées ; mais il se trouve que les tous qui les possèdent (les segments, que Russell nomme *stretch*) sont des agrégats, et qu'ils peuvent être mis bout à bout l'un à l'autre, donc « unis » selon « l'addition logique » (l'union ensembliste). Ce pourrait très bien ne pas être le cas : il existe des genres de grandeurs (non relationnelles) dont les quantités ne sont pas divisibles – le plaisir en est un exemple. Mais il se trouve (c'est une donnée empirique, non logique, pour Russell) que, dans le cas des longueurs, des procédures très simples permettent d'agréger les *stretches*. Si les deux *stretches* (quantités) mis bout à bout possèdent la même longueur (grandeur), alors on dira que la grandeur du tout qu'ils forment lorsqu'ils sont additionnés est deux fois celle de chacun de ses termes ; ou plus précisément, que la « grandeur de divisibilité » du *stretch* final est deux fois celle de chacune des parties. Les grandeurs ne sont jamais divisibles, et la loi interne de la structure semi-groupe introduite pour formaliser le concept de grandeur extensive ne correspond donc à aucune opération entre les grandeurs. Russell pense néanmoins que, dans certains cas, il est possible d'interpréter cette addition comme une opération définie sur les quantités « concrètes » qui ont les grandeurs. Je reviendrai au chapitre 3 sur les difficultés de son analyse.

La théorie des distances est plus complexe. Mais nous la connaissons déjà : elle correspond à l'approche exposée, de façon lapidaire, dans le paragraphe 7 du manuscrit anglais de *Sur la logique des relations*. Afin de tester la coïncidence des deux concepts, citons le texte des *Principles* dans lequel Russell présente la notion (180) :

Par un genre de distance, j'entendrai un ensemble de relations quantitatives asymétriques telles qu'une et seulement une lie une paire quelconque de termes d'un ensemble donné ; qui sont telles que, s'il existe une relation du genre en question entre  $a$  et  $b$ , et aussi entre  $b$  et  $c$ , alors il existe une relation du genre en question entre  $a$  et  $c$ , la relation entre  $a$  et  $c$  étant le produit relatif de celles entre  $a$  et  $b$ , et  $b$  et  $c$  ; ce produit doit être commutatif, i.e. indépendant de l'ordre des facteurs ; et finalement si la distance  $ab$  est plus grande que la distance  $ac$ , alors,  $d$  étant un autre membre de la classe,  $db$  est plus grand que  $dc$ .

Par rapport à Russell 1900b, certaines choses changent : Russell ne précise pas que les relations en question doivent avoir même domaine et même co-domaine, ni qu'elles doivent être un-un<sup>1</sup> ; concernant le produit relatif, seule la condition selon laquelle le produit doit être une loi interne pour l'ensemble des relations est présente – rien n'est dit sur l'existence du neutre ou de l'inverse ; enfin, la densité de l'ordre n'est pas exigée. Mais la présentation est explicitement introduite comme une première caractérisation d'une notion définie seulement dans la partie IV. Et lorsque l'on se réfère à la description plus détaillée, donnée au chapitre XXXI intitulé « Distance », toutes les omissions de Russell sont corrigées. La définition donnée correspond alors en tout point à celle de la section 7 de 1900b<sup>2</sup>. Russell a donc une seconde manière d'interpréter l'addition entre grandeurs, qui ne renvoie pas, cette fois, à la divisibilité des quantités : lorsque les grandeurs sont conçues comme des relations, on peut, si

<sup>1</sup> Russell le dit toutefois dans le paragraphe qui précède celui cité.

<sup>2</sup> Même dans ses imprécisions. Ironiquement, Russell oublie au chapitre XXI la condition d'unicité indispensable (voir sur ce point chap. 1) qu'il intègre dans le passage que je viens de citer : « par un genre de distance, j'entendrai un ensemble de relations quantitative asymétriques telles qu'une et **seulement une** lie une paire quelconque de termes d'un ensemble donné ».

les relations ont la structure d'une « distance », interpréter l'addition comme un produit de relations.

Nous n'en dirons pas plus pour le moment. Notre principal objectif était ici d'établir, premièrement, que, contrairement à ce que suggère Michell, la mesure des grandeurs extensives constitue un problème majeur pour Russell dans les *Principles*, et deuxièmement, que la clé de voûte de la conception russellienne consiste à distinguer deux sortes de grandeurs mesurables (en un sens étroit) : la théorie des grandeurs de divisibilité d'une part, la théorie de la distance de l'autre.

Le survol de la partie III auquel je me suis livré ici permet de dégager deux pôles problématiques dans la théorie russellienne de la quantité : 1) la défense de la théorie absolue de la quantité, selon laquelle il faut, en plus des quantités, admettre l'existence des grandeurs ; 2) l'analyse des grandeurs mesurables, c-à-d « extensives », dans le contexte d'une théorie qui nie, par principe, la possibilité de diviser les grandeurs. Les deux points posent problème. Le premier, parce que l'approche développée par Russell dans la partie III contredit directement la stratégie déployée dans la partie II à propos des nombres cardinaux. Le second, parce qu'il est difficile de comprendre comment Russell, qui annonce, avec tambours et trompettes, vouloir dissocier complètement la quantité de la divisibilité, peut, *in fine*, retrouver les résultats que permet d'obtenir la divisibilité. Les deux questions touchent, chacune à sa façon, le cœur de la réflexion russellienne. Le premier problème est un problème interne : il met en question la légitimité d'une distinction qui structure tous les développements russelliens. Le second est externe : il interroge la valeur d'une théorie qui ne peut même pas rendre compte des systèmes quantitatifs les plus familiers, i.e. les systèmes extensifs. Je vais, dans le reste de ce chapitre me consacrer à la première question, et réserver la seconde, plus difficile encore, au chapitre suivant.

## II- La différence grandeur / quantité et la question des genres de grandeur

Trois moments structurent mon analyse de l'« absolutisme » russellien. La première section est consacrée à l'interprétation de J. Levine, qui voit dans l'attitude de Russell les vestiges d'une position que le philosophe aurait adoptée en 1899-1900, mais abandonnée par la suite, sans pour autant modifier la partie III. Dans les deux sections qui suivent, j'expose ma propre lecture ; contre Levine, je défends l'idée que la position russellienne est cohérente, et que le choix de l'absolutisme s'explique si l'on prend en compte la nécessité d'articuler les grandeurs aux genres. Dans la section finale, j'élargis la focale et montre comment ce dernier problème (celui du rapport grandeur / genre de grandeur) dépasse le cadre des *Principles*.

### II-1. L'interprétation « chronologique » de J. Levine

Comment expliquer que Russell défende une théorie absolutiste de la grandeur dans la partie III, alors qu'il définit les nombres comme classes de classes équinumériques dans la partie II ? Russell paraît utiliser, à trente pages d'intervalle, un même principe pour défendre deux thèses contradictoires entre elles. Soit  $S$  une relation d'équivalence ; Russell appelle principe d'abstraction (puis théorème d'abstraction) l'équivalence suivante :

(\*)  $aSb$  ssi il y a une entité  $x$  et une relation plusieurs-un  $T$  telle que  $aTx$  et  $bTx$ .

Dans la partie III,  $S$  est la relation d'égalité quantitative,  $a$  et  $b$  sont des quantités du même type,  $T$  est la relation « avoir comme grandeur », et  $x$  une grandeur. L'approche absolutiste stipule que le membre de gauche est dérivé du membre de droite, considéré comme

logiquement fondamental. C'est parce qu'il existe une grandeur  $x$  que  $a$  et  $b$  ont que  $a$  égale  $b$  en grandeur. On pourrait s'attendre à ce que Russell développe la même analyse dans la partie II. Dans le cas des cardinaux,  $x$  désigne un nombre cardinal,  $T$  est la relation « avoir pour cardinal »,  $S$  est la relation d'équinuméricité,  $a$  et  $b$  sont des classes. Le raisonnement absolutiste conduit à soutenir que le concept de nombre est antérieur à celui d'équinuméricité ; c'est, si l'on en croit les « absolutistes », parce des ensembles ont le même nombre cardinal qu'ils seraient similaires – non l'inverse. Comme le souligne J. Levine (1998, 110-112), Russell a, autour des années 1899-1900, développé des analyses dans lesquelles les entiers positifs sont considérés comme une série indépendante : les classes jouent alors le rôle des entités quantitatives concrètes, corrélées aux grandeurs abstraites, de la partie III. Dans cette théorie, les nombres ne présupposent plus les collections<sup>1</sup>. Mais, nous le savons, les choses ne se passent pas ainsi dans la partie II des *Principles*. C'est en effet la partie gauche de l'équivalence (\*), non la partie droite, qui est considérée par Russell comme fondamentale. La lettre  $x$  ne désigne d'ailleurs pas un nombre cardinal, mais une classe d'équivalence, et la relation  $T$  est l'appartenance ensembliste. C'est une définition, extérieure au principe (\*), qui identifie, en 1903, les cardinaux aux classes d'équivalence apparaissant dans le membre de droite (voir *infra*. pour plus sur ce point). Il y a bien une rupture de symétrie dans l'usage du principe (\*) entre la partie II et la partie III. Comment expliquer que Russell use du même schéma dans des directions si opposées ?

Dans un long et détaillé compte-rendu des volumes 2 et 3 des *Collected Papers* qu'il a publié en 1998, Levine avance l'idée, attrayante et originale, selon laquelle la thèse centrale des *Principles* ne serait pas le logicisme, qu'il interprète comme étant la thèse selon laquelle les nombres se réduisent aux classes, mais la défense de la théorie absolutiste et platonicienne de l'ordre, selon laquelle nombre, grandeur, espace, temps et mouvement formeraient des séries d'entités fondamentales et indépendantes entre elles (Levine 1998, 117-119). Dans cette perspective, la réduction des nombres aux classes, découverte assez tard<sup>2</sup>, constituerait une entorse par rapport au cadre général – elle reviendrait en effet à adopter une théorie relativiste des nombres. Le logicisme russellien s'introduirait ainsi tardivement et comme par effraction dans la rédaction des *Principles*, en déséquilibrant l'ensemble de l'édifice. La coexistence de deux usages du principe d'abstraction, usage relativiste dans la partie II, absolutiste dans la partie III, fournit à J. Levine son argument principal. Pour le commentateur, il n'y aurait là rien à expliquer. Les deux théories n'appartiendraient pas, en réalité, à la même couche « géologique ». La théorie absolutiste serait le vestige d'anciennes croyances, recouvertes par l'approche logiciste, d'essence relativiste, plus récente. Loin de chercher à unifier les deux doctrines, il faudrait au contraire prendre acte de leur radicale hétérogénéité, et lire dans cette juxtaposition le symptôme d'une très grande tension. Selon Levine, le seul problème serait de comprendre pourquoi, dans la version finale, Russell n'a pas abandonné la distinction entre quantité et grandeur et réécrit la partie III pour l'ajuster à son nouveau logicisme. Pour l'expliquer, le commentateur invoque la volonté de Russell de voir l'œuvre publiée le plus rapidement possible.

L'interprétation de J. Levine ne va pas sans poser de sérieuses difficultés. En premier lieu, on ne comprend pas pourquoi, si Russell adopte une approche relativiste dès 1903, il faudrait attendre 1913 pour que le philosophe se rallie à l'approche relativiste de l'espace développée par Whitehead. En second lieu, la machinerie ensembliste joue à plein dans la partie V des *Principles*, écrite assez tôt, en 1899-1900, c-à-d à la même époque que la partie III ; or l'idée d'une dérivation des rationnels, puis des réels à partir des entiers va dans le sens du réductionnisme. Comment accommoder ce fait à la trame mise en place par Levine ? Plus fondamentalement, est-il vrai que l'usage du principe d'abstraction (\*) soit exactement le

<sup>1</sup> Voir 1900d, 225, et également 1901d, 309.

<sup>2</sup> Voir Byrd 1987.

même dans la partie II et la partie III ? Au chapitre XI des *Principles*, Russell affirme que (\*) souffre d'un sérieux défaut : partant d'une relation d'équivalence, il garantit l'existence d'un  $x$  et d'une relation  $T$  dans le membre de droite de l'équivalence, mais il n'en garantit pas l'unicité (§110). Ainsi, (\*) permet d'affirmer qu'il existe une entité (les supposés « entiers ») avec laquelle toutes les classes équinumériques ont une relation, mais il ne permet d'identifier ni l'entité  $x$ , ni la relation  $T$  en question. Dans la section §111, Russell propose de réduire l'indétermination en postulant que cette entité est la classe d'équivalence, dont il se sert pour dériver le théorème (\*) dans *Sur la logique des relations*. La question n'est donc pas tant de savoir quelle partie de l'équivalence (\*) doit être privilégiée, puisque l'équivalence (\*) est, en tant que telle, trop indéterminée pour fournir à elle seule une définition – mais de savoir pourquoi Russell ne définit pas, sur le modèle de ce qu'il propose en ce qui concerne les cardinaux finis, les grandeurs comme des classes d'équivalence de quantité. Une piste serait alors de pointer la différence existante entre les entités liées par la relation d'équivalence  $S$  dans les deux contextes. Dans le cas des cardinaux,  $a$  et  $b$  sont des classes ; l'idée de considérer que  $x$  est une classe et que  $T$  est la relation  $\in$  ne représente donc pas une rupture par rapport à l'arrière plan ensembliste dans lequel on se place dès le début. Dans le cas des grandeurs,  $a$  et  $b$  ne sont pas des classes, mais des quantités. Si l'on voulait produire un équivalent exact du raisonnement effectué dans la partie II, il faudrait trouver, dans la partie III, un  $x$  qui soit de même nature que les  $a$  et les  $b$  – par exemple, un  $x$  qui soit une « quantité de quantité » comme les nombres sont des « classes de classes ». Bien entendu, la simple formulation de l'hypothèse suffit à la repousser. Il n'est donc pas possible d'effectuer dans le cas des grandeurs une manœuvre qui épouse exactement les traits de la démarche suivie dans le cas des cardinaux. Peut-être pourrait-on trouver ici les ressources pour expliquer la différence de traitement dans les deux cas.

Mais je ne développerai pas cette piste. Il me semble que d'autres éléments, tenant à l'analyse russellienne de la quantité, et non pas simplement au fonctionnement du principe d'abstraction, doivent être pris en compte dans cette affaire. Russell, tardivement, puisque c'est au moment de la lecture des épreuves<sup>1</sup>, reconnaît en effet que, « pour autant que des arguments formels soient concernés », les grandeurs « peuvent être identifiées aux classes de quantités égales » (167). Ceci suggère que, s'il ne procède pas à cette réduction, c'est pour des raisons autres que « formelles » – pour des raisons substantielles, qui tiennent à la nature de la quantité et de la grandeur. Pour dégager la cohérence de la pensée russellienne, le plus simple est donc de revenir au texte des *Principles*, et d'étudier les arguments que donne l'auteur en faveur de la théorie absolutiste de la grandeur.

## II-2. La forme logique de la distinction grandeur / genre :

Les développements de Russell, contenus aux §154-157 (162-164) du chapitre XIX, sont décevants. Le philosophe, lorsqu'il analyse les prétendus défauts de l'approche relativiste, semble commettre une pétition de principe. Dans toutes les propositions assertant une inégalité entre quantités, explique-t-il, « une quantité égale peut être partout substituée sans affecter la vérité ou la fausseté de la proposition » (163) ; en conséquence, la relation d'égalité « doit être analysable », ce qui conduit à penser qu'« il y a un troisième terme auquel (les deux termes dits égaux) sont reliés » (163). Russell affirme donc ici que, dans le principe (\*), c'est le membre de droite qui doit être considéré comme fondamental, la relation  $S$  apparaissant dans le membre de gauche étant « analysable ». Mais pourquoi privilégier ainsi le membre de droite ? Aucune raison n'est donnée dans le chapitre XIX. Il faut se reporter à la fin du chapitre XX pour trouver un argument en faveur de la conception absolutiste. Le texte

---

<sup>1</sup> Voir Byrd 1996.

de Russell est toutefois difficile, et fait de plus référence à certains développements du chapitre XIX. Je vais d'abord me consacrer à ces développements, et réserver à la section suivante l'analyse de l'argument proprement dit.

Au §156, Russell présente la source d'une objection possible contre l'approche absolutiste (164-165) :

Une objection à la théorie (absolutiste) peut être fondée sur la relation d'une grandeur à ce dont elle est la grandeur. Pour fixer nos idées, considérons le plaisir. Une grandeur de plaisir est autant de plaisir, telle et telle intensité de plaisir. Il semble difficile, comme la théorie absolue demande de le faire, de considérer ceci comme une idée simple: il semble y avoir deux constituants, le plaisir et l'intensité. L'intensité n'a pas besoin d'être une intensité de plaisir, et l'intensité de plaisir est distincte du plaisir abstrait. Mais ce que nous demandons pour la constitution d'une certaine grandeur de plaisir est, non pas l'intensité en général, mais une certaine intensité particulière ; et une intensité *particulière* ne peut être indifféremment intensité de plaisir ou de quelque chose d'autre. Nous ne pouvons fixer tout d'abord combien nous en aurons, et décider ensuite s'il s'agit de plaisir ou de masse. Une intensité particulière doit être d'un genre particulier. Donc l'intensité et le plaisir ne sont pas, dans la définition d'un niveau donné de plaisir, des éléments indépendants et coordonnés. Il existe différents genres d'intensité, et différentes grandeurs dans chaque genre ; mais les grandeurs de genres différents doivent toujours être différentes. Donc il semble que l'élément commun, indiqué par le terme *intensité* ou *grandeur*, ne soit absolument pas quelque chose d'intrinsèque, qu'on puisse découvrir par l'analyse d'un terme unique, mais consiste seulement dans le fait d'être un terme dans une relation d'inégalité. Les grandeurs se définissent par le fait qu'elles ont cette relation, et, pour autant que le montre la définition, elles ne concordent en rien d'autre. La classe à laquelle elles appartiennent toutes, comme la portion mariée d'une communauté, est définie par des relations mutuelles parmi ses termes, non par une relation commune à quelque terme extérieur -- à moins, certes, que l'inégalité elle-même ne soit prise comme un tel terme, ce qui serait seulement une complication inutile.

Russell reprend son analyse à la fin du chapitre XX, dans un passage qui précède immédiatement le texte que dans lequel il développe son argument en faveur de l'absolutisme (174-175) :

Il est important de rappeler que, selon la théorie adoptée dans le chapitre XIX, une grandeur donnée d'un genre donné est un concept simple ayant relativement au genre une relation analogue à celle d'inclusion dans une classe. Lorsque le genre en question est un genre d'existants, comme le plaisir, ce qui existe réellement n'est jamais le genre, mais diverses grandeurs particulières du genre considéré. Le plaisir, pris abstraitement, n'existe pas; ce qui existe ce sont divers niveaux [*amount*] de plaisir. Ce degré d'abstraction est essentiel dans la théorie de la quantité : il doit y avoir des entités qui ne diffèrent les unes des autres en rien si ce n'est en grandeur.

Dans les deux passages, la question centrale est celle de la relation d'une grandeur particulière à son genre. Comment penser le lien entre *telle* intensité de plaisir, *telle* masse, *telle* nuance de rouge, *telle* longueur et respectivement, le *genre* plaisir, le *genre* masse, le *genre* rouge, le *genre* longueur ? Prenons garde : la question n'est pas celle du rapport entre quantité et grandeur, mais bien celle du rapport entre la grandeur particulière et son genre. La théorie absolutiste de la grandeur est donc ici présupposée (il y a des grandeurs qui sont ce que les quantités égales ont en commun) et le problème est de cerner la relation de particularisation qui a lieu à ce niveau, entre un genre de grandeur et ses degrés<sup>1</sup>. Notons, nous y reviendrons, que cette question n'a absolument aucun équivalent dans le cas de la définition des nombres cardinaux : il n'y a en effet pas différents genres de cardinaux, qui ne s'appliqueraient qu'à certaines sortes de classes.

Quel est le problème ? Russell répète à l'envi que la grandeur, dans la conception absolue, est simple, qu'elle n'est pas composée. Or, ce n'est à première vue pas le cas : dans une grandeur de plaisir, « il semble y avoir deux constituants, le plaisir et l'intensité » (164). La théorie absolue a donc une faiblesse, car l'hypostase de grandeurs simples semble contredire l'idée que les grandeurs se subdivisent en genres indépendants, isolés les uns des autres. Mais

---

<sup>1</sup> Le problème posé concerne les relations entre les deux derniers étages des schémas de la section 1. Il ne concerne pas l'étage inférieur, celui de la quantité.

Russell transforme immédiatement cet inconvénient en avantage : il n'est, en réalité, pas vrai qu'une grandeur de plaisir soit constituée de deux éléments différents, l'intensité d'une part, et le plaisir de l'autre. Une intensité particulière est en effet toujours nécessairement d'un genre particulier. Comme le dit joliment Russell, « nous ne pouvons fixer tout d'abord combien nous en aurons, et décider ensuite s'il s'agit de plaisir ou de masse ». Le second texte ajoute, de ce point de vue, un nouvel élément, qui est, en quelque sorte, le symétrique du précédent : si une grandeur particulière est toujours d'un genre particulier, le genre lui-même n'a pas d'autre sens que d'être le champ d'une relation d'ordre. Comme le dit Russell, « le plaisir, pris abstraitement, n'existe pas ; ce qui existe ce sont divers niveaux (*amount*) de plaisir »<sup>1</sup>. Un certain état concret de plaisir (une quantité de plaisir) n'est jamais seulement du plaisir ; il a toujours un certain degré, il est un plaisir à une certaine intensité. De même qu'une intensité pure n'existe pas (une grandeur est toujours grandeur d'une certaine propriété), de même un genre pur n'existe pas (un genre de grandeur est toujours particularisé en un degré déterminé). La conclusion tombe donc :

L'intensité et le plaisir ne sont pas, dans la définition d'un niveau [*amount*] donné de plaisir, des éléments indépendants et coordonnés.

Que conclure de cela ? Que la relation entre une grandeur et son genre est singulière. Russell le reconnaît dans la présentation générale qu'il fait de la théorie absolutiste de la grandeur. Après avoir noté que « chaque grandeur est une grandeur *de* quelque chose – plaisir, distance, aire, etc. – et a donc une certaine relation spécifique à ce quelque chose dont il est une grandeur », il ajoute que « cette relation est très particulière, et ne semble pas susceptible d'une définition plus poussée » (164). À la page 187, il affirme même que « la relation (...) entre une grandeur particulière et ce dont elle est une grandeur (n'a) pas (été) identifiée à la relation de classe (*class-relation*), mais tenue pour *sui generis* ». Enfin, dans le second extrait cité plus haut, Russell qualifie cette relation de simplement « analogue à celle d'inclusion dans une classe », le mot « analogue » signalant une simple ressemblance de surface, non une véritable identité.

Tentons de cerner plus précisément la nature logique de cette relation, en nous concentrant sur l'exemple de la couleur rouge, qui présente l'avantage de fournir des noms pour les nuances. Comment concevoir le rapport entre le carmin, disons, et le rouge ? Deux possibilités se présentent : soit penser le carmin comme une espèce et le rouge comme un genre (le carmin serait un sous-ensemble inclus dans un autre) ; soit regarder le carmin comme une propriété de premier ordre qui aurait elle-même comme propriété d'être rouge (le carmin serait un élément de la classe des rouges). Dans le premier cas, la grandeur déterminée serait conçue comme une espèce d'un genre ; dans le second, la grandeur déterminée serait vue comme une propriété de premier ordre dont le genre serait une propriété de second ordre. Ces deux hypothèses échouent. L'espèce homme peut être définie comme la conjonction des deux caractères « animal » et « rationnel ». Mais le carmin ne peut pas pareillement être défini : la « différence spécifique », distinguant le carmin des autres nuances de rouge, n'est rien d'autre qu'une certaine intensité de saturation ; or l'intensité n'est pas un concept indépendant, qui pourrait s'ajouter au caractère « rouge » – l'intensité dont il est question ici est nécessairement une intensité-de-rouge (« nous ne pouvons fixer tout d'abord combien nous en aurons, et décider ensuite s'il s'agit de plaisir ou de masse »). La particularisation du genre en une grandeur ne s'effectue donc pas par l'ajout d'un caractère ; elle n'a pas la forme d'une particularisation d'un genre en une espèce – au mieux, elle est seulement « analogue » à celle-ci. On pourrait alors explorer la seconde branche de l'alternative, et affirmer que le « carmin »

<sup>1</sup> Attention ici au contresens : les niveaux de plaisir ne sont pas des quantités, comme le suggère l'emploi du verbe « *to exist* », mais des grandeurs particulières.

est un élément de la classe des « rouges ». Mais cela ne va pas non plus. La relation entre un élément et l'ensemble auquel il appartient est « externe », au sens où l'élément peut être isolé et considéré indépendamment de son appartenance à l'ensemble en question. La phrase « Platon n'est pas un homme » désigne ainsi, dans les *Principles*, une proposition, qui en l'occurrence est fausse. Or le carmin n'est pas une entité qui a la propriété, parmi d'autres, d'être rouge ; le carmin est *du* rouge, il est essentiellement un degré *de* rouge ; l'énoncé « le carmin n'est pas un rouge » n'a pas de sens, car il n'est pas possible de séparer l'intensité du genre auquel elle appartient (« une intensité *particulière* ne peut être indifféremment intensité de plaisir ou de quelque chose d'autre »).

Le lien entre le carmin et le rouge est donc bien plus étroit que ne l'est la relation entre un sujet et un prédicat. Le même type d'argument qui permet de distinguer la relation grandeur / genre de l'inclusion sert également à la distinguer de l'appartenance. Caractérisation et prédication sont des relations externes : l'identité de chacun des termes de la relation est indépendante de l'autre. Le lien entre une grandeur et son genre est interne : si l'on soustrait le plaisir de l'intensité de plaisir, le rouge du carmin, il ne reste rien, et surtout pas une intensité ou une pure nuance. Le rapport entre une grandeur et son type a donc une forme logique tout à fait particulière, *sui generis* dit Russell, qui ne se réduit ni à la l'appartenance, ni à l'inclusion.

### II.3 : Grandeurs, genres, quantités

Revenons à notre problème initial, celui de l'adhésion russellienne à une conception absolutiste de la quantité. Si la lecture du chapitre XIX, censé présenter les arguments en faveur de la théorie absolue, est décevante, c'est parce que Russell, étrangement, donne les véritables motifs de son adhésion à la thèse absolutiste seulement à la fin du chapitre XX. Le philosophe introduit le passage en disant que « les raisons d'adopter la théorie (absolutiste) ressortiront peut-être plus clairement d'un nouvel examen (de la grandeur plaisir) » (174-175) :

Revenons, pour commencer, à la célèbre proposition de Bentham: « les quantités de plaisir étant égales, le tricot vaut autant que la poésie ». Ici, la différence qualitative entre les plaisirs est le sujet même du jugement ; mais, afin de pouvoir dire que les quantités de plaisir sont égales, il faut pouvoir faire abstraction des différences qualitatives, et accorder une certaine grandeur au plaisir. Si cette abstraction est légitime, la différence qualitative ne doit pas véritablement être une différence de qualité, mais seulement une différence de relations à d'autres termes, comme, dans le cas présent, une différence dans la relation causale. Car ce ne sont pas les états de plaisir dans leurs totalités qui sont comparés, mais seulement – comme la forme du jugement l'illustre bien – leur qualité de plaisir. Si nous refusons de faire l'hypothèse que la grandeur de plaisir est une entité séparée, une difficulté va surgir. Car le simple élément de plaisir doit être identique dans les deux cas, alors même qu'une différence possible de grandeur est requise. Nous ne pouvons par conséquent ni soutenir que seul l'état concret, pris dans sa totalité, existe, et que n'importe laquelle de ses parties est une abstraction, ni que ce qui existe est le plaisir abstrait, non la grandeur de plaisir. Nous ne pouvons pas non plus dire : nous-mêmes abstrayons des états, pris dans leurs totalités, les deux éléments grandeur et plaisir. Car alors nous n'obtiendrions pas une comparaison quantitative des plaisirs. Les deux états s'accorderaient en ce qu'ils seraient des plaisirs et qu'ils seraient des grandeurs. Mais ceci ne nous donnerait pas une grandeur de plaisir ; et cela doterait d'une grandeur les états pris comme des touts, ce qui n'est pas admissible. Par conséquent, nous ne pouvons abstraire les grandeurs en général des états, car, en tant que touts, ils n'ont aucune grandeur. Et nous avons vu que nous ne devons pas abstraire le plaisir tout seul, si nous voulons conserver quelque possibilité d'avoir des grandeurs différentes. En conséquence, ce que nous devons abstraire, c'est la grandeur de plaisir prise comme un tout. Celle-ci ne doit pas être analysée en grandeur et en plaisir, mais doit être abstraite comme un tout. Et la grandeur de plaisir doit exister comme une partie des états de plaisir pris comme des touts, car c'est seulement lorsqu'il n'y a aucune différence, à l'exception, au plus, d'une différence de grandeur, que la comparaison quantitative est possible. Ainsi, la discussion de ce cas particulier confirme pleinement la théorie selon laquelle chaque grandeur est inanalysable et a relativement à la qualité ou la relation abstraite dont elle est une grandeur, une relation analogue à celle d'inclusion dans une classe.



Russell commence par se débarrasser d'un problème potentiel : celui de la critique adressée à l'utilitarisme de Bentham par Mill selon laquelle il n'y aurait pas un seul genre de plaisir, et donc pas de comparaison quantitative possible entre les plaisirs liés au tricot et ceux engendrés par la poésie. Le philosophe se place ici, sans chercher à le défendre, dans le paradigme benthamien : il y a un genre plaisir, et les différences qualitatives entre plaisirs peuvent s'analyser comme « des différences de relations à d'autres termes », en l'occurrence des différences causales. La question que pose Russell est celle de savoir ce qui fonde la comparaison quantitative entre les plaisirs considérés « en tant que tous », par exemple, ce qui fonde la comparaison entre le tricot et la poésie. Russell veut montrer que, si on refuse « de faire l'hypothèse que la grandeur de plaisir est une entité séparée » des tous « concrets » (i.e. si on refuse d'adopter une conception absolutiste), aucun sens ne peut être donné à la comparaison quantitative. Le nerf de l'argument repose sur le fait que, pour être comparés quantitativement, deux plaisirs doivent pouvoir être égaux mais également inégaux.

Imaginons, pour commencer, que nous disions que les deux tous ont en commun le fait qu'ils sont des plaisirs. Cela serait vrai, mais ne suffirait pas à fonder la comparaison quantitative, car ce que l'on cherche à établir, c'est tout autant l'égalité des plaisirs que leur possible inégalité. Une comparaison quantitative ne débouche pas nécessairement sur une égalité, et l'analyse doit préserver la possibilité que deux plaisirs soient d'intensité inégale. La situation ici n'est pas la même que lorsque l'on abstrait l'universel « homme » des tous concrets que forment des hommes particuliers. Platon, Aristote, Platini, ..., malgré leurs différences ont tous en commun d'être des hommes ; le tricot, la poésie, le football... ont eux aussi en commun d'être des activités qui procurent du plaisir ; le problème est que, dans le dernier cas, le plaisir varie « en intensité » selon les activités – ce par quoi les plaisirs « concrets » différents se ressemblent diffère lui-même, ce qui n'a pas d'équivalent dans le cas de l'universel « homme ». La question est de savoir comment appréhender cette différence.

La seconde solution envisagée par Russell est de dire que ce que deux états de plaisirs égaux ont en commun, c'est d'être des plaisirs et d'avoir la même intensité. Ainsi, l'explication de l'égalité entre plaisirs ne nous ferait pas perdre la possibilité de leur inégalité. Deux plaisirs inégaux seraient des états de plaisirs qui ne possèderaient pas la même grandeur. Au lieu d'abstraire un concept, le genre, commun à tous les tous comparés, il faudrait donc, selon cette seconde solution, en abstraire deux, le genre et la grandeur (ou l'intensité). Mais, et c'est à ce stade que les développements du chapitre XIX interviennent, une telle solution ne fonctionne pas. Comme nous l'avons vu, une grandeur particulière ne peut pas être conçue comme la combinaison de deux concepts, une intensité et un genre : on ne peut pas fixer tout d'abord combien on en a, et décider ensuite s'il s'agit de plaisir ou de masse.

La conclusion du raisonnement tombe alors : « ce que nous devons abstraire », ce n'est ni le plaisir seul, ni le plaisir et la grandeur, mais « la grandeur de plaisir prise comme un tout », c'est-à-dire un degré-de-plaisir ou un plaisir-pris-à-une-certaine-intensité. Notons que ce résultat ne tranche pas immédiatement l'alternative conception absolutiste / conception relativiste. Après tout, Russell parle encore ici de « ce que nous devons abstraire » – ce n'est donc pas parce que la relation entre grandeur et genre est interne qu'on ne peut pas imaginer abstraire les grandeurs des quantités. Pour aboutir à sa conclusion, Russell doit ajouter une nouvelle prémisse : « la grandeur de plaisir doit exister comme une partie des états de plaisir pris comme des tous (c-à-d ne doit pas être abstraite des quantités), car c'est seulement lorsqu'il n'y a aucune différence, à l'exception, au plus, d'une différence de grandeur, que la comparaison quantitative est possible ». La comparaison quantitative, celle qui permet de définir les grandeurs comme des classes d'équivalence, présuppose toujours donnée l'identité du genre ; elle présuppose donc qu'une grandeur est toujours une grandeur d'un certain genre. Une masse n'est ainsi jamais quantitativement comparée à une longueur. La relation  $S$

d'égalité quantitative apparaissant dans le membre de gauche du principe (\*) est ainsi toujours déjà relativisée à un genre, et ce fait limite drastiquement son intérêt philosophique. Bien entendu, il est possible de définir les grandeurs comme des classes de quantités égales – mais, dans la mesure où l'égalité en question présuppose l'identité du genre, rien n'aura été gagné dans cette manœuvre purement « formelle ». Pour qu'elle soit tenable, l'option relativiste devrait être plus radicale, et chercher à penser à la fois le genre et la grandeur comme des classes de tous concrets. Mais l'argument que nous venons de présenter interdit cette stratégie : au mieux, ce qui peut être abstrait, ce sont deux concepts indépendants l'un de l'autre, le genre et la grandeur ; or ce n'est précisément pas ce qui est cherché. Le relativiste se concentre sur un faux problème : il veut réduire la grandeur et le genre (les second et troisième étages des schémas présentés plus haut) aux quantités (au premier) ; le réel problème, que son analyse contribue à masquer, est l'articulation des grandeurs et des genres (l'articulation entre le deuxième et le troisième niveau).

On trouve, dans Bigelow & Pargetter 1988, un résumé percutant de la difficulté sur laquelle Russell met ici le doigt (288) :

La théorie des universaux (c'est-à-dire des propriétés et des relations) a pour origine la reconnaissance du fait que, en un certain sens, deux choses distinctes peuvent être à la fois simultanément « les mêmes » et « différentes ». Ceci est, en un sens superficiel seulement, une contradiction. Le conflit disparaît (...) lorsque nous disons que les choses qui sont les mêmes *sous un certain aspect* peuvent être différentes *sous d'autres aspects*. Différentes propriétés et relations constituent ces différents « aspects ». Les quantités causent des problèmes, parce que tout se passe avec elles comme si deux choses pouvaient être « les mêmes » et « différentes » – *sous exactement le même aspect*. Deux choses peuvent être les mêmes, en ce qu'elles *ont* toutes les deux de la masse ; elles peuvent cependant différer en ce que l'une a *plus* de masse que l'autre.

Dans le cas des grandeurs, deux axes, et non pas simplement un, doivent être simultanément considérés : celui des différences entre genres de grandeur, celui des différences entre grandeurs à l'intérieur d'un genre. Russell, qui subordonne les différences quantitatives à celles entre les genres (il n'y a pas de différence de degré inter-genre), soutient que cette situation oblige à singulariser la forme logique du rapport entre grandeurs particulières et genres de grandeur. On ne peut pas isoler les intensités de leurs genres ; on ne peut pas non plus isoler les genres de leurs déterminations intensives (un plaisir qui n'a pas de degré n'est pas un plaisir). La relation entre genres et grandeurs est donc une relation interne. Russell est ainsi contraint de réintroduire par la fenêtre ce qu'il avait chassé par la grande porte (les relations internes), et là est sans doute une des raisons de la difficulté de ces textes. Mais le point essentiel est pour nous le lien entre la question de l'absolutisme et celle des genres de grandeurs. La comparaison avec la partie II et les cardinaux est de ce point de vue éclairante ; si la position relativiste est dans ce contexte philosophiquement pertinente, c'est précisément parce que les nombres n'ont pas de genre<sup>1</sup>. Comme Frege l'a souligné<sup>2</sup>, les nombres s'appliquent à tout ; on peut compter n'importe quoi : des objets concrets et des objets abstraits, des moutons et des mètres, des anges et des Dieux, des satellites et des pensées. Russell partage cette idée : les nombres se disent de classes – il n'y a donc pas différents « genres » de nombre. L'analyse logique n'a ainsi pas à tenir compte des différences entre les sortes de choses qui sont comptées<sup>3</sup>. C'est cette universelle applicabilité qui disparaît lorsque l'on passe des nombres à la grandeur. Ici, il faut, en plus de distinguer les diverses grandeurs, distinguer les différents genres de grandeurs. C'est ce second problème qui, dans le dernier cas, rend la conception relativiste non pertinente. Contrairement à ce qu'avance Levine,

<sup>1</sup> Une telle idée n'est en soi absolument pas absurde. Dans l'ancienne Egypte, les systèmes numériques utilisés pour compter les bêtes d'un troupeau n'étaient pas les mêmes que ceux utilisés pour compter une somme d'argent, par exemple. Les nombres, dirait Russell, avaient ici intrinsèquement un genre.

<sup>2</sup> Frege 1884, §24.

<sup>3</sup> Refait ici surface la distinction « formelle » entre l'usage de (\*) dans le cas des entiers et dans le cas des grandeurs que nous avons évoqué *supra*. : dans le premier, le  $x$  comme les  $a$  et les  $b$  sont des classes ; dans le second, il n'y a pas homogénéité entre les  $a$ ,  $b$  et le  $x$ .

l'approche de Russell est extrêmement cohérente : c'est pour des raisons tenant à la nature de la grandeur que le philosophe renonce à reprendre dans la partie III le schéma utilisé dans la partie II.

## II. 4 : Le couple *determinable* / *determinate* : la théorie de W. E. Johnson

On pourrait objecter que Russell ne paraît pas accorder beaucoup d'importance au problème de la forme logique du rapport entre la grandeur et son genre. Certes, Russell affirme que ce rapport est *sui generis* – qu'il n'est ni assimilable à une relation d'inclusion, ni à une relation d'appartenance. Mais Russell, certainement parce qu'elle l'aurait conduit à revenir sur les relations internes, évite la question plus qu'il ne la résout. La question ne réapparaît ainsi jamais dans les *Principles*. Ne fais-je dès lors pas jouer, dans ce qui précède, au rapport grandeur / genre un rôle qui excède son importance réelle ? Pour étayer mon interprétation, je vais montrer que la question soulevée par Russell, loin d'être marginale, est à la source d'une distinction importante, mise en place par le philosophe et logicien anglais W. E. Johnson (Fellow du King's College lorsque Russell arrive à Cambridge en 1911) dans sa *Logic*, parue en trois volumes de 1921 à 1924 : celle entre « *determinable* » et « *determinate* ».

C'est à Prior que revient le mérite d'avoir, dans un long article paru dans *Mind* en 1949, attiré l'attention des philosophes contemporains sur l'œuvre de Johnson<sup>1</sup> et le caractère absolument fondamental de la distinction qu'il met en place. Prior commence par rappeler que, dans la tradition scholastique, deux parties doivent être distinguées dans le *definiens* d'un nom d'espèce comme « homme » : le genre, ou la partie déterminable du concept (animal pour homme) d'une part, la différence spécifique, ou la partie déterminante de la notion (rationnel pour homme) de l'autre. La relation entre les deux parties est conçue comme étant asymétrique, ce qui signifie que la différence spécifique (« rationnel ») ne peut jouer le rôle du genre (« homme »). Prior explique que cette asymétrie est critiquée par Leibniz, et qu'elle sera abandonnée dans la tradition de l'algèbre logique booléenne. Le concept « homme » y est en effet défini comme une conjonction de deux concepts, « animal » et « rationnel » ; or, la conjonction étant symétrique, il est tout aussi possible de faire jouer à « rationnel » le rôle du genre, et à « animal » celui de la différence spécifique. Cette première critique de la doctrine aristotélicienne est bien connue. Prior affirme toutefois qu'elle n'est pas la seule. Certains philosophes, comme Descartes et Spinoza, souhaitant conserver l'asymétrie, ont refusé de concevoir la distinction entre genre et différence comme une distinction entre deux concepts indépendants. Un mode dans l'*Ethique* n'est pas une combinaison de concepts ou d'attributs, c'est une détermination de l'attribut. Comme l'explique Prior (1949, 7) :

Si Leibniz a apporté de la cohérence à la conception médiévale de la *distinction* du *genus* et de la *differentia* en rendant symétrique leur relation, Spinoza a apporté de la cohérence à la conception médiévale de l'*asymétrie* du *genus* et de la *differentia* en niant leur distinction. Les « modes » spinozistes ne sont pas de nouvelles qualités ajoutées aux attributs, ou des qualités formées par l'addition de quelque chose d'autres, mais des déterminations des attributs.

C'est cette seconde tradition, plus secrète et plus hétérogène<sup>2</sup>, celle de la distinction entre *determinable* et *determinate*, que Prior voit réactiver par Bradley et Bosanquet, et se déployer dans les travaux de Johnson.

---

<sup>1</sup> Johnson (sans doute parce que, comme le note Poli 2004, il a très peu écrit) a été injustement oublié. Son influence a pourtant été réelle. Keynes et Ramsey ont été ses étudiants – et il a eu un impact très important sur des philosophes comme G. F. Stout ou C. D. Broad. Il est l'inventeur de l'opposition *determinable* / *determinate*, *continuant* / *occurent* qui font partie du bagage standard de la philosophie analytique ; il a également développé un théorème probabiliste important qui anticipe de plus de dix ans sur les travaux de De Finetti (voir Zabell 2005 sur ce point).

<sup>2</sup> Prior souligne qu'en plus de Descartes et Spinoza, des philosophes aussi différents que Locke, Bradley et Bosanquet reprendront la même idée ; voir 1949, 7 : « Une tradition qui va de Descartes et Spinoza passe par Locke et aboutit à Bradley

Dans le chapitre XI du premier livre de sa *Logic*, Johnson se concentre en effet sur l'analyse des énoncés de couleur de type « rouge est une couleur » – où rouge est le « *determinate* », couleur le « *determinable* »<sup>1</sup>. Il distingue, en premier lieu, la relation de détermination de celle d'appartenance à une classe. L'argument est le suivant : ce qu'ont en commun les différentes couleurs déterminées, ce n'est rien d'autre qu'un certain type de différence, la différence de couleur, précisément ; rien de commun n'unifie les diverses couleurs, qui ne forment donc, explique Johnson, pas une classe. Comme le remarque Prior, cet argument n'est pas satisfaisant : le champ d'une relation (ici, celle de « différence de couleur ») est en effet une classe. Dans l'introduction à la *Logic* (§9), un autre argument, plus fort, est avancé, très proche de celui que Russell formulait dans les *Principles* :

La relation de *determinate* à son *determinable* ressemble à celle d'un individu à une classe, mais en diffère sous certains aspects importants. Par exemple, si nous prenons un *determinate* quelconque, il y a seulement un *determinable* auquel il peut appartenir.

La relation d'appartenance suppose une certaine forme d'« indépendance » de l'élément par rapport à l'ensemble auquel il appartient ; or, selon Johnson, le *determinable* est en quelque sorte déjà présent dans la détermination. Comme le dit Johnson, le *determinate* est engendré (*generate*) par le *determinable* (I, XI, 2)<sup>2</sup> :

Pour illustrer plus précisément ce que « engendrer » veut dire, considérons le *determinable* « moins de 4 » ; alors « moins de 4 » engendre « 3 », « 2 » et « 1 » au sens où la saisie du sens du premier amène avec elle la notion des derniers. Or aucun nom de classe substantif n'engendre ses éléments de cette façon ; considérons par exemple « les apôtres de Jésus », la compréhension de ce nom de classe amène avec elle la notion « les hommes que Jésus a appelé pour le suivre », mais il n'engendre pas « Pierre et Jean et Mathieu etc... ».

Le *determinates* sont contenus dans le *determinable* de façon interne ; c'est pour ainsi dire le genre qui se particularise et se distingue en lui-même dans ses *determinates*<sup>3</sup> ; on ne peut donc concevoir le *determinable* comme une collection de déterminations.

Mais c'est surtout à la distinction entre détermination et spécification que s'attache le logicien britannique. Le sujet est embrouillé par le fait que Johnson cherche à subsumer le rapport du genre à l'espèce sous la notion de détermination (voir *infra.*), mais l'idée est fondamentalement la suivante (I, XI, 2) :

Une détermination plus poussée d'une prédication adjectivale (...) consiste – non pas en un processus de conjonction d'adjectifs séparés – mais dans le processus qui permet de passer d'un adjectif comparativement indéterminé à un adjectif comparativement plus déterminé sous un *determinable* commun.

La détermination du *determinable* en ses *determinates* ne peut pas se penser sous la forme d'une conjonction de caractères comme le proposait Leibniz ; elle doit se concevoir comme un processus de différenciation interne du *determinable*. Ce caractère interne se manifeste de façon éclatante dans l'idée, développée également par Russell, qu'une chose, possédant une

---

et Bosanquet est une sorte de curiosité philosophique, l'apparition de Locke dans une telle compagnie étant particulièrement étrange. »

<sup>1</sup> Mais dans d'autres contextes, « rouge » peut être le *determinable*, et « telle nuance de rouge » (« carmin ») le *determinate*. Voir Johnson 1921 (I, 11, §2).

<sup>2</sup> Voir également I, XIV, §8.

<sup>3</sup> Une des meilleures illustrations de ce que cherche à exprimer Johnson est fournie par le célèbre texte de Hume sur la nuance de bleu (Hume 1995, 46) : « Plaçons (...) devant (un homme qui n'a jamais vu une certaine nuance de bleu) toutes les nuances différentes de cette couleur, à la seule exception de (celle qu'il n'a jamais vu), en descendant graduellement de la plus foncée à la plus claire : il percevra forcément une absence là où manque cette nuance et il se rendra compte qu'à cet endroit, plus qu'en aucun autre, une plus grande distance sépare les couleurs contiguës. » Hume affirme ici qu'il y a une exception à la règle selon laquelle une idée simple provient toujours d'une impression : le *determinate* correspondant à la nuance de bleu, dans l'exemple précédent, est « engendré » par le seul *determinable* bleu, et par rien d'extérieur à lui.

propriété déterminée, ne peut, par là même, posséder une autre propriété déterminée du même genre (qu'une quantité ne peut avoir des grandeurs différentes appartenant à un même genre). Ainsi (I, V, §4)<sup>1</sup> :

Si un adjectif déterminé caractérise un substantif donné, il est alors impossible qu'un autre *determinate* quelconque du même *determinable* puisse caractériser le même substantif ; par exemple, la proposition 'cette surface est rouge' est incompatible avec la proposition 'cette surface est bleue'.

Cela est impossible parce que la détermination, loin de résulter d'un ajout extérieur, consiste en une particularisation du contenu considéré (ici la couleur) – et que cette particularisation (être rouge), à moins de se nier comme particularisation, exclut nécessairement les autres alternatives.

Les textes de Johnson mériteraient une analyse plus fouillée<sup>2</sup>. Mais nous en savons suffisamment pour reconnaître dans les concepts développés dans la *Logic* certains éléments importants de l'analyse développée dans les *Principles*. Les « *kinds* » russelliens ne sont rien d'autres que les *determinables* johnsoniens, les « *particular magnitudes* » des *determinates*<sup>3</sup>. Les textes commentés plus haut s'éclairent ainsi à la lumière de ceux de Johnson. Russell cherche seulement à montrer que le rapport genre / grandeur est du même type que la distinction *determinable* / *determinate*, et à mettre ainsi à distance la tentation « leibnizienne » de penser la grandeur déterminée comme une conjonction de concepts. L'objectif des deux logiciens est le même : singulariser une forme logique ; et dans les deux cas, cette singularisation s'opère de la même façon, par une opposition au modèle de la prédication, i.e. de l'appartenance et de l'inclusion dans une classe. Notons toutefois l'existence de (au moins) deux différences entre Johnson et Russell. Comme le note Prior, Johnson ne fait pas que juxtaposer sa doctrine de la détermination à la théorie « booléenne » de la combinaison des caractères ; il cherche à penser le rapport genre / espèce comme un cas particulier du rapport *determinable* / *determinate* (I, 11, §3). Les grandeurs par rapport à leur « *kind* » (II, 7), les espèces par rapport à leur genre, les entiers par rapport au concept d'entier sont, tous, chez Johnson, des *determinates*. Russell aurait certainement refusé d'étendre à ce point le modèle « spinoziste ». Une seconde différence provient de la thèse propre à Johnson selon laquelle, si notre connaissance des faits peut être (et même : est en réalité souvent) indéterminée, les faits, eux, ne le sont jamais. La conséquence en est que les *determinables* n'ont jamais d'existence réelle, et appartiennent seulement à la sphère de la pensée<sup>4</sup>. La distinction logique entre *determinable* et *determinate* se redouble donc, chez Johnson, d'une dimension épistémologique : le *determinable* appartient au domaine de la pensée, alors que le *determinate* est un attribut du réel. On ne retrouve pas une telle idée chez Russell ; même si

---

<sup>1</sup> Cf. également I, XIV, §8.

<sup>2</sup> La distinction *determinable* / *determinate* est notamment articulée chez Johnson à la différence fondamentale entre substantif et adjectif. Sur ce point, voir Poli 2004 qui complète utilement Prior 1949.

<sup>3</sup> Johnson prend souvent des exemples relevant de la théorie de la grandeur. Il consacre de plus un chapitre complet de son volume II à l'examen des « *different kinds of magnitudes* », examen basé en grande partie sur une discussion de la théorie des *Principles*.

<sup>4</sup> Dans son introduction au volume I (xxix), Johnson explique ainsi que ce caractère fictif du *determinable* résout le problème de l'objet abstrait, tel qu'il a été posé par Locke. Le triangle quelconque de Locke (celui qui est ni équilatéral, ni scalène, ... mais pourtant tout cela à la fois) est pour lui un *determinable*, qui ne peut être actualisé dans la réalité. La question de la réalité des *determinables* est centrale dans les analyses contemporaines ; elle croise divers sujets très discutés, comme l'existence de propriétés disjonctives, la réalité du vague, etc... Pour une mise au point sur la réception contemporaine de Johnson, voir Poli 2004.

l'auteur des *Principles* affirme ça et là que seule la grandeur déterminée existe<sup>1</sup>, il ne place pas le rapport pensée / réalité au centre de sa discussion<sup>2</sup>.

Malgré ces différences, la similarité entre les théories de Russell et de Johnson est troublante. Ici comme là, on trouve la même insistance sur le fait que le rapport entre grandeur et genre est une relation interne – qu'une grandeur n'est pas la combinaison d'un genre et d'une intensité. Comment expliquer cette convergence ? Une influence directe de Russell sur Johnson est peu vraisemblable ; Johnson ne cite pas les textes (au demeurant obscurs) dans lesquels Russell développe ses réflexions. L'ontologie de Spinoza, dont l'importance est soulignée par Prior et Johnson<sup>3</sup>, n'a pas influencé Russell. L'origine la plus probable de la convergence est à rechercher, semble-t-il, dans la référence commune à Bradley et à Bosanquet<sup>4</sup>. Nous l'avons vu au chapitre 1, Bosanquet soutient que le rapport entre un degré (une quantité) et son genre (la qualité qui sert de support à la comparaison) est « interne », au sens où les deux déterminations sont inséparables l'une de l'autre. Ce point fait partie d'une attaque plus vaste que Bosanquet dirige contre les théories empiristes de l'abstraction (1888, 58-71). Pour Bosanquet, le concept n'est pas l'abstrait, il a « les individus à l'intérieur de lui-même » ; et dès lors, dans la progression de l'abstraction vers l'individualité, « il semble y avoir la place pour une infinité de degrés de concrétude [*infinite grades of concreteness*] » (71). Les différents degrés d'une même qualité sont ainsi eux-mêmes des qualités, qui se différencient à leur tour d'une façon graduée ; inversement, les qualités ou les genres, lorsqu'ils sont comparés présupposent un genre commun, qui fonde la comparaison – ainsi en va-t-il des *determinables* rouge, bleu, etc. qui sont tous des instances (i.e. des *determinates*) d'un même *déterminable*, la couleur. Cet aspect de la dialectique de la quantité, selon lequel tout *determinate* est potentiellement un nouveau *déterminable* (et vice versa), repris par Johnson, montre, de façon éclatante, que les *determinates*, chez les idéalistes, restent dans la sphère de l'universel – qu'ils ne sont conçus ni comme des individus, ni comme d'autres concepts, mais comme un développement du *déterminable*, bref comme un universel concret<sup>5</sup>. Il y a ainsi une réelle parenté conceptuelle entre la théorie de Johnson et celle des idéalistes, auxquels Johnson se réfère souvent (voir notamment, introduction du volume I, xxxii). R. Eaton a donc raison de lier, dans sa *General Logic*, la doctrine johnsonienne des *determinates* et la théorie hégélienne de l'universel concret, telle qu'elle est reprise par Bradley et Bosanquet<sup>6</sup>.

Les similarités conceptuelles de la théorie des « *kinds of magnitude* » et des *determinables* semblent attester d'une commune filiation idéaliste. Il est intéressant de constater que les deux théories pourraient également trouver une postérité commune dans les remarques

---

<sup>1</sup> Voir p. 174 notamment : « Le plaisir, pris abstraitement, n'existe pas ; ce qui existe ce sont divers niveaux [*amount*] de plaisir ».

<sup>2</sup> Ce qui ne veut pas dire que Russell restera complètement insensible à ce genre de considérations. Les développements de Johnson ont beaucoup de point commun avec les textes russelliens plus tardifs relatifs à l'existence des faits négatifs et des faits généraux.

<sup>3</sup> Johnson 1924, 67 : « (La terminologie du *déterminable* et du *déterminé*) doit être spécialement comparée à celle de Descartes et Spinoza. Ce que j'appelle un *déterminable* est presque équivalent à ce qu'ils appellent un attribut, et mon *déterminé* presque équivalent à leur mode d'un attribut. »

<sup>4</sup> Le chapitre 5 de Allard 2005, consacré à l'analyse du jugement négatif et disjonctif chez Bradley, fait ressortir de façon très claire comment les caractéristiques du couple *déterminable* / *déterminé*, notamment le caractère interne de la détermination, sont au fondement de la doctrine bradleyenne ; voir plus particulièrement 108-113.

<sup>5</sup> Foster 1931 fait explicitement le lien ; parlant de l'universel concret chez Bosanquet, il explique (1) : « L'universel ou la 'Forme' peut être conçu non seulement comme une caractéristique universelle isolée existant à côté d'autres dans une incorporation (*embodiment*) particulière, mais comme un concept générique, qui est actif dans la détermination (dans 'l'engendrement' (*generating*)) de ses propres différenciations spécifiques (...). Cette conception de l'universel est exprimée dans la doctrine logique que la différence spécifique d'une espèce n'est pas un autre caractère ajouté au caractère générique, mais une différenciation du caractère générique. »

<sup>6</sup> Voir Eaton 1931, 271. Eaton fait notamment fond sur l'usage du terme « *generate* » (engendrer) par Johnson : « L'universel concret est un principe d'engendrement. Il est l'universel conçu comme engendrant sous-formes et individus, tous différents de lui-même, et dans lesquels cependant il se réalise. »

wittgensteiniennes sur la forme logique des énoncés quantitatifs dans *On Some Remarks on Logical Form*. Le texte est célèbre – il contient la première critique du *Tractatus* (168) :

Je maintiens que l'énoncé qui attribue un degré à une qualité ne peut pas être analysé plus avant, et, de plus, que la relation de différence de degré est une relation interne et qu'elle est donc représentée par une relation interne entre les énoncés qui attribuent les différents degrés. Cela veut dire que l'énoncé atomique doit avoir la même multiplicité logique que le degré qu'il attribue, d'où il suit que les nombres doivent entrer dans les formes des propositions atomiques. L'exclusion mutuelle des énoncés inanalysables de degré contredit une affirmation que j'ai publiée il y a plusieurs années et qui nécessitait que les propositions atomiques ne puissent pas s'exclure l'une l'autre.

L'étude des propositions quantitatives, notamment de l'exclusion mutuelle des assignations de degrés, contredit la doctrine, centrale dans le *Tractatus*, de l'indépendance des propositions élémentaires, explique Wittgenstein. On retrouve ici la même attention portée à la structure logique particulière des énoncés sur les grandeurs, irréductible à la prédication<sup>1</sup>. L'emphasis mise sur l'incompatibilité est présente chez Johnson et chez Russell, l'idée centrale selon laquelle la forme logique de la grandeur est singulière et nécessite une analyse logique qui respecte cette singularité traverse les propos des trois philosophes. Faut-il voir dans la critique wittgensteinnienne une influence de Johnson et/ou de Russell ? Même si Wittgenstein connaissait très bien les deux auteurs (il semble avoir été notamment proche de Johnson<sup>2</sup>), rien ne permet d'attester un tel lien. Si j'ai évoqué la figure de Wittgenstein, ce n'est pas pour retracer une filiation, mais simplement pour convaincre le lecteur que ce problème de la forme logique des propositions quantitatives (celui notamment du rapport entre les grandeurs et leurs genres), s'il est oublié de nos jours, a joué un rôle important dans la première moitié du vingtième siècle – il apparaît en effet dans des œuvres aussi différentes que celles de Bosanquet, Russell, Johnson et Wittgenstein.

## Conclusion

Pourquoi Russell adhère-t-il à une conception « absolutiste » de la quantité, alors qu'il défend par ailleurs une théorie relativiste des « nombres » ? Parce que les nombres se disent de toutes les choses, alors que les énoncés quantitatifs s'appliquent toujours à un genre déterminé d'objets. La doctrine de la grandeur doit donc intégrer un élément (l'existence de genres) que la théorie des nombres peut (et même ne peut pas ne pas) laisser de côté. C'est selon moi cette différence qui explique le refus russellien d'abandonner la doctrine absolutiste en ce qui concerne les grandeurs. Il est bien vrai que, lorsque l'on se donne la distinction des « *magnitudes* » en « *kinds* », il est possible de définir les grandeurs comme des classes de quantités égales. Mais précisément, on se donne alors ce qu'il faut penser, i.e. la relation des grandeurs à leurs genres respectifs. Les théories « relativistes », au mieux, ignorent ce dernier problème – au pire, conduisent à concevoir les grandeurs déterminées comme des combinaisons d'une grandeur et d'une intensité, ce qui est philosophiquement catastrophique. L'analyse de Russell est forte. Elle se rattache à une tradition mise à jour par Prior, remontant à Spinoza, et courant jusqu'à Johnson, qui refuse de concevoir la détermination d'un concept comme une conjonction de caractères. Dans la partie I des *Principles*, Russell adopte l'algèbre

---

<sup>1</sup> La question de savoir quelle est la forme logique des propositions élémentaires du *Tractatus* est fort débattue ; il n'est pas certain que Wittgenstein les conçoive comme des prédications. Mon point est toutefois indépendant de cette question. Les propositions élémentaires wittgensteiniennes partagent avec les propositions prédictives le fait de ne pas s'exclure mutuellement : « *Fa* » ne contredit pas « *Gb* » – ni « *Fb* », ni « *Ga* ». Ce trait éloigne à la fois les propositions élémentaires et les propositions prédictives de la forme logique des énoncés quantitatifs – c'est sur ce trait que je m'appuie ici.

<sup>2</sup> Sur les rapports entre Wittgenstein et Johnson, voir Monk 1990, 262. Une influence de la *Logic* de Johnson sur les premiers textes du second Wittgenstein ne semble pas improbable.

booléenne. Le philosophe ne cherche donc pas, à la différence de Johnson, à s'opposer frontalement à ce que Prior identifie à la veine leibnizienne. Dans les textes sur les « *kinds of magnitudes* » que nous avons étudiés, Russell restreint cependant la portée de ces calculs : la logique de la combinaison des caractères ne s'applique pas à la grandeur. C'est ce point que ratent les « relativistes ».

Il n'y a donc pas d'incohérence chez Russell. L'analyse de Levine, qui prétend le contraire, pêche par son excessif « formalisme ». Levine constate que dans la partie II et dans la partie III, Russell tire des conclusions diamétralement opposées d'un même « principe » logique (\*). Il en conclut à l'existence d'une contradiction – ou plutôt, d'un anachronisme. Mais qu'y a-t-il de contradictoire à ce qu'un même principe soit appliqué de façon variée en fonction du contexte ? Russell, à la différence de Couturat par exemple, refuse de réduire la logique à une méthode formelle, indifférente au contenu auquel elle s'applique. Comme Landini ne cesse de le répéter : pour Russell, la logique est une science, qui a un objet propre. Il n'est donc pas possible, lorsqu'on étudie Russell, de séparer, comme le fait précisément Levine, les principes de l'analyse logique de leurs contextes d'application. Le contenu étant logique, méthode et objet ne peuvent être opposés – ou tout du moins, cette distinction doit elle-même être relativisée, approfondie et complexifiée. Dans ce qui précède, j'ai cherché à montrer que les variations dans l'usage du principe (\*) avaient des raisons profondes, qui tenaient aux caractéristiques des objets considérés, les nombres d'une part, les grandeurs de l'autre. L'analyse de Russell n'est pas aveugle – elle n'est pas *topic-neutral* ; elle s'ajuste, elle s'adapte aux caractéristiques fines des domaines sur lesquels elle s'exerce.

Un mot, pour finir, sur l'évolution de la pensée russellienne. Qu'est-ce qui change entre Russell 1897c et 1900b d'une part, et Russell 1903 de l'autre ? Deux choses, essentiellement. Nous avons vu dans le chapitre 1 que Russell accorde beaucoup d'importance, dans ses premiers textes, aux grandeurs relationnelles, notamment aux distances. Dans les *Principles*, en revanche, les grandeurs relationnelles sont un genre parmi d'autres de grandeurs. Cela ne signifie toutefois pas que le concept de distance disparaisse de l'horizon : les distances sont une des deux sortes de grandeur mesurable et nous verrons dans le prochain chapitre qu'elles jouent un rôle fondamental en géométrie. La seconde différence concerne le rapport à l'idéalisme. En 1897, Russell, suivant Bosanquet, affirme que la notion de grandeur est contradictoire. Cette thèse n'est plus d'actualité dans les *Principles*. Là encore, la dialectique de la quantité n'est cependant pas pour autant abandonnée : elle informe profondément, on vient de le voir, l'analyse que Russell développe des relations entre grandeurs et genres de grandeurs. Le tableau des rapports entre les premiers textes de Russell et les *Principles* n'est pas simple à dresser. Il y a des ruptures, mais ces ruptures ne sont pas exclusives de continuités réelles. Les problèmes se reformulent, se déplacent ; ils ne disparaissent pas. Un fait cependant, que je n'ai pas encore mentionné, doit être pris en compte lorsque l'on se penche sur cette évolution : la lecture, décisive, que fait Russell en 1899 de *Über die Bedeutung des Weber'schen Gesetzes*, un des premiers ouvrages de Meinong. Je commencerai le prochain chapitre par une étude de la réception que Russell fait de Meinong.



## Chapitre 3

### La grandeur mesurable et le statut de la géométrie métrique dans les *Principles*.

#### Introduction

Je poursuis dans ce chapitre l'analyse de la théorie de la quantité des *Principles*, en me penchant plus particulièrement sur la doctrine de la grandeur mesurable. Cette question est, chez Russell, liée à celle de la géométrie métrique, que le philosophe caractérise dès l'*Essay* comme géométrie quantitative par opposition aux géométries projective et descriptive (qui ne font appel à aucune notion de grandeur ou de mesure). Or, ce n'est pas dans la partie III, mais dans la partie VI des *Principles*, consacrée à l'espace, que les géométries euclidienne et non euclidiennes sont examinées. L'objet de ce chapitre est d'étudier le rapport entre théorie de la grandeur (partie III) et théorie de la métrique (partie VI). Y a-t-il une convergence, ou bien au contraire opposition entre les deux développements ? Comment l'analyse générale de la grandeur, et plus particulièrement de la grandeur mesurable, s'insère-t-elle dans le contexte de l'analyse des géométries métriques ? La thèse fondamentale de Russell est qu'il n'y a pas une, mais deux sortes de métrique, constamment confondues : une géométrie empirique qui porte sur la grandeur de divisibilité des *stretches* (des segments) d'une part, une géométrie mathématique qui porte sur les *distances* relationnelles spatiales, d'autre part. La distinction entre les deux genres de grandeurs mesurables, les « grandeurs de divisibilité » et les « distances », effectuée dans la partie III, constituerait donc la base de la théorie développée dans la partie VI. Mais comme nous aurons l'occasion de le voir, cette cohérence globale ne signifie pas qu'il n'y ait aucune difficulté et aucune tension dans l'articulation des deux textes.

C'est dans un des premiers ouvrages du philosophe autrichien A. Meinong, *Über die Bedeutung des Weberschen Gesetzes*, que Russell trouve l'idée centrale selon laquelle une confusion est constamment commise entre deux types de grandeurs, la divisibilité et la distance. La théorie de Meinong et sa reprise par Russell sont analysées dans la première section de ce chapitre. Dans la seconde section, j'étudie la théorie de la géométrie métrique exposée dans la partie VI des *Principles*. Russell développe trois définitions différentes de la longueur. Les deux premières, la définition « projective » et la définition axiomatique « directe » (plus marginale) présentent la longueur comme un concept purement logique ; la troisième fait de la longueur une notion empirique. J'expliquerai pourquoi Russell considère que la géométrie métrique empirique, celle qui porte sur les grandeurs de divisibilité, est la plus fondamentale. La dernière section est un examen comparatif des conceptions de Poincaré et de Russell. On oppose généralement frontalement les deux penseurs, en se basant surtout sur les articles que Russell a écrits en réponse aux attaques de Poincaré. La prise en compte des *Principles* permet de compliquer l'image que l'on se fait de la controverse, en montrant que Russell et Poincaré partagent beaucoup plus de prémisses communes qu'on ne le croit habituellement.

#### I- Meinong et la distinction entre « distance » et « magnitude of divisibility »

Meinong écrit en 1896 un ouvrage peu connu, consacré à la mesure psychophysique, *Über die Bedeutung des Weberschen Gesetzes*, dans lequel il développe, à l'occasion d'une défense de la mesure psychophysique, une distinction entre deux sortes de grandeur, les « différences » et les « dissimilarités »<sup>1</sup>. Russell écrit en 1899 un compte-rendu extrêmement favorable du traité, et fait de la distinction meinongienne la matrice de sa différence entre les distances et les grandeurs de divisibilité. Je vais présenter les principales thèses de Meinong<sup>2</sup>, puis dire un mot de la réception russellienne. Dans un dernier moment, je reviendrai sur la notion de grandeur de divisibilité.

## I-1. Les thèses de Meinong et la réception russellienne

Le but de Meinong 1896 est de combattre la thèse de Von Kries selon laquelle la mesure psychophysique est impossible. Le savant (Von Kries est professeur de physiologie à Freiburg) reprend la distinction kantienne entre grandeurs extensives, divisibles (qui sont telles que, comme le dit Kant, « la représentation de leurs parties précède la représentation du tout »), et grandeurs intensives, indivisibles. Pour Von Kries, seules les grandeurs extensives, c'est-à-dire selon lui, spatio-temporelles<sup>3</sup>, sont directement mesurables. Les autres, seulement indirectement mesurables, se répartissent en deux groupes : les quantités dérivées de la longueur, de la durée et de la masse (la vitesse, le moment, etc...) pour lesquelles la mesure ne présente aucune difficulté ; les quantités non dérivées, qui ne deviennent mesurables que lorsqu'une relation conventionnelle avec les quantités fondamentales est définie. Von Kries souligne toutefois que l'arbitraire de ces conventions de mesure est étroitement limité ; ainsi, la relation d'ordre comme la relation d'égalité entre quantités doivent être transitives<sup>4</sup>. Or, à cause des phénomènes de seuil, fondamentaux dans la dérivation de la loi de Fechner, l'égalité entre intensité sensorielle n'est pas transitive. Il est donc impossible, selon Von Kries, de mesurer les sensations. Même si Meinong ne partage pas, comme on le verra, le point de vue de Fechner, il refuse de condamner avec Von Kries, la mesure psychophysique. Meinong est ainsi amené à définir la quantité directement comme quantité intensive, c-à-d (il reprend la terminologie kantienne) comme distance par rapport à un zéro. Certaines quantités se trouvent être, en plus, divisible ; mais la propriété de divisibilité ne constitue pas l'essence de la grandeur. Bien entendu, cette thèse rappelle celle de Russell. Mais Russell prend bien soin, dans une note à la fin du chapitre XIX, de distinguer sa position de celle de Meinong (168) :

(L'ouvrage de Meinong sur la loi de Weber) commence par une caractérisation de la grandeur comme ce qui est limité du côté de zéro. Zéro est compris comme la négation de la grandeur, et à la suite d'une discussion, la formulation suivante est adoptée (p. 8) : « Est grandeur ou a de la grandeur ce qui permet l'interpolation de termes entre soi et son opposé contradictoire. » Que ceci constitue une définition ou un simple critère est laissé sans réponse (...), mais quoi qu'il en soit, une telle caractérisation fondamentale de la grandeur me paraît être insatisfaisante. Elle tire un appui, comme Herr Meinong le souligne (...), de sa similarité avec les « Anticipations de la Perception » de Kant.

Russell reproche à Meinong de ne pas avoir su caractériser la quantité intensive à partir de la relation d'ordre. Il critique notamment l'usage qui est fait de la notion d'« interpolation » (qui

---

<sup>1</sup> Russell traduit par « dissimilarity » le « *Verschiedenheit* » de Meinong. Nous reprenons la traduction de Russell.

<sup>2</sup> Sur Meinong 1896, voir Guigon 2006 et Potrc & Vospernik 1996.

<sup>3</sup> Von Kries réserve à la masse une place à part. La masse n'est pas une quantité spatio-temporelle ; une convention stipulant les conditions dans lesquelles deux masses sont dites égales doit donc être formulée. Mais la masse fait cependant partie, pour Von Kries, des quantités fondamentales auxquelles les autres grandeurs mesurables peuvent être réduites.

<sup>4</sup> Voir Darrigol 2002, 538-539.

est, selon Russell, dérivée du concept d'ordre) et de la notion de distance par rapport à un  $0^1$ . La priorité de l'intensif sur l'extensif, de l'ordinalité sur la divisibilité, n'est donc pas le point le point d'accord le plus important entre Russell et Meinong. Il faut creuser plus profond dans *Über die Bedeutung des Weberschen Gesetzes* pour voir apparaître les formations qui sont au cœur de la lecture russellienne.

Meinong, dans son ouvrage, développe trois thèses importantes. La première est que l'on confond constamment certaines grandeurs mesurables relationnelles avec certaines autres grandeurs divisibles ; la seconde, que cette confusion s'explique par le fait que l'on ne peut mesurer les grandeurs relationnelles qu'en mesurant leurs corrélats divisibles ; la troisième que la distinction en question ouvre la voie à une nouvelle interprétation de la loi de Weber. Commençons par la première proposition, pour nous la plus fondamentale. Russell explique dans son compte-rendu que (1899d, 252) :

La première section de (Meinong 1996) consiste en une discussion de la nature et du domaine de la quantité. On y fait observer que les quantités ne sont pas divisibles, car des relations peuvent être des quantités. La distance dans l'espace, par exemple, est incontestablement à la fois une quantité et une relation : supposer la distance divisible ne peut se produire que si l'on confond distance et *Strecke*. De la même façon, (...) similarité et dissimilarité sont des quantités : deux choses peuvent être plus ou moins similaires, mais la similarité est certainement indivisible.

Ce passage a une importance considérable. Russell attribue à Meinong deux positions extrêmement originales. Meinong défendrait d'abord l'idée que certaines grandeurs sont relationnelles et donc non divisibles. Il établirait ensuite une distinction entre deux types de grandeurs géométriques, les distances (*Distanz*) d'une part, les segments (*Strecke*) de l'autre. Comme Russell le précise un peu après, cette différence entre *Distanz* et *Strecke* est en réalité l'application d'une distinction plus générale entre les *Verschiedenheit* (les dissimilarités qui sont des grandeurs relationnelles) et les *Differenz* (qui sont des grandeurs additives non relationnelles). Ainsi, la longueur entre un point *A* et *B* peut être vue, selon Meinong, de deux façons : soit comme la grandeur d'une relation entre les points *A* et *B* ; soit comme la grandeur d'un segment divisible, le segment *[AB]*. Dans le premier cas, la longueur est une « dissimilarité » ; dans le second, elle est une « différence ». Bien entendu, ces thèses meinongiennes rappellent très fortement celles que Russell développe en 1903. Le philosophe affirme lui-aussi qu'il y a des grandeurs relations, qu'il nomme d'ailleurs « distance ». Ce point n'est peut-être toutefois pas le plus important ; on l'a vu, l'idée que les grandeurs peuvent être conçues (et même doivent être conçues) comme des relations remontent au moins à 1897, et le développement de la théorie de la distance de 1900b ne paraît pas lier à Meinong 1996. En revanche, la distinction entre les *Distanz* et les *Strecke*, et plus généralement, celle entre dissimilarité et différence, est très certainement l'origine de la distinction russellienne entre « distances » et « stretches », et plus généralement, entre « distances » et « grandeurs de divisibilités », c-à-d à l'origine de la différence entre les deux grandeurs mesurables « au sens étroit » (voir chap. 2) distinguées dans les *Principles*.

Avant de poursuivre l'analyse de la réception russellienne de la première des trois thèses de Meinong, quelques mots sur les deux autres. La seconde concerne la « *surrogativ Messung* », que Russell traduit dans son compte-rendu par « *substitutive measurement* ». Meinong ajoute à la distinction, proposée par Von Kries, entre mesure directe et mesure indirecte (§13), une autre distinction (§14), celle entre mesure propre (*eigentliche*) et mesure substitutive (*surrogative*). La mesure substitutive s'applique aux grandeurs indivisibles relationnelles

---

<sup>1</sup> Voir notamment Russell 1903, 419 : « La notion qui prend la place traditionnellement assignée à la quantité est l'ordre ; mais la pureté de la notion d'ordre a été beaucoup obscurcie par la croyance que tout ordre dépendait de la distance – une croyance que, bien qu'elle ait été entretenue par des écrivains aussi excellent que Meinong, nous avons rejeté comme fausse ». Voir également 1903, 171-172, 254-255

comme la dissimilarité et la distance. Meinong affirme que dans certain cas, une grandeur divisible correspond à la grandeur relationnelle considérée ; ainsi à une *Distanz* meinongienne correspond un *Strecke*. L'idée de Meinong est alors d'utiliser la mesure de la grandeur divisible corrélée pour mesurer la dissimilarité. C'est en ce sens qu'il parle de mesure impropre ou substitutive (281-282) :

Dans ces cas, ce qui tient lieu d'une mesure de *A* est en réalité plutôt une mesure d'un certain *B*. Lorsque nous mesurons une *Distanz*, c'est en réalité le *Strecke* qui lui est associé qui est réellement mesuré, non la *Distanz*.

Au §22 de son 1896, il précise la forme du rapport entre la mesure d'une dissimilarité et celle de la différence qui lui correspond. Citons Russell, qui résume le raisonnement de Meinong (1899d, 254) :

Pour trouver une fonction mesurant la dissimilarité, certaines conditions doivent être posées : (1) la dissimilarité doit disparaître lorsque les quantités sont égales ; (2) elle doit être infinie lorsque la quantité est finie et que l'autre est nulle ; (3) la dissimilarité entre *A* et *B* plus celle entre *B* et *C* doit être égale à celle entre *A* et *C*.

Meinong en conclut que la dissimilarité est proportionnelle au logarithme de la différence – donc que la *Distanz* est proportionnelle au logarithme du *Strecke*. Le point important est que la forme fonctionnelle liant les mesures directes aux mesures substitutives n'est pas le résultat d'une convention ; la relation en question est, chez Meinong, déduite *a priori* d'une équation fonctionnelle, résultant elle-même de l'analyse du rapport entre les deux types de mesure<sup>1</sup>. À la différence de ce qui se passe chez Von Kries, aucune place n'est laissée ici à des stipulations arbitraires.

Venons-en maintenant à la dernière thèse de Meinong, i.e. à sa défense de la possibilité de la mesure psychophysique. Comme Von Kries, Meinong se montre extrêmement critique à l'égard de Fechner. Pour lui, l'interprétation fechnerienne de la loi de Weber en termes de plus petite différence discernable est indéfendable. Soient  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$  quatre stimuli (quatre masses par exemple) et soient  $e_1, e_2, e_3, e_4$  les quatre sensations correspondantes (quatre sensations de poids sur la main). Fechner interprète la loi de Weber de la manière suivante :

$$(F) \quad S_1 / S_2 = S_3 / S_4 \Rightarrow e_1 - e_2 = e_3 - e_4.$$

Les différences entre sensations varient en proportion des rapports de leurs stimuli. De (F), et de l'hypothèse de constance des seuils perceptifs, on peut déduire la célèbre loi « logarithmique » suivante ( $e$  étant l'intensité sensorielle correspondant au stimulus  $S$ )<sup>2</sup> :

$$e = C \times \log S \quad (\text{où } C \text{ est une constante strictement positive}).$$

Pour Meinong comme pour Von Kries, les sensations étant non divisibles, la différence entre intensités sensorielles, donc le conséquent de (F), n'a absolument pas de sens. Von Kries a donc raison de rejeter la théorie de Fechner ; il a cependant tort, selon Meinong, de jeter le bébé avec l'eau du bain et de déclarer absurde la loi de Weber elle-même. L'erreur de Fechner n'est en effet pas d'avoir voulu mesurer des sensations, mais d'avoir confondu entre différence et dissimilarité. C'est la dissimilarité – non la différence – entre sensations qui est

<sup>1</sup> On pourrait ainsi voir dans le lien de dépendance entre mesure directe et mesure substitutive une première occurrence des relations de dépendance formelle entre les différents ordres d'objets que Meinong mettra à jour dans *Über Annahme* ; voir Potrc & Vospernik 1996.

<sup>2</sup> Il est pour Meinong cohérent que la loi soit logarithmique ; (F) corréle en effet des différences (conséquent de l'implication) à des dissimilarités (antécédent de l'implication).

corrélée par Weber à la dissimilarité entre stimuli. Autrement dit, à la place de (F), Meinong propose l'implication suivante :

$$(M) \quad S_1 / S_2 = S_3 / S_4 \Rightarrow e_1 / e_2 = e_3 / e_4,$$

d'où il déduit une nouvelle forme de loi psychophysique – une loi « puissance » et non logarithmique :

$$e = C \times S^k \quad (\text{où } C \text{ et } k \text{ sont des constantes positives}).$$

Meinong ne justifie pas la substitution de (F) par (M) par des raisons empiriques. C'est le raisonnement *a priori* suivant qui semble guider son analyse : il faut distinguer entre mesure des différences et mesure des dissimilarités ; cette distinction n'est pas faite par Fechner ; or, lorsqu'on réintroduit cette distinction, les principales critiques contre la possibilité d'une loi psychophysique (la non divisibilité des sensations) tombent<sup>1</sup>. Ce raisonnement n'est pas, pour plusieurs raisons, très convaincant – la question de la transitivité de l'égalité quantitative n'est pas traitée de façon satisfaisante, le rapport à l'expérimentation est pour le moins étrange<sup>2</sup>. Reste que l'alternative entre loi « puissance » et loi « logarithme » n'est pas une lubie meinongienne ; comme nous aurons l'occasion de le voir au chapitre 6, elle traverse l'histoire du développement de la psychophysique jusque dans les années 1960<sup>3</sup>.

Russell n'est cependant pas intéressé en 1903 par les problèmes relatifs à la mesure psychophysique. Sa réception de Meinong se fait dans un tout autre contexte : celui d'une interrogation sur le statut de la géométrie métrique. Dans cette perspective, ce qui va très profondément marquer Russell est l'idée que deux grandeurs différentes, l'une relationnelle, l'autre extensive, sont parfois mesurées par la même procédure. Le philosophe anglais, contrairement à son collègue allemand, ne voit pas dans ce fait la clé d'une extension de la mesure à des grandeurs non divisibles, mais plutôt la source d'une clarification conceptuelle concernant le statut de la géométrie métrique. En bref, Russell considère que lorsque l'on parle de longueur, on confond habituellement deux choses : la longueur au sens de relation (la *distance* meinongienne-russellienne) et la longueur au sens de divisibilité (le *stretch* meinongien-russellien). Que la ressemblance entre deux couleurs soit une relation, et non pas une nouvelle couleur, ne fait aucun doute ; que la masse soit divisible, et non relationnelle, ne pose non plus aucun problème. Mais le cas de la longueur est difficile précisément parce qu'il combine sans les distinguer les deux structures : une longueur est à la fois une relation et une totalité divisible. Aux yeux de Russell, l'intérêt de Meinong est d'avoir permis de se défaire d'une erreur provenant de notre attachement excessif à l'exemple faussement simple de la longueur. Comme il l'explique dans le compte-rendu (1899d, 254) :

La distinction (entre différence et dissimilarité) est d'une grande importance. Elle est (...) une distinction que les mathématiques et l'attention exclusive aux quantités spatio-temporelles tendent à dissimuler.

<sup>1</sup> Pour une analyse plus poussée de la démarche de Meinong, nous renvoyons à Potrc et Vospernik 1996, 200-202.

<sup>2</sup> Meinong consacre la fin de son traité à la réfutation d'une expérience, faite par Merkel, visant à prouver que la sensation partageant en leur « milieu » deux sensations données correspond à la moyenne arithmétique des stimuli. Même si Russell partage les critiques que Meinong adresse à Merkel, il qualifie d'« optimiste » sa discussion de la loi de Weber.

<sup>3</sup> Tout le travail du grand psychophysicien Stanley S. Stevens vise notamment à établir, contre Fechner, que des rapports de sensations égaux correspondent à des rapports de stimuli égaux, et qu'en conséquence, la loi unificatrice de la psychophysique est une loi puissance ; voir Stevens 1986, chap. 1. Stevens justifie un tel changement par de nombreux arguments essentiellement empiriques. Mentionnons en un, de nature évolutionniste : pour la survie de l'espèce, il est fondamental que la perception des rapports entre stimuli (et non des différences) soient constantes. Stevens donne l'exemple de la perception d'un paysage lorsque le soleil soudainement se voile : pour continuer à voir les limites entre les corps, il est nécessaire que les contrastes entre les frontières restent stables. Stevens, dans l'historique qu'il consacre à la question, ne mentionne pas Meinong.

Ce thème est repris de nombreuses fois dans les *Principles*. Ainsi, Russell explique, après avoir introduit, dans le chapitre XXI, la grandeur de divisibilité, puis la distance, que (1903, 181) :

L'importance de la mesure numérique de la distance, tout du moins en tant qu'elle est appliquée à l'espace et au temps, dépend en partie d'un autre fait, par lequel elle est mise en relation avec la mesure numérique de la divisibilité (i.e. le *stretch*). (...) On a alors besoin d'un axiome, qui peut ou non valoir selon les cas, pour affirmer que des *stretches* égaux correspondent à des *distances* égales. Dans ce cas, les coordonnées mesurent deux grandeurs complètement distinctes, qui, à cause de leur mesure commune, sont perpétuellement confondues.

La distinction entre les deux genres de grandeur est beaucoup plus facile à établir, observe d'ailleurs Russell, lorsque l'on prend pour objet d'étude d'autres grandeurs géométriques, comme les aires ou les volumes, immédiatement conçues comme divisibles, ou comme les angles, d'emblée définis comme des relations (1903, 182) :

Sur la ligne droite (...) on a deux grandeurs philosophiquement distinctes, mais pratiquement toujours conjointes, à savoir la distance et la divisibilité du *stretch*. La première est similaire aux angles ; la seconde aux aires et aux volumes. Les angles peuvent (...) être considérés comme des distances entre les termes d'une série, à savoir entre les droites passant par un point ou les plans passant par une droite. Les aires et les volumes, en revanche, sont des sommes ou des grandeurs de divisibilité. À cause de la confusion entre les deux genres de grandeurs liés à la droite, soit les angles, soit les aires et les volumes sont habituellement incompatibles avec la philosophie élaborée pour la droite.

Les philosophes de la géométrie n'ont, pour ainsi dire, vraiment pas de chance : le cas qu'ils prennent toujours pour exemple, celui des longueurs unidimensionnelles, est précisément un cas extrêmement particulier, où la distinction fondamentale sur laquelle met l'accent Meinong est la moins visible. Bâtir une théorie de la grandeur mesurable en se focalisant sur la distance géométrique présente donc un sérieux danger : celui de ne pas saisir que le terme « métrique » recouvre non pas une, mais deux sortes de réalité complètement différentes.

L'importance de cette idée ne peut pas être surestimée. Toute la théorie russellienne de la géométrie métrique en dépend<sup>1</sup>. Russell se base en effet, comme nous le montrerons, sur cette distinction pour distinguer deux sortes de géométrie : l'une relevant des mathématiques pures et portant sur la « distance », l'autre relevant de la science empirique et portant sur le « *stretch* ». Ainsi, d'un point de vue russellien, il est vain de vouloir répondre univoquement à la question du statut, empirique ou non, de la géométrie métrique. La géométrie métrique n'existe pas pour Russell ; derrière ce terme, il y a, en réalité, deux sciences différentes, toujours confondues, qui n'ont pas le même objet et donc pas le même statut.

Avant d'étudier de plus près la théorie de la métrique, c'est-à-dire avant de quitter la partie III pour aborder la partie VI des *Principles*, il n'est pas inutile de passer en revue certains points difficiles de la doctrine des grandeurs de divisibilité. J'ai déjà analysé en détail la théorie de la *distance* dans le chapitre 1 et le chapitre 2. Rappelons ainsi que la distance est, pour Russell, un groupe de transformations ordonné dense et complet agissant régulièrement sur un ensemble  $\lambda$  ; puisqu'aucune référence n'est faite dans cette définition à une constante non logique, la notion de distance est, dans la partie III des *Principles*, un concept purement mathématique. Si j'ai longuement parlé du concept de distance, je n'ai en revanche pratiquement rien dit du concept de *stretch* (de *magnitude of divisibility*) – rien dit notamment de son statut, logique ou empirique. Je vais dans ce qui suit réparer cette lacune et examiner de plus près les problèmes posés par la notion.

## II-2. Les grandeurs de divisibilité

---

<sup>1</sup> Russell le dit lui-même à de nombreuses reprises. Voir *Ibid.* 181-182, 255, 428 ; voir notre section 2.

Lorsqu'un agrégat est fini, sa divisibilité est assimilée à sa cardinalité. Mais une telle simplification est impossible lorsque les agrégats sont infinis comme c'est le cas en géométrie. La divisibilité d'un *stretch* n'est pas identique au nombre de ses points. On l'a vu, Russell affirme que la grandeur de divisibilité d'un segment dépend du nombre de ses « parties ». Mais de quelles parties parle-t-il exactement ? Le texte le plus complet sur le sujet est le paragraphe 397 de la partie IV des *Principles* – ajouté au dernier moment lors de la correction des épreuves<sup>1</sup>. Le contexte est géométrique : il s'agit de donner un sens à la notion de divisibilité d'un segment (*stretch*). Après avoir rappelé que la divisibilité d'un *stretch* n'est pas sa cardinalité, Russell fait l'aveu suivant (412) :

Il n'est vraiment pas facile de définir exactement quelle est la propriété requise : car deux *stretches* quelconques sont ordinalement similaires. Nous avons besoin de donner un sens à l'égalité et l'inégalité des relations dont les champs sont les *stretches* considérés.

Si on ne peut assimiler la divisibilité d'un *stretch* à sa cardinalité, on ne peut pas non plus l'identifier à son type d'ordre. Deux intervalles fermés de la droite réelle ont la même cardinalité ; ils sont également ordinalement isomorphes. Russell voit que la divisibilité est une notion plus fine que la cardinalité ou le type ordinal, mais il ne parvient cependant pas à caractériser la structure additionnelle. Dans la suite du paragraphe, il propose deux approches, qui se révèlent également insatisfaisantes. La première consiste à définir la grandeur d'un *stretch* à partir de ses coordonnées (412) :

Là où des coordonnées (...) ont déjà été introduites, nous pouvons définir la grandeur d'un *stretch* par la différence des coordonnées de ses extrémités (...) ; mais, lorsque ceci est effectué, la grandeur des *stretches* dépend de la façon nécessairement plus ou moins arbitraire par lequel nous avons introduit nos coordonnées.

Rappelons que la divisibilité est une grandeur, non un nombre. Pour la définir, Russell propose ici d'introduire des coordonnées, et de dériver la divisibilité comme une fonction des nombres attachés aux extrémités du *stretch*. La solution est inacceptable car elle est circulaire. Elle consiste à renvoyer le problème de la définition de la divisibilité à celui de l'introduction d'un système de coordonnées non arbitraire. Mais que signifie « non arbitraire » dans ce contexte ? Un système non arbitraire est un système de coordonnées permettant de mesurer la divisibilité des *stretches*. On ne gagne donc rien à renvoyer la notion de divisibilité à celle de système de coordonnées. La seconde tentative n'est pas plus convaincante. Elle consiste à considérer que les *stretches* sont engendrés par des relations et à poser des conditions sur ces relations. Russell semble donc vouloir définir les divisibilités à partir des distances relationnelles qu'il sait mesurer (voir chap. 1). La démarche semble condamnée d'avance. Comme nous avons commencé à le voir, toute la théorie russellienne de la géométrie est structurée par la distinction entre *stretch* et *distance*. Définir les premiers par les seconds conduit à déséquilibrer l'ensemble de l'édifice<sup>2</sup>. Au final, Russell n'a tout simplement aucune solution à apporter à un problème pourtant crucial, celui du sens de l'expression « grandeur de divisibilité ». À la fin du §397, il se contente de répéter que la géométrie métrique ne porte pas sur une classe de points, mais sur certains types de relations entre points, sans pour autant parvenir à déterminer la nature de ces relations.

<sup>1</sup> Byrd 1999, 60. Le fait que cette clarification intervienne extrêmement tardivement montre à lui seul la fragilité conceptuelle de la théorie de la divisibilité.

<sup>2</sup> Russell expédie en quelques lignes ce qui nécessiterait un long développement – tout cela sent vraiment la précipitation. Russell est ainsi amené à parler de la « grandeur de divisibilité des relations » engendrant les *stretches*. *Stricto sensu*, « grandeur de divisibilité de relation » n'a aucun sens.

Tentons de comprendre les raisons d'une telle faillite. Ce que veut faire Russell est au fond simple : donner un sens à ce qu'Euclide nommait déjà la relation de mesure entre deux segments. Un segment  $A$  en mesure un autre  $B$ , explique Euclide, lorsque  $B$  le contient un nombre entier de fois. La définition cantorienne de la cardinalité interdit cependant d'assimiler ce dénombrement à un nombre cardinal. Comment, dans le nouveau cadre cantorien, définir la notion euclidienne de mesure ? Russell évoque le concept topologique d'ordre, mais il saisit immédiatement l'insuffisance de ce type de considérations. Parvenu à ce stade, il paraît toutefois abandonner la partie. Avec le recul, le diagnostic d'un tel échec n'est pas difficile à poser. Ce qui manque à Russell, c'est une référence aux théories de la mesure qui émergent à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Il est très surprenant de constater que Russell ne renvoie jamais dans les *Principles* aux travaux de Jordan<sup>1</sup> et de Peano<sup>2</sup> sur la notion de « contenu », bien connus à l'époque. L'intuition que veut saisir Russell est, en ses fondements, très proche de celle qui gouverne les théories de la mesure. Il s'agirait en effet, pour Russell, de définir une famille de parties d'un ensemble (les unions finies<sup>3</sup> d'intervalles de la droite réelle), sur lesquelles une fonction de mesure, au sens contemporain du terme, serait définie (à l'intervalle nul serait associé la valeur 0, à l'union de deux intervalles disjoints seraient associés la somme de leurs mesures). Une référence aux parties élémentaires de la théorie de la mesure<sup>4</sup> n'aurait certainement pas aplani toutes les difficultés soulevées par le concept de « grandeur de divisibilité » ; mais elle aurait au moins permis de préciser le genre de relations (non simplement ordinales) qu'il faut considérer pour pouvoir parler de la divisibilité d'un *stretch*. Elle aurait donc contribué à clarifier les enjeux et à mieux faire ressortir les problèmes posés par la divisibilité des tous infinis – bref, elle aurait permis de donner un cadre mathématique à des développements qui en sont dépourvus<sup>5</sup>.

Un élément peut expliquer la désinvolture de Russell. Ce qui semble intéresser le philosophe, c'est moins le sens du concept, que son origine : pour Russell, la grandeur de divisibilité n'appartient pas à la logique pure, mais dérive de l'expérience sensible dans ce qu'elle a de plus immédiat. Comment, se demande-t-il au §167, lors de la première exposition du concept, décider si deux tous ont même divisibilité ? La réponse est la suivante (178) :

Dans l'espace réel, nous avons à notre disposition des jugements immédiats d'égalité concernant les tous infinis. (...) Sans ces comparaisons immédiates, qui sont nécessaires à la fois logiquement et psychologiquement, rien ne pourrait être accompli : nous sommes toujours réduits en dernière instance au jugement immédiat que la taille de notre règle n'a pas changé de façon notable durant l'opération de mesure, et ce jugement est premier par rapport aux résultats de la science physique concernant l'amplitude réelle des changements de taille des corps.

Toutes les propositions sur la divisibilité des *stretches* se fondent sur des jugements perceptifs d'égalité entre segments. Si cet ancrage sensible est ôté, plus aucun jugement relatif à la grandeur de divisibilité n'est possible. Le point important est ici l'insistance de Russell sur l'immédiateté (le terme revient trois fois dans le passage) des jugements d'égalité

<sup>1</sup> Voir Jordan 1882.

<sup>2</sup> Voir Peano 1887.

<sup>3</sup> Russell n'aurait pas besoin de la  $\sigma$ -additivité, c'est pourquoi la référence à Jordan et Peano est plus pertinente que celle à Borel.

<sup>4</sup> En étant (très) charitable, on pourrait peut-être mettre cette absence de toute référence à la théorie de la mesure sur le compte de la difficulté qu'ont eue les mathématiciens de la fin du XIX<sup>ème</sup> à séparer les questions de mesure des questions topologiques. La distinction entre partie nulle part dense et partie de mesure zéro (au sens d'une partie recouvrable par une famille d'intervalles disjoints de longueur arbitrairement petite) de la droite réelle a notamment été longue et difficile à établir ; sur ce point, voir Michel 1992 (chap. 1 et 2), Ferreiros 1999, 157-169, Hochkirchen 2006. L'idée russellienne selon laquelle la divisibilité dans les tous infinis serait un concept non purement ordinal pourrait être, de ce point de vue, interprétée comme l'esquisse d'une prise de conscience tardive de la spécificité des questions liées à la mesure.

<sup>5</sup> Russell, dès 1904, se montre très insatisfait par sa théorie de la « *magnitude of divisibility* » ; ainsi, dans une lettre à Couturat du 13/06/1904, il écrit : « A présent, je crois que j'ai trop fait usage des divisibilités » (Schmid 2001, 407).



quantitative, qui précèdent, et ne dérivent pas, de l'opération de mesure. Le point est réaffirmé au début du §397 (412) :

L'habitude qu'a notre imagination de s'appuyer sur l'espace réel a fait paraître l'ordre des points comme étant, d'une certaine façon, intrinsèque ou essentiel, et non pas seulement comme relatif à une des nombreuses relations ordonnatrices possibles. Mais ce point de vue n'est pas logique : elle provient, en ce qui concerne l'espace réel, seulement du fait les relations génératrices de l'espace réel ont une connexion très particulière avec nos perceptions (...).

Russell vient d'expliquer que la divisibilité des *stretches* ne se réduit pas à la cardinalité, mais qu'elle présuppose certaines relations (dont la nature est obscure, voir *supra*.) entre les points de l'espace. Or ces relations, qui constituent l'espace réelle, « ont une connexion très particulière avec nos perceptions ». L'idée est bien ici encore la même : nous avons la capacité de percevoir directement l'égalité entre des *stretches*, d'estimer des relations quantitatives simples entre des longueurs. On retrouve la même thèse, développée avec encore plus de vigueur et d'amplitude, dans une lettre à Couturat daté du 4 avril 1904 (Schmid 2001, 377) :

Ce sont les relations, et non les points, qui caractérisent l'actualité de l'espace. Il est donc nécessaire d'admettre que la sensation – ou la perception, si vous préférez – nous révèle des relations aussi bien que les termes des relations. Toute espèce de relations subsiste entre les points de l'espace actuel ; mais il n'y a qu'une espèce de relations que nous apercevons immédiatement. La perception immédiate des relations est (si je ne me trompe pas) une chose que Kant n'admet pas. Mais voici un cas où cette perception est évidente.

La référence à Kant est intéressante à plus d'un titre, nous y reviendrons. Observons pour le moment qu'elle signale une véritable prise de position. L'idée que la mesure de la divisibilité relève de la perception immédiate n'est absolument pas un présupposé introduit en contrebande, c'est une hypothèse revendiquée et assumée comme telle par Russell.

On sait que Poincaré refuse d'accorder que l'espace ait intrinsèquement une métrique dont on pourrait étudier les propriétés. Quelle place Russell accorde-t-il aux arguments de Poincaré ? Je consacrerai la dernière section de ce chapitre à une comparaison entre les vues de Russell et de Poincaré sur la géométrie. Mais il n'est pas inutile, pour clarifier la position de Russell, d'aborder, dès à présent, la question. L'analyse du concept euclidien de superposition fournit à Russell l'occasion, non pas de critiquer, mais au contraire de reprendre et de développer l'argumentaire conventionnaliste de Poincaré (Russell 1903, 406) :

(...) Parler de mouvement implique que nos triangles soient non pas spatiaux, mais matériels. Car un point de l'espace est une position, et ne peut pas plus changer de position que le léopard peut changer ses tâches. (...) Le mouvement, au sens ordinaire, est seulement possible pour une chose matérielle, non pour une chose spatiale. Mais dans ce cas, la superposition ne prouve aucune propriété géométrique. Supposons que le triangle *ABC* soit près de la fenêtre, et le côté *AB* consiste en une colonne de mercure dans un thermomètre ; supposons également que *DEF* soit près du feu. Appliquons *ABC* à *DEF* comme Euclide le demande, et faisons coïncider *AB* à *DE*. Alors nous devrions conclure que *ABC* et *DEF*, avant le mouvement, étaient égaux en tous points. Mais si nous avons amené *DEF* sur *ABC*, un tel résultat n'aurait pas suivi. Quelle bêtise ! me dira-t-on ; *ABC* et *DEF* doivent évidemment être tous les deux des corps rigides. Bien. Mais (...) le sens de rigidité présuppose une égalité métrique purement spatiale, logiquement indépendante de la matière. (...) Nous encourons donc le risque de tomber dans un cercle vicieux absolument fatal si nous cherchons à définir les propriétés métriques par la rigidité.

L'influence de Poincaré est patente<sup>1</sup>. La thèse, centrale chez le mathématicien français, selon laquelle la mesure est une comparaison entre des corps, et non pas une comparaison entre des portions d'espace est, loin d'être critiquée, reprise par Russell. Comme nous l'avons vu, pour

---

<sup>1</sup> Voir également Russell 1903, 161, où le même argumentaire est développé.

Russell, les grandeurs elles-mêmes ne sont jamais divisibles ; ce sont les tous quantitatifs, c'est-à-dire les corps dans le cas des grandeurs spatiales, qui sont divisibles. Où se situe dès lors la différence avec Poincaré ? Y a-t-il contradiction entre ces développements, et la thèse selon laquelle il existe une perception des relations métriques élémentaires ?

Dans le compte-rendu qu'il fait en 1905 de la traduction anglaise de *La Science et l'Hypothèse*, Russell n'élude pas le point (591) :

L'argument (de Poincaré) est que toutes nos expériences concernent les corps, et que n'importe quel résultat apparemment non-euclidien peut être interprété comme étant dû à la nature des corps, non à la nature de l'espace. Admettant ceci, je ne pense pas que la conséquence (i.e. la conventionalité de la métrique) suive. (...) Il y a des relations qui arrangent les points de l'espace dans n'importe quel ordre imaginable, par exemple de manière à ce que les objets que nous percevons comme près les uns des autres soient grandement séparés, tandis que des objets qui, dans l'ordre spatial perçu, sont très lointains, se retrouveraient entre des objets qui sont très proches de nous. En bref, certaines relations entre des points permettent un réarrangement complet (...) qui ne ressemble pas du tout à l'arrangement que nous percevons. Ces autres arrangements diffèrent de celui que nous percevons, il semblerait, seulement en ce que nous ne les percevons pas ; et ceci met en évidence la nécessité de supposer que les relations spatiales que nous considérons comme réelles sont *perçues*.

La différence avec Poincaré ne porte sur l'analyse de la superposition ou de la rigidité. Elle porte sur le fait que Russell admet la possibilité d'un jugement immédiat de perception de la divisibilité des *stretches*. Pour le philosophe anglais, notre appareil sensoriel nous permet une estime purement perceptive des longueurs, qui ne fait appel à aucune procédure physique, mécanique, de mesure. Poincaré, lui, rejette une telle possibilité. En bref, Russell et Poincaré se distinguent non pas sur l'analyse qu'ils font des procédures physiques de mesure ; ils s'opposent sur leur conception de la perception sensorielle. Pour Poincaré, ce qui est perçu ou senti est un divers de sensations isolées les unes des autres ; pour Russell, il est possible de sentir des relations – notamment de percevoir l'égalité entre les divisibilités de deux segments. Nous reviendrons sur la comparaison entre Russell et Poincaré à la fin de ce chapitre. Retenons pour le moment que la thèse du caractère empirique de la grandeur de divisibilité est fondée dans les *Principles* sur l'idée que certaines relations spatiales très élémentaires sont directement perçues, et ne nécessitent pas, pour être établies, d'en appeler à des hypothèses sur la rigidité des corps.

## II- L'architecture de la géométrie métrique

Russell, à plusieurs reprises dans le livre III des *Principles*, suggère que la distinction meinongienne entre *Distanz* et *Strecke* peut être utilisée comme un instrument permettant de clarifier le statut de la géométrie métrique. Le même auteur consacre deux chapitres (les chapitres XLVII et XLVIII) de la partie VI à l'analyse de la géométrie métrique. Ce qu'il avance alors confirme-t-il ce qu'il annonce dans la partie III ? Comment se noue, dans les *Principles*, le lien entre la théorie de la grandeur mesurable et la théorie de la métrique ? C'est à cette question que je m'attaquerai ici<sup>1</sup>. Je montrerai qu'il n'y a pas, en réalité, parfaite coïncidence entre les développements des parties III et VI. Lorsqu'il analyse la géométrie métrique, Russell distingue ainsi trois, et non pas deux théories – il ne reprend pas non plus, dans la partie VI la même notion de distance qu'il développe dans la partie III. Malgré cela, la

---

<sup>1</sup> Je n'entrerai pas ici dans le détail des développements, parfois techniques, de l'enquête russellienne. Non pas que ces analyses soient en elles-mêmes inintéressantes – elles mériteraient au contraire une étude précise de leur contenu et une exploration de leurs sources (j'ai effectué un tel travail sur les chapitres XLV et XLVI consacrés à la géométrie projective dans Gandon 2004). Mon but est cependant ici d'articuler la partie III et la partie VI, non pas de commenter la partie VI. Je me concentrerai donc sur les principales distinctions qui organisent le champ de la pensée russellienne, en laissant volontairement de côté certaines considérations plus périphériques.

polarité meinongienne entre *Distanz* et *Strecke* structure bien la réflexion philosophique de Russell sur l'espace. Si la prise en considération de certains développements mathématiques (les travaux de Peano et de Pieri sur les géométries fondées sur la distance) et certaines questions théoriques (le problème du caractère relatif ou absolu de l'espace) oblige Russell à complexifier sa réflexion, l'existence de la dualité fondamentale des deux grandeurs mesurables posée dans la partie III reste le cadre inchangé de son analyse. Je commenterai, dans une première section, la conclusion du chapitre XLVIII dans laquelle Russell distingue trois formes de géométrie métrique. J'analyserai ensuite les deux géométries pures, mathématiques. Je me concentrerai, dans la section finale, sur la géométrie empirique, et expliquerai pourquoi Russell la considère comme étant la plus fondamentale.

## II-1. Les trois sens de la géométrie métrique

Je vais commencer par analyser la dernière page du chapitre XLVIII, dans laquelle Russell résume l'ensemble de son développement. Pour des raisons de commodité, je découpe le texte en quatre alinéas (428)<sup>1</sup> :

§1 En résumé : bien que ce que l'on nomme habituellement la théorie projective de la distance (...) soit purement technique, ces espaces possèdent néanmoins nécessairement des propriétés métriques, qui peuvent être définies et déduites sans nouveaux indéfinissables et indémontrables.

§2 Mais la géométrie métrique, comme sujet indépendant, requiert la nouvelle idée de la grandeur de divisibilité d'une série, qui est indéfinissable, et n'appartient pas, à proprement parler, aux mathématiques pures. (...) Ainsi il y a une science véritablement distincte de la géométrie métrique, mais, comme elle introduit un nouvel indéfinissable, elle n'appartient pas aux mathématiques pures au sens où j'ai utilisé le mot dans cet ouvrage. Elle ne requiert pas, comme on le suppose souvent, d'introduire des distances et des angles comme de nouvelles relations entre points, droites et plans ; les *stretches* et les grandeurs de divisibilité suffisent partout.

§3 En revanche, la géométrie descriptive et la géométrie projective sont toutes deux indépendantes de toute hypothèse métrique, mais permettent le développement des propriétés métriques à partir d'elles-mêmes ; en conséquence, puisque ces sujets appartiennent aux mathématiques pures, le mathématicien pur devrait adopter sa propre théorie du contenu métrique.

§4 Il y a, il est vrai, une autre géométrie métrique, basée sur les distances définies comme relations un-un ayant certaines propriétés, et ce sujet fait partie des mathématiques pures ; mais il est terriblement compliqué, et requiert un nombre ahurissant d'axiomes.

Pas moins de trois concepts différents de métrique sont ici distingués. Dans le premier et le troisième alinéa, Russell parle de « la théorie projective de la distance », c'est-à-dire de la possibilité de définir une notion de distance dans le cadre de la géométrie projective. La métrique ainsi caractérisée est un concept purement mathématique, qui ne requiert, explique-t-il, l'introduction d'aucun « indéfinissable » et d'aucun « indémontrable ». À la géométrie entendue en ce premier sens, Russell oppose, dans le second alinéa, une autre théorie, qui porte sur la grandeur de divisibilité des *stretches*. Dans ce second sens, la géométrie métrique « n'appartient pas aux mathématiques pures », car elle introduit « un nouvel indéfinissable ». Enfin, dans le dernier paragraphe, Russell parle d'une troisième sorte de géométrie, « basée sur les distances définies comme relations un-un » et qui « fait partie des mathématiques pures ». Cette dernière approche, introduite à contre cœur (« il y a, il est vrai, une autre géométrie... »), est immédiatement disqualifiée : « terriblement compliquée », elle « requiert un nombre ahurissant d'axiomes » et paraît donc plus artificielle que les deux précédentes.

---

<sup>1</sup> Russell effectue une distinction entre géométrie projective (chap. XLV) et géométrie descriptive (chap. XLVI) qui lui est propre. Les deux géométries sont non métriques. La géométrie descriptive correspond à la géométrie développée dans les premières sections de Pasch 1882, ou encore à la théorie obtenue lorsque l'on considère simplement les deux premiers groupes d'axiomes (axiome d'incidence et d'ordre) de l'axiomatique hilbertienne. Sur la droite descriptive, on peut définir une relation d'ordre transitive et asymétrique, ce qui n'est pas possible sur la droite projective.

Au final, Russell examine donc trois modes de définition différents de la métrique. Dans le chapitre XLVII, Russell présente d'abord l'approche directe, puis la géométrie métrique empirique. Dans le chapitre XLVIII, il expose la méthode projective, puis traite du rapport entre géométrie métrique projective et géométrie métrique empirique. Ces trois géométries n'ont pas pour lui le même statut. Il y a deux géométries métriques purement mathématiques différentes, la géométrie projective métrique et la géométrie fondée directement sur la distance (que je nommerai l'approche « directe ») – et une géométrie empirique non mathématique, qui porte sur la divisibilité des *stretches*. Mais cette démarcation entre théories logique et empirique n'est pas la seule ; elle se combine à une distinction entre les théories qui développent le sujet comme « un sujet indépendant » (la géométrie empirique et l'approche directe), et celle qui définissent la métrique à l'intérieur du cadre projectif (la métrique projective). Enfin, une dernière frontière distingue les conceptions « naturelles » (la dérivation projective et la métrique empirique) de l'approche directe beaucoup plus artificielle. Il y a ainsi trois manières différentes de distinguer les trois géométries. Le schéma suivant correspond à la première opposition entre logique et empirique :

Géométrie métrique = science logique	Géométrie métrique = science empirique
Métrique projective + Approche directe	Métrique empirique

Le second tableau reprend la distinction entre géométrie métrique développée comme sujet indépendant et comme partie d'un tout plus vaste :

Géométrie métrique développée comme un sujet indépendant	Géométrie métrique développée comme une partie de la théorie projective
Métrique empirique + Approche directe	Métrique projective

Enfin, le troisième axe de lecture (qui distingue les approches naturelles de celles qui sont artificielles) peut être représenté comme suit :

Développement « naturel » de la métrique	Développement « artificiel » de la métrique
Métrique projective + Métrique empirique	Approche directe

Concernant la question qui nous occupe au premier chef, celle du lien entre la partie VI (théorie de la métrique) et la partie III (théorie de la grandeur mesurable), deux choses doivent être notées. En premier lieu, Russell reprend explicitement la notion de divisibilité et de *stretch* pour caractériser la géométrie métrique empirique. La grandeur de divisibilité étant elle-même présentée (nous venons de le voir) dans la partie III comme une notion empirique, extra-mathématique, la démarche de Russell paraît très cohérente – une science qui prend pour objet d'étude la divisibilité des *stretches* ne peut être qu'empirique. En second lieu, Russell distingue deux théories mathématiques de la métrique, « la théorie projective de la distance » et « un autre géométrie métrique, basée sur les distances définies comme relations un-un ». Si, dans les deux cas, le mot « distance » est mentionné, il n'est toutefois pas certain qu'il désigne le concept fort particulier présenté dans Russell 1900b et repris dans la partie III (et IV) des *Principles* – à la différence de l'expression « *magnitude of divisibility* » ou « *stretch* », le terme ne distance est d'usage courant en géométrie et ne connote aucune doctrine particulière. La question est donc de savoir si, par distance, Russell entend bien ici la même chose que dans la partie III. Un autre problème concerne la distinction entre les deux

théories mathématiques de la métrique. Comment expliquer la dualité entre approche directe et projective ? Dans la section qui suit, je vais présenter plus en détail les deux géométries métriques pures en m'arrêtant particulièrement sur ces deux dernières questions.

## II-2. Les acceptions mathématiques de la métrique

La réflexion russellienne sur les différentes géométries métriques (euclidiennes et non euclidiennes) doit être replacée dans un contexte bien précis, sous peine d'être complètement incomprise. Russell considère, dans l'*Essay* comme dans les *Principles*, que la géométrie projective est la théorie fondamentale, qui délivre le sens même de ce qu'est l'espace. L'idée gouverne l'organisation même de la partie VI : l'analyse de la géométrie métrique dans les chapitres XLVII et XLVIII suit l'étude de la géométrie projective menée dans les chapitres XLV et XLVI. Dans le chapitre XLIV, qui introduit l'ensemble de la partie, l'espace est défini comme une « série multidimensionnelle », c'est-à-dire comme une structure d'incidence. L'espace, dans les *Principles*, n'est donc pas essentiellement une grandeur mesurable ; il n'est pas même défini par des relations d'ordre ; ce qui constitue un espace, selon Russell, ce sont les rapports d'incidence entre points, droites et plans<sup>1</sup>. La géométrie projective est la discipline qui étudie ce genre de relation, et elle constitue, donc, explique Russell, le cadre de toute réflexion sur l'espace, donc également le cadre naturel de l'étude des espaces euclidiens et non euclidiens. La doctrine de la grandeur géométrique (de la métrique) ne peut en conséquence pas être le simple décalque de la théorie de la grandeur mesurable ; en tant qu'elle est une grandeur *géométrique*, la métrique se rapporte nécessairement au concept d'espace projectif. Toute la question, pour Russell, dans les chapitres XLVII et XLVIII est de préciser le mode d'articulation de la géométrie métrique et de la géométrie projective – notamment le degré d'autonomie de la première par rapport à la seconde. C'est ce problème qui est à l'origine de la distinction entre les deux approches mathématiques de la géométrie métrique.

Commençons par le plus simple, la dérivation projective de la distance. Russell reprend la définition de la distance en termes de logarithme d'un certain rapport anharmonique, présentée pour la première fois par Cayley, généralisée par Klein. À la fin du chapitre XLV, Russell montre comment il est possible, en réitérant la construction du quadrilatère, (1) de recouvrir la droite projective par un ensemble de points, dense sur la droite, de telle façon que (2) cet ensemble soit isomorphe à l'ensemble ordonné des rationnels (un tel recouvrement est appelé réseau de Möbius ; voir chap. 1). Des considérations liées à la continuité permettent d'étendre cette coordination à l'ensemble des points de la droite. C'est de là que part Russell dans le chapitre XLVIII pour introduire une métrique. Au §407, Russell fixe arbitrairement deux points  $a$  et  $b$  sur la droite, et considère le rapport anharmonique de deux autres points  $x$ ,  $y$  par rapport à  $a$ ,  $b$ . Ce rapport (qui,  $a$  et  $b$  étant fixés, ne dépend que des coordonnées de  $x$  et  $y$ ), il le note  $(xy)$ . Constatant que,  $z$  étant un nouveau point de la droite passant par  $a$  et  $b$ , le produit  $(xy)(yz)$  est égal à  $(xz)$ , il introduit la distance entre deux points quelconque de la droite comme le logarithme du rapport anharmonique  $(xy)$ . On a ainsi par définition  $d(xy)$  signifiant la distance de  $x$  à  $y$  :

$$d(xy) + d(yz) = \log[(xy)] + \log[(yz)] = \log[(xy)(yz)] = \log(xz) = d(xz).$$

On a également :

$$d(xx) = 0, \text{ et}$$

---

<sup>1</sup> Sur l'espace projectif considéré comme structure d'incidence, voir Gandon 2004 et Gandon 2009a. Un texte de Whitehead est très clair sur ce point ; voir Whitehead 1906b, intro.

$$d(xy) = -d(yx).$$

Russell affirme alors (422-423) :

A partir de ces propriétés (...), il est facile de montrer que toutes les propriétés des distances (...) appartiennent aux logarithmes en question. De cette manière (...) la géométrie métrique peut être complètement amenée sous la coupe projective ; car une théorie similaire s'applique aux angles entre les droites et les plans.

Bien entendu, la distance ici dérivée dépend des points  $a$  et  $b$ , arbitrairement fixés, et c'est ce qui confère à la dérivation tout son intérêt. Klein, en effet, raisonnant d'abord sur la droite complexe, montre que si les deux points sont réels, alors la métrique obtenue est hyperbolique ; que si les deux points sont des complexes conjugués, alors la métrique est elliptique ; et que, dans le cas où  $a$  et  $b$  coïncident, la métrique est euclidienne<sup>1</sup>. Dans le plan complexe, les formes fondamentales par rapport auxquelles les rapports anharmoniques sont définis sont des coniques, nommées Absolus par Cayley – à chaque type de métrique (hyperbolique, elliptique, euclidienne) correspond une forme quadratique fondamentale par rapport à laquelle les rapports anharmoniques sont pris<sup>2</sup>. Les trois géométries métriques classiques découlent du choix d'un Absolu, et apparaissent donc comme de simples produits dérivées de la géométrie projective (complexe<sup>3</sup>). C'est cette unification qui va impressionner les lecteurs de Klein, dont Russell fait partie.

Cette méthode n'est toutefois pas la seule façon, en mathématique, de définir une métrique. La première partie du chapitre XLVII est consacrée à l'examen de tentatives alternatives, consistant à introduire une distance sans passer par le cadre projectif. La discussion est nettement moins maîtrisée, principalement parce que Russell ne se donne pas la peine de préciser quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une certaines relations soient considérées comme une distance (voir *infra.*). Russell se demande essentiellement deux choses :

- 1) le concept de droite étant supposé donné, est-il possible de définir un ensemble de relations un-un, qui auraient pour domaine et codomaine ladite droite, satisfaisant certaines propriétés que Russell énumère, et qui engendreraient un ordre sur cette droite ? (§394)
- 2) est-il possible de définir les notions de droites et de plans simplement à l'aide de la distance, c'est-à-dire à l'aide d'un certain ensemble de relations un-un entre des points ? (§395)

L'idée de Russell est la suivante. Au chapitre XLVI, la géométrie descriptive est fondée sur la relation « *between* » définie sur la droite. Si la réponse à la question 1) s'avérait positive, cela signifierait que la géométrie métrique peut être développée sans que l'on ait recours au cadre descriptif (l'ordre « descriptif » pourrait être défini directement à partir de la distance). Au chapitre XLV, Russell déduit la géométrie projective à partir des seules relations d'incidence entre points, droites et plans. Si la réponse à la question 2) était positive, cela signifierait qu'il est possible de reconstruire la géométrie métrique sans importer les concepts projectifs de droites et de plans. Russell, à travers ses deux questions, demande donc si le cadre projectif est réellement indispensable au développement de la géométrie métrique, i.e. si une

<sup>1</sup> Voir Klein 1872, §5-6 ; Russell suit la construction de Klein de très près.

<sup>2</sup> La particularisation des métriques s'effectue par une spécification de la conique fondamentale : si l'Absolu est une conique réelle, alors la géométrie dérivée est hyperbolique ; si la conique est complexe, la géométrie obtenue est elliptique ; enfin, si la conique fondamentale dégénère en un couple de points complexe (les points circulaires à l'infini), alors la métrique est euclidienne. Voir Klein 1872, §11-13.

<sup>3</sup> Comme le note Russell au §410 (s'inspirant de Pasch 1882), il est possible de retrouver ces résultats dans un espace réel, en faisant jouer à certaines involutions le rôle joué dans l'espace complexe à deux dimensions par les coniques fondamentales.

construction autonome de la géométrie métrique, à partir de la seule théorie de la distance, est envisageable. Est-ce le cas ?

Russell établit d'abord qu'il est possible, à l'aide de la distance, conçue comme une relation symétrique, de définir une relation « *between* » entre les points d'une droite. Comme toutefois Russell ne précise pas exactement ce qu'il entend par distance, son analyse n'est pas claire<sup>1</sup>. Plus intéressant, Russell semble admettre la possibilité de définir les droites et les plans à partir de la seule distance. Le philosophe renvoie à deux travaux : d'une part au mémoire de Pieri *Della geometria elementare como sistema ipotetico deduttivo* de 1899, dans lequel le mathématicien déduit axiomatiquement la géométrie métrique à partir des indéfinissables « points » et « déplacements » ; d'autre part, à un traité de Peano (1903), qui reprend une idée déjà présente chez Leibniz, selon laquelle « la distance seule est fondamentale, et la ligne droite est définie par elle » (410)<sup>2</sup>. Si Russell juge l'approche de Pieri très élégante (elle possède toutefois, dit-il, l'inconvénient d'introduire la notion de déplacement), il considère que la voie suivie par Peano est possible, mais extrêmement compliquée. Russell, même s'il estime que cette voie est inutilement complexe et peu naturelle, considère donc que l'on peut développer la géométrie métrique « directement », indépendamment du cadre projectif.

Je l'ai évoqué, toute cette discussion souffre d'un sérieux défaut : Russell ne précise ni dans le chapitre XLVII, ni dans le chapitre XLVIII, ce qu'il entend par distance. Il ne propose ainsi aucune axiomatique de la métrique « directe ». Au §392, huit conditions sont bien énumérées<sup>3</sup>, mais Russell affirme seulement qu'il s'agit là de « certaines propriétés de la distance » – non pas de la liste des conditions qu'une relation doit satisfaire pour être une distance. On pourrait croire que, s'il ne fait pas une telle chose, c'est parce que le travail a déjà été réalisé au chapitre XXXI qui reprend, on l'a vu, le contenu de Russell 1900b. Mais, hélas, ce n'est pas le cas : certaines des propriétés listées dans le §392 vont directement à l'encontre des conditions posées au chapitre XXI. Les distances sont par exemple considérées au début du chapitre XLVII comme des relations symétriques (non asymétriques). Pire, au cours du chapitre, le contenu de la notion change sans que Russell ne prenne jamais le soin de discuter ces modifications – ainsi, au §395, la distance devient soudainement asymétrique. Cette imprécision, qui sévit dans le chapitre XLVII, semble être aussi de mise dans le chapitre XLVIII, consacrée à la dérivation projective de la métrique. Russell ne donne là encore aucune caractérisation nécessaire et suffisante de la distance. Toutefois, à la fin de son développement, au §411, Russell reformule sa démarche de façon à faire coïncider le concept de distance utilisé ici avec la définition relationnelle de la partie III (et de Russell 1900b). Ce point est établi dans l'appendice à la fin de ce chapitre, auquel je renvoie le lecteur. L'existence d'une telle connexion est importante car elle indique que même si la notion de distance, développée dans l'approche projective, n'est pas de prime abord renvoyée à celle développée dans la théorie de la grandeur, elle ne lui est pas incompatible. La distance définie à la manière de Klein est une distance au sens de Russell 1900b. On peut donc considérer que, si dans l'approche « directe », le terme de distance est très imprécis, ce n'est pas le cas dans

<sup>1</sup> Russell pose que  $b$  est entre  $a$  et  $c$  signifie  $d(ab) < d(ac)$  et  $d(bc) < d(ac)$ . Il affirme ainsi qu'un axiome est nécessaire pour exclure le cas où  $d(ab) = d(bc)$  et  $d(ac) < d(ab)$ . Ce n'est donc pas à la notion aujourd'hui standard de distance qu'il réfère, puisque l'inégalité triangulaire exclurait ce cas. Ce n'est pas non plus à la notion définie au chapitre XXXI, puisque la compatibilité entre l'ordre et l'additivité l'exclurait également.

<sup>2</sup> En réalité, Peano 1903 introduit également des vecteurs. Le but de Peano est explicitement de combiner les résultats de Pieri à ses précédents travaux sur les vecteurs.

<sup>3</sup> Russell 1903, 408 : « 1) chaque paire de points a une et une seule distance ; 2) les distances sont des relations symétriques ; 3) sur une ligne droite donnée, il y a deux et seulement deux points à une distance donnée d'un point donné ; 4) il n'y a pas de distance maximum ; 5) la distance d'un point à lui-même est zéro ; 6) il n'y a pas de minimum à la distance entre des points distincts ; 7)  $d$  et  $\delta$  étant deux distances données, et  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  étant des points distincts sur une ligne droite, dont la distance entre eux est  $\delta$ , alors, pour une valeur de  $n$ ,  $A_0 A_n$  est plus grande que  $d$  ; 8)  $A_0, A_n$  étant deux points quelconques, il existe  $n-1$  points distincts sur la ligne droite  $A_0 A_n$  tels que les distances entre eux, celle de  $A_0$  au premier, et de  $A_n$  au dernier, soient toutes égales. »

l'approche projective : le concept renvoie là à la fois à la définition de Klein 1872 et de Russell 1900b.

Russell présente donc deux déductions mathématiquement pures de la géométrie métrique, l'une projective, l'autre directe. S'il maîtrise la première, Russell ne fait que des allusions éparses à la seconde, dont il maintient cependant la possibilité. La question est dès lors la suivante : pourquoi Russell a-t-il tenu à intégrer dans les *Principles* une démarche (l'approche « directe ») qui lui semble mathématiquement problématique (compliquée) et qui ne fait, sur le plan théorique, que dédoubler un raisonnement qu'il considère par ailleurs comme tout à fait satisfaisant (la dérivation projective) ? D'où la conception directe tire-t-elle son importance ?

Le début du chapitre XXI nous met sur la voie (1903, 252) :

La notion de distance est une notion qui est souvent supposée essentielle aux séries, mais qui ne reçoit que rarement une définition précise. Une emphase sur la distance caractérise, en général, ceux qui croient dans les positions relatives.

Une référence à la controverse entre Leibniz et Clarke suit. Russell est encore plus explicite dans le §61 de *The Philosophy of Leibniz* (112-113) :

Il y a deux grands types de théorie spatiale, l'une représentée par Newton, l'autre par Leibniz. Les deux se sont confrontées dans la controverse avec Clarke. Chacune résulte de l'insistance mise sur l'une ou l'autre de la paire d'idées suivante. Si nous considérons deux points *A* et *B*, ils ont (1) une distance, qui est simplement une relation entre les deux, (2) une longueur réelle, consistant en autant d'espace, et s'étendant de *A* à *B*. Si nous insistons sur la première comme représentant l'essence de l'espace, nous obtenons la théorie relationnelle ; les termes *A* et *B*, entre lesquels la distance est spatiale, doivent eux-mêmes être non spatiaux, puisqu'ils ne sont pas des relations. Si nous insistons sur la dernière, la longueur intermédiaire réelle, nous la trouvons divisible en un nombre infini de points chacun étant comme les points extrémités *A* et *B*. Cette alternative donne la théorie newtonienne de l'espace absolu, consistant non en un assemblage de relations, mais en une collection infinie de points réels.

Il y a ainsi, selon Russell, une connexion étroite entre l'approche relativiste de l'espace, selon laquelle l'espace n'est rien d'autre que des relations entre des entités non spatiales, et les théories de la géométrie fondées sur la distance. Les partisans des doctrines « relativistes » comme les géomètres épousant l'approche « directe » attribuent une place centrale à la notion de distance. On retrouve d'ailleurs, dans les textes consacrés à la discussion des théories relativistes de l'espace exactement les mêmes critiques que celles développées, dans le chapitre XLVII, à l'encontre de la complexité « ahurissante » de l'approche « directe ». Les théories relativistes, si elles ne sont pas contradictoires, sont, explique Russell, extrêmement et inutilement « compliquées » ; en 1901c, il insiste notamment sur la difficulté qu'il y a à définir la direction (une droite et un ordre sur la droite) et l'angle à partir de la seule distance<sup>1</sup>. Si donc Russell évoque la possibilité de développer les géométries métriques indépendamment du cadre projectif dans les *Principles*, c'est certainement parce qu'il veut faire une place à l'opposition, importante pour lui à l'époque, entre les doctrines relativistes et absolutistes de l'espace.

Mais à quoi correspondrait, alors, dans les *Principles*, l'approche absolutiste ? Si le rapport entre théorie relativiste et approche directe est étroit, il semble, en revanche, que rien ne lie la dérivation projective de la métrique à la doctrine absolutiste. En effet, dans l'extrait tiré de *The Philosophy of Leibniz* cité plus haut, c'est plutôt à la notion de *stretch*, c'est-à-dire à la géométrie métrique empirique, qu'est connectée la théorie de Newton. En réalité, les choses sont plus complexes, mais pour le voir, il faut se pencher sur l'analyse de la métrique empirique.

---

<sup>1</sup> Russell 1901c, 301-303 ; Russell 1902, 245-247.



### II-3. La géométrie métrique empirique

Dans la seconde partie du chapitre XLVII, Russell affirme que l'approche « directe » est non seulement « logiquement non nécessaire » (i.e. que la géométrie métrique peut être développée de façon purement mathématique en restant à l'intérieur du cadre projectif), mais qu'elle peut, en outre, être « complètement évitée par la dérivation des distances à partir des *stretches* » (1903, 411). Russell explique en effet que, en se plaçant dans le cadre de la géométrie descriptive, il est possible d'identifier la longueur à la divisibilité du *stretch* (*Ibid.*) :

Nous partons maintenant, comme dans la géométrie descriptive, d'une relation asymétrique transitive par laquelle la ligne droite est (...) définie comme étant une série. Nous définissons la grandeur du *stretch* de *A* à *B* ou de *B* à *A* – la divisibilité est une grandeur non signée – comme la *distance* des deux points *A* et *B*.

Russell se donne ici la structure d'espace descriptif<sup>1</sup>, c-à-d la possibilité de parler de segment (d'ensemble des points entre deux points). Si maintenant est associée à chaque segment une grandeur de divisibilité (notion qui n'appartient pas à la géométrie descriptive), alors, explique Russell, l'approche « directe », artificielle et compliquée, peut être considérablement simplifiée. En effet, les *stretches*, comme les distances, peuvent être ordinalement comparées entre eux ; ils sont de plus « naturellement » liés à une addition (la mise bout à bout des segments) ; si on admet, d'autre part, que la droite descriptive est continue, alors la grandeur des *stretches* n'admet ni maximum ni minimum, ce qui est une des propriétés de la distance listées au chapitre XLVII (411). Russell affirme qu'il est nécessaire de poser seulement trois « axiomes » supplémentaires pour introduire une métrique à partir de la divisibilité des *stretches* : la proposition selon laquelle, sur une droite donnée, il y a deux et seulement deux points à une longueur donnée d'un point donné, la condition archimédienne et celle de linéarité (*Ibid.*). Dériver la métrique de la grandeur de divisibilité des *stretches* est très simple : les conditions qui spécifient une longueur sont pratiquement toutes déjà satisfaites par la divisibilité des segments.

Cette simplification a cependant un coût. La divisibilité est une notion empirique, non purement mathématique, qui renvoie, comme nous l'avons vu, à une estime perceptive du rapport entre tout et parties. La divisibilité des *stretches*, mais aussi les rapports ordinaux qu'ils ont entre eux, dérivent de l'expérience. Le dispositif mis en place par Russell comporte donc deux étages : le premier est constitué par la structure « descriptive » nécessaire pour pouvoir parler des segments de la droite ; le second par la théorie empirique de grandeur de divisibilité. La définition empirique de la métrique présuppose donc la géométrie descriptive (ou projective) ; mais elle ne s'y réduit pas, puisque le concept de métrique est dérivé de celui, non mathématique, de divisibilité. Le premier point distingue la géométrie métrique empirique de l'approche directe (chez Leibniz, Peano ou Pieri, on cherche à définir l'espace à partir du concept de distance, sans passer par le cadre projectif) ; le second distingue la métrique empirique de la méthode projective (chez Klein, la distance est définie comme le logarithme d'un certain rapport anharmonique). Ce dispositif à deux étages rappelle l'organisation de l'*Essay* : la géométrie projective y était conçue comme la science *a priori* de la pure spatialité (nommée « forme de l'extériorité ») et la géométrie métrique comme une science empirique qui déterminait, à l'intérieur du cadre projectif, la courbure de l'espace réelle (146-147). La même combinaison de deux structures (descriptive-projective / métrique empirique) se retrouve aussi dans les *Vorlesungen über die neue Geometrie* de Pasch, auquel

---

<sup>1</sup> Au §398, Russell explique que, lorsque l'on cherche à construire une géométrie elliptique, et non pas seulement euclidienne ou hyperbolique, alors un point de départ projectif (non descriptif) doit être adopté.

Russell se réfère souvent lorsqu'il parle de la distance dans la partie VI des *Principles*<sup>1</sup>. Plus intéressant peut-être, Russell reprend cette double articulation lorsqu'il présente sa conception absolutiste de l'espace dans *Is position in time and space absolute and relative ?* (1901c). L'auteur fait d'abord référence à sa construction de la géométrie descriptive (298-299), puis ajoute des propriétés métriques, en introduisant un nouvel indéfinissable empirique, la grandeur de divisibilité des *stretches*. Russell affirme alors que la position de quelques axiomes supplémentaires permet d'obtenir, à partir d'une notion dont presque tout le contenu dérive de l'expérience, une métrique. On retrouve donc ici, associée à la conception absolutiste, la théorie des *Principles*. Il y a donc bien un lien, chez Russell, entre l'approche newtonienne, absolutiste, de l'espace, et la géométrie projective. Le point difficile (qui justifiait mon avertissement à la fin de la section précédente) est que la doctrine absolutiste n'est pas liée à la dérivation projective de la métrique, mais à l'approche empirique, qui présuppose (même si elle ne s'y réduit pas) le cadre projectif.

Le jeu entre les trois concepts de géométrie métrique est donc relativement subtil. À la question du statut empirique ou logique de la métrique, il faut en articuler deux autres : celle qui concerne le caractère absolu ou relatif de l'espace, d'une part ; celle qui concerne le fait de savoir si la métrique est traitée comme un sujet indépendant ou non, d'autre part. La doctrine absolutiste est en effet liée à la géométrie métrique empirique (et donc au cadre projectif, présupposé dans la théorie de la divisibilité du *stretch*), alors que la conception relativiste trouve son expression la plus aboutie dans les approches directes. Cette proximité explique pourquoi Russell marginalise les approches directes dans sa présentation ; logiquement possibles, elles ne sont philosophiquement pas fondamentales. Le cadre dans lequel Russell pense le problème mathématique de l'espace reste le cadre projectif ; or, dans ce contexte, la notion de distance ne peut être que dérivée ou extra-mathématique.

Mais, à ce stade, se pose une nouvelle question : si le cadre projectif est si prégnant, comment expliquer que Russell considère *in fine* que la véritable géométrie métrique est la science empirique portant sur la divisibilité des *stretches* ? Russell est logiciste ; il veut montrer que toutes les mathématiques dérivent de la logique ; il attache, de plus, dans la partie VI, une importance centrale à la géométrie projective ; Russell a donc au moins deux raisons de se rallier à l'approche projective de Klein, qui garantit aux théories métriques le statut de sciences purement mathématiques. Il adopte pourtant une position anti-réductionniste : la géométrie métrique ne dérive pas de la géométrie projective, mais constitue une discipline empirique autonome. Comment expliquer l'attitude de Russell ici ? Pourquoi refuser une si facile victoire ?

Russell aborde la question en deux occasions, à la fin du §408, puis en conclusion du §410. Au §408, parlant de la définition de la distance comme d'une fonction du rapport anharmonique, il explique (425) :

On pourrait très bien demander (...) les raisons pour lesquelles nous souhaitons définir une fonction de deux points variables possédant (les propriétés de la distance). Si le mathématicien répond que son seul objet est l'amusement, sa procédure sera logiquement irréprochable, mais extrêmement frivole. Il est cependant difficile d'imaginer qu'il fasse cette réponse. Nous avons, en fait, la notion de *stretch*, et, en vertu de l'axiome général selon lequel chaque classe a une certaine grandeur de divisibilité, nous savons que le *stretch* a une grandeur. (...) Il est important de réaliser que la référence à deux points idéaux fixés, introduit dans la théorie descriptive de la distance, n'a aucun analogue au niveau de la distance ou du *stretch* lui-même. Cette référence est, en réalité, un dispositif commode, et rien d'autre. Le *stretch*, dans l'espace descriptif, est complètement défini par ses extrémités, et ne requiert en aucune manière une référence à deux points idéaux supplémentaires.

---

<sup>1</sup> Pasch introduit des axiomes métriques (de congruence) au §14 de son 1882, après avoir développé la géométrie projective à partir de (ce que Russell appelle) la géométrie descriptive. Sur Pasch, voir Russell 1901c, 299 ; Russell 1903, 407, 417. Voir également Gandon 2005b.

Il revient sur le problème deux pages plus loin, à la fin du §410 (427) :

Mais, à l'encontre de cette théorie (projective de la métrique), en tant qu'elle représenterait quelque chose de plus qu'un développement technique, valent les mêmes objections que dans le cas de l'espace descriptif ; i.e. à moins que chaque paire de points actuels détermine une certaine grandeur, le processus par lequel nous obtenons la mesure de la distance susmentionnée n'est motivée par aucune raison ; et, si une telle grandeur existe, alors le processus en question donne simplement la mesure, non la définition, de la grandeur en question. Ainsi, le *stretch* ou la distance reste une entité fondamentale, dont les propriétés sont telles que la (méthode projective) donne une mesure, mais pas une définition.

Dans la métrique projective, rappelons-le, la distance entre deux points  $A$  et  $B$  est définie à partir du rapport anharmonique que le couple  $A, B$  entretient avec un certain autre couple de points fixé une fois pour toutes, les points fondamentaux. Russell ne conteste ni la valeur, ni la rigueur de la construction. Il pointe cependant le fait que la distance apparaît ici comme l'instanciation partielle d'une relation entre quatre éléments, non pas directement comme une relation entre deux éléments. Or, poursuit-il, aucune raison ne motive une telle manœuvre. Si on adopte le point de vue projectif, la définition d'« une fonction de deux points variables possédant (les propriétés de la distance) » paraît « frivole », gratuite, sans justification. Mais si on adopte le point de vue métrique, alors la même définition semble artificielle, car la longueur d'un segment est complètement définie par ses extrémités, « et ne requiert en aucune manière une référence à deux points idéaux supplémentaires ». Bref, la définition projective de la métrique apparaît soit comme une construction technique dénuée d'intérêt, soit comme une description extrêmement artificielle d'une notion plus fondamentale, la longueur entre deux points. Le cadre projectif permet la définition du concept de métrique ; mais ce qu'il ne fournit pas, ce sont les raisons qui président à une telle construction.

Observons que Russell ne fait pas reposer son argumentation sur l'idée que nous aurions une perception immédiate de l'égalité de grandeur entre des *stretches*. Russell ne dit pas : il n'est pas possible de réduire la géométrie métrique à la logique parce que nous avons une perception des rapports de longueurs. Il affirme : la géométrie métrique est un sujet distinct, autonome par rapport à la géométrie projective et ayant sa logique interne propre ; même si l'on peut définir les concepts métriques fondamentaux de façon projective, on ne peut pas, sans détruire sa singularité, réduire la géométrie métrique à la théorie projective. Le raisonnement de Russell n'est pas psychologique ou épistémologique. Il est architectonique : il porte sur la structuration d'un champ disciplinaire, non sur la nature de nos capacités intuitives<sup>1</sup>. Russell veut développer une théorie de la géométrie métrique qui respecte le fait qu'elle constitue un « sujet indépendant » (428), « une science véritablement distincte » (428). La dérivation de Klein n'assure pas cette « indépendance », puisqu'elle présente la théorie métrique comme une partie très marginale de la géométrie projective ; si elle est « logiquement irréprochable » (425), l'approche de Klein doit donc être rejetée. Cette défense russellienne de l'anti-réductionnisme appellerait, bien entendu, des remarques d'ordre méthodologique sur la nature du logicisme russellien. J'ai tiré ailleurs quelques conclusions de l'argument commenté ici<sup>2</sup>, et je reviendrai, dans le chapitre 5 et dans ma conclusion sur l'importance, qu'ont chez Russell, les considérations architectoniques. Je laisse ici cet aspect de côté.

De l'idée que la méthode projective ne permet pas de développer la géométrie métrique comme une discipline à part entière, Russell aurait toutefois pu tirer d'autres conclusions. L'approche « directe » garantit elle aussi l'indépendance de son sujet – sans pour autant

---

<sup>1</sup> En réalité, comme j'ai commencé à le montrer, l'idée que nous avons une perception directe des distances est seulement un moyen pour Russell de garantir l'autonomie du champ de la géométrie métrique. Voir sur ce point la comparaison avec Poincaré, *infra*.

<sup>2</sup> Voir Gandon 2009c.

exclure la géométrie métrique du giron mathématique. Pourquoi Russell n'a-t-il pas cherché à jouer cette carte ? Plusieurs raisons expliquent son choix. D'une part, comme nous l'avons vu, l'approche directe est liée, dans l'esprit de Russell, à la conception « relativiste » qu'il rejette alors. D'autre part, la promotion de l'approche directe aurait nécessairement entraînée une remise en cause le caractère fondamental de l'espace projectif et aurait complètement déséquilibré la partie VI. Enfin, et peut-être surtout, il n'est même pas certain, pour Russell, que l'approche directe puisse tenir ses promesses, c-à-d garantir à la géométrie métrique une forme d'indépendance et de centralité dans le champ scientifique. En effet, cette approche est très « complexe » répète sans cesse Russell ; comment une théorie si compliquée pourrait-elle expliquer que la notion de distance joue un rôle aussi central dans les sciences mathématiques ? Complexité rime ici avec artificialité ; or ce dont Russell veut rendre compte, c'est du caractère élémentaire et « naturel » de la métrique.

Résumons. Mon but dans cette seconde section a été d'analyser l'articulation entre la théorie de la quantité développée dans la partie III et la conception de la géométrie métrique exposée dans la partie VI des *Principles*. Si l'image de la géométrie qui ressort de la discussion est plus complexe que ne le laissait entrevoir les développements sur la quantité (ainsi trois, et non pas deux types de géométries métriques sont différenciés), nous avons pu vérifier que l'opposition centrale entre géométrie métrique projective et géométrie métrique empirique reposent bien sur la différence entre deux grandeurs mesurables, la *distance* et la divisibilité du *stretch*. Il y a donc une forte cohérence entre les développements concernant la quantité et ceux concernant la géométrie métrique – les premiers fournissent aux seconds leur articulation principale. Cette continuité n'est cependant pas exclusive de variation et d'enrichissement, car la distinction entre deux sortes de métrique s'effectue dans le contexte plus large d'une interrogation sur le rapport entre géométrie métrique et géométrie projective. Dans ce contexte, deux problèmes occupent le devant de la scène : celui du caractère absolu ou relatif de l'espace ; celui du caractère indépendant ou non de la géométrie métrique. L'approche directe, qui ne présuppose pas le cadre projectif, est liée à la doctrine relativiste. S'il accorde que cette approche est possible, Russell n'attache cependant pas d'importance à une telle construction qui, en plus d'être « compliquée », s'effectue complètement en dehors du cadre projectif. Russell souligne également les limites internes de la méthode projective, dont on aurait pu s'attendre, étant donné le fil général de la partie VI, à ce qu'elle soit privilégiée par le philosophe : l'approche de Klein est incapable de rendre compte du fait que la géométrie métrique est une science indépendante et elle doit être laissée de côté.

### III. Russell et Poincaré sur la géométrie

Dans cette section, j'esquisse une comparaison entre la théorie de Russell et celle de Poincaré. Mon but est double. D'une part, une telle mise en relation permettra d'« animer » la description jusqu'à présent trop statique de l'approche russellienne. D'autre part, les études existantes sur la première querelle entre Russell et Poincaré (celle portant sur la géométrie) se focalisent, du côté de Russell, sur les articles répondant directement à Poincaré, sans examiner la doctrine mature exposée dans les *Principles*<sup>1</sup>. C'est dommage, d'abord parce que, comme y insiste l'auteur lui-même, les réponses développées en 1899 sont de simples ébauches, non encore stabilisées – ensuite, parce les distinctions exposées en 1903 sont en partie motivées par les critiques de Poincaré.

---

<sup>1</sup> Voir Torretti 1978, 301-359.

J'insisterai ici sur deux problèmes connexes : le rapport entre géométrie métrique et géométrie projective d'une part ; le statut empirique ou non de la métrique, d'autre part. Nous verrons que sur ces questions, les deux penseurs partagent plus de points communs qu'il n'y paraît à première vue. Mais avant de me lancer dans la comparaison, je vais rapidement rappeler quelques éléments de la philosophie géométrique de Poincaré (je m'appuierai ici essentiellement sur Torretti 1978).

### III-1. Le statut de la géométrie chez Poincaré

Les travaux de Poincaré sur les fondements de la géométrie s'inscrivent dans le sillage de ceux de H. Helmholtz. Le savant allemand considérait la mesure comme le concept géométrique central, et faisait des concepts de superposition et déplacement, essentiellement liés à la possibilité empirique de mesurer des longueurs à partir d'un étalon, les éléments de base de sa réflexion. Plus précisément, Helmholtz cherchait à déduire à partir de diverses hypothèses sur la mobilité des corps rigides la forme quadratique positive du  $ds^2$  riemannien<sup>1</sup>. Dans sa déduction, Helmholtz ne faisait toutefois pas référence à la notion de groupe. C'est le mathématicien norvégien S. Lie qui, dans ce contexte, introduisit le concept et donna, ce faisant, à l'intuition helmholtzienne, toute sa force<sup>2</sup>. Helmholtz avait en effet émis l'hypothèse que « l'axiome de libre mobilité »<sup>3</sup> caractérisait les groupes de transformation associés aux trois géométries métriques classiques. Mettant en œuvre toutes les ressources de sa nouvelle théorie, Lie montra que tel n'était pas le cas – que pour caractériser le groupe cherché, il fallait adjoindre à la libre mobilité, une autre contrainte, « la libre mobilité dans l'infinitésimal »<sup>4</sup>. L'histoire de cette tradition de recherche, qui aboutit au programme d'Erlangen (Klein 1872), notamment les contributions respectives de Helmholtz, Lie et Klein, ont donné lieu à de nombreuses études, auxquelles je renvoie le lecteur<sup>5</sup>. Mon objectif ici est seulement de souligner que deux éléments, directement tirés des travaux de Helmholtz et de Lie, occupent une place prééminente dans les réflexions de Poincaré. Comme Helmholtz, Poincaré considère que la géométrie est fondamentalement liée à la mesure et que c'est donc d'abord et avant tout à la détermination métrique de l'espace qu'il convient de s'intéresser lorsqu'on s'intéresse à la question des fondements. Comme Lie (et Klein à sa suite), Poincaré définit la distance, non pas implicitement par des axiomes (comme Pasch, puis Hilbert et Russell, dans l'approche « directe », le feront), mais comme l'invariant d'un groupe de déplacement. Dit autrement, « l'objet de la géométrie », c'est, pour le savant français, « l'étude d'un groupe particulier » (1902, 93) ; le choix du groupe détermine pour lui le choix d'une métrique, c'est-à-dire la forme de l'espace.

L'originalité de Poincaré est d'avoir bâti autour de ce grand mouvement théorique une véritable philosophie de la connaissance géométrique. Je m'intéresserai ici à trois thèses, particulièrement importantes lorsque l'on compare les pensées de Poincaré et de Russell : l'adhésion de Poincaré à une conception relativiste de l'espace ; l'affirmation du caractère conventionnel de la métrique ; l'idée que l'approche en termes de groupe est présente dans toutes les formes de géométrie, même les plus anciennes.

---

<sup>1</sup> C'est cette « dérivation » de la métrique à partir d'une axiomatique portant sur les déplacements des corps rigides qui, selon R. Torretti, constitue l'apport original de Helmholtz. Pour plus sur cette question, voir Torretti 1978, 155-163.

<sup>2</sup> Pour plus sur Lie, voir Torretti 1978, 171-179.

<sup>3</sup> L'axiome de « libre mobilité » stipule que (je reprends la formulation que Russell donne dans *l'Essay*) le groupe est caractérisé par les quatre conditions suivantes : (1) un point peut être transformé en n'importe quel autre, que (2) si un point est fixé, un second peut prendre n'importe quelle position déterminée par la variation de deux coordonnées, que (3) si deux points sont fixés, un troisième peut prendre n'importe quelle position déterminée par la variation d'une coordonnée, que (4) si trois points non colinéaires sont fixés, tous les points restent fixés.

<sup>4</sup> Torretti 1978, 178.

<sup>5</sup> En plus de Torretti 1978, mentionnons Hawkins 2000.

1/ C'est dans le premier chapitre de la seconde partie de *Science et Méthode* (1908), intitulé « L'espace relatif » que Poincaré affirme le plus clairement son rejet de l'absolutisme :

(...) Il ne peut être question de grandeur absolue, mais de la mesure de cette grandeur par le moyen d'un instrument quelconque ; cet instrument peut être un mètre, ou le chemin parcouru par la lumière ; c'est seulement le rapport de la grandeur à l'instrument que nous mesurons ; et si ce rapport est altéré, nous n'avons aucun moyen de savoir si c'est la grandeur ou bien l'instrument qui a varié. (1908, 86)

On voit dans quel sens large doit être entendue la relativité de l'espace ; l'espace est en réalité amorphe et les choses qui sont dedans lui donnent seules une forme. Que doit-on penser alors de cette intuition directe que nous aurions de la droite ou de la distance ? Nous avons si peu l'intuition de la distance en soi que, dans une nuit, nous l'avons dit, une distance pourrait devenir mille fois plus grande sans que nous puissions nous en apercevoir, si toutes les autres distances avaient subi la même altération. (1908, 88)

Le savant fonde sa position sur une mise en relation de la métrique à la mesure. S'il n'y a pas d'espace absolu, c'est parce que « c'est seulement le rapport de la grandeur à l'instrument que nous mesurons » – et donc que, si ce rapport est altéré, « nous n'avons aucun moyen de savoir si c'est la grandeur ou bien l'instrument qui a varié »<sup>1</sup>. Poincaré ne veut pas simplement dire que l'espace absolu est inconnaissable (que nous ne pouvons mesurer que les rapports des choses entre elles). Il est plus radical : il entend montrer que le concept d'espace absolu, c'est-à-dire selon lui d'espace donné indépendamment d'une mesure, est un pur non-sens. Citons un extrait de Poincaré 1930 (40) :

(...) L'espace a-t-il des propriétés géométriques indépendantes des instruments qui servent à le mesurer ? Il peut, avons-nous dit, subir une déformation quelconque sans que rien nous en avertisse, si nos instruments la subissent également. En réalité, il est donc amorphe, il est une forme flasque, sans rigidité, qui peut s'appliquer à tout ; il n'a pas de propriétés à lui ; faire de la géométrie, c'est étudier les propriétés de nos instruments, c'est-à-dire du corps solide.

Il n'y a pas d'espace, à proprement parler, antérieurement, et indépendamment de la mesure. L'espace n'a pas, dit Poincaré, de « propriétés géométriques indépendantes des instruments qui servent à le mesurer ». L'espace « qualitatif », non mesurable, n'est pas un espace ; c'est une forme « flasque », amorphe, sans aucune propriété géométrique<sup>2</sup>. La mesure est donc pour Poincaré une condition de possibilité de la géométrie et c'est pourquoi il n'y a pas pour lui d'espace absolu. L'opposition entre Russell (qui estimait que l'espace pur est l'espace projectif) et Poincaré est sur ce point frontal.

2/ Helmholtz partage lui-aussi la thèse selon laquelle la géométrie est fondamentalement liée à la mesure ; mais le savant allemand semble considérer que cette affirmation conduit vers une forme d'empirisme, selon lequel la courbure de l'espace serait une donnée de l'expérience,

---

<sup>1</sup> Poincaré fait référence au « bouleversement » que serait la « multiplication par mille » de toutes les dimensions de l'univers, mais il généralise l'expérience de pensée, en évoquant d'abord l'hypothèse de Lorentz et Fitzgerald (85-86 : « voici un cube qui a 1 mètre de côté ; par suite du déplacement de la terre, il se déforme, l'une de ses arêtes, celle qui est parallèle au mouvement, devient plus petite, les autres ne varient pas. Si je veux m'en assurer à l'aide d'un mètre, je mesurerai d'abord l'une des arêtes perpendiculaires au mouvement et je constaterai que mon mètre s'applique exactement sur cette arête ; et, en effet, ni l'une ni l'autre de ces deux longueurs n'est altérée, puisqu'elles sont, toutes deux, perpendiculaires au mouvement. Je veux mesurer, ensuite, l'autre arête, celle qui est parallèle au mouvement ; pour cela je déplace mon mètre et le fais tourner de façon à l'appliquer sur mon arête. Mais le mètre ayant changé d'orientation, et étant devenu parallèle au mouvement, a subi, à son tour, la déformation, de sorte que bien que l'arête n'ait plus un mètre de longueur, il s'y appliquera exactement, je ne me serai aperçu de rien. ») puis en généralisant encore (87).

<sup>2</sup> Poincaré fait ici référence à la présentation adoptée par Riemann dans sa thèse d'habilitation – la première partie était consacrée à la notion de *Mannigfaltigkeit* à  $n$  dimensions ; la seconde à la question de savoir quelle sorte de métrique on peut définir sur ce genre de structure. De façon extrêmement schématique, on pourrait dire que l'étude de la première structure non métrique, « flasque » et « sans rigidité » est l'objet de l'*Analysis Situs* (la topologie) dont Poincaré parle à la fin du chapitre 2 de *La Science et l'Hypothèse* ; la géométrie proprement dite, selon Poincaré, ne commencerait qu'avec la définition d'une métrique (ou d'une groupe de déplacement) sur la variété. Sur Riemann, je renvoie à Torretti 1978, 82-109.

susceptible d'être mesurée<sup>1</sup>. Poincaré rejette cette proposition. Comment, à partir de la même thèse relativiste, le savant français en vient-il à défendre des conclusions diamétralement opposées à celles de Helmholtz ? La question est fort débattue<sup>2</sup>. Je me contenterai ici de pointer un aspect qui, sans doute possible, joue un rôle important dans la discussion. Poincaré souligne à plusieurs reprises qu'un instrument de mesure est constitué de corps rigides. Or, le concept de « rigidité » présuppose, selon lui, la donnée d'une métrique. Une fois une métrique choisie, il est certes possible de déterminer par des mesures si un corps est rigide ou non ; mais cela suppose l'introduction préalable d'une métrique ; à moins de tomber dans un cercle vicieux, on ne peut pas baser l'introduction d'une métrique sur des mesures. Que ma règle n'ait pas diminué ou augmenté dans son déplacement est, par définition, une hypothèse que je ne peux jamais ni vérifier ni réfuter. C'est ainsi, selon Poincaré, la détermination du groupe, donc d'une géométrie, qui permet de donner un sens à la notion de corps rigide, donc à celle de mesure<sup>3</sup>.

L'empirisme de Helmholtz apparaît alors résulter d'une confusion entre deux concepts de rigidité : un concept mécanique, pouvant être contrôlé expérimentalement ; un concept géométrique défini comme un invariant du groupe de transformations. La célèbre description du monde non euclidien (*Ibid.*, 88-91) montre comment il est possible décrire un même « monde » en adoptant le point de vue de deux géométries différentes. Bien entendu, certains changements, qui paraissent être, dans une géométrie, des déplacements, n'en sont pas dans une autre. Mais comme ce sont des corps qui sont mesurés, non directement des parties de l'espace, il est toujours possible d'attribuer les déformations « constatées » à des causes physiques, connues ou inconnues<sup>4</sup>. La géométrie n'est donc pas une science empirique. Sur ce point, l'opposition est une nouvelle fois totale entre Poincaré et Russell. Cela étant, les deux philosophes partagent néanmoins la même attitude vis-à-vis de l'empirisme de Helmholtz ; comme on l'a vu et comme on va bientôt le revoir, Russell souligne avec Poincaré le fait que la définition d'une métrique est une condition de possibilité de la mesure.

3/ La corrélation entre géométrie, groupe et mesure est si forte, explique Poincaré, qu'elle traverse l'histoire de toute la géométrie, au point d'être implicitement présente déjà chez Euclide (Poincaré 1898, 27) :

(La géométrie euclidienne) commence par déclarer que deux figures sont égales si elles sont superposables. Ceci admet qu'elles peuvent être déplacées et aussi que parmi tous les changements qu'elles peuvent subir, nous pouvons distinguer ceux qui peuvent être regardés comme des déplacements sans déformation. Cette définition implique également que deux figures qui sont égales à une troisième sont égales entre elles. Et cela revient à dire que s'il y a un déplacement qui mette la figure A sur la figure B et un second déplacement qui superpose la figure B à la figure C, il y en aura aussi un troisième, la résultante des deux premiers, qui superposera la figure A à la figure C. En d'autres termes on présuppose que les déplacements forment un groupe. La notion de groupe, par conséquent, est introduite dès le début et inévitablement.

Le savant va même plus loin (*Ibid.*, 28) :

Sans doute, (Euclide) a recours à d'autres axiomes qu'il est plus difficile de rapporter à la notion de groupe. Tel est l'axiome qu'emploient quelques géomètres quand ils définissent la ligne droite comme la plus courte distance

<sup>1</sup> Ce point est en réalité difficile ; voir pour une analyse nuancée des textes de Helmholtz, Torretti 1978, 164-170 et Heinzmann 1992.

<sup>2</sup> Voir, entre autres, Torretti 1978 (notamment 325-339) et Giedymin 1982.

<sup>3</sup> Ce lien entre géométrie et mesure est très clairement fait par I. Ly, dont je suis ici l'interprétation. Voir Ly 2005 (chez Poincaré, « l'institution d'une géométrie est constitutive de l'opération de mesure »), et Ly 2008 (chap. 7).

<sup>4</sup> Un des problèmes chez Poincaré est de savoir comment articuler la référence aux lois de la mécanique avec la description de la genèse de la géométrie. La métrique est-elle conventionnelle à cause de la façon dont le concept d'espace est développé par l'esprit humain, ou bien est-elle conventionnelle parce que le choix d'une métrique dépend ultimement du genre de physique que l'on adopte ? Voir Nabonnand 2000b et Paty 1999.

entre deux points. Mais ce sont précisément les axiomes de cette nature qu'Euclide énonce. Les autres, qui sont plus directement associés à l'idée de déplacement et à l'idée de groupe, sont justement ceux qu'il admet implicitement et qu'il ne croit même pas nécessaire d'énoncer. Cela revient à dire que les premiers axiomes (ceux qui sont énoncés) sont le fruit d'une expérience plus récente, tandis que les sous-entendus ont été assimilés les premiers par nous; par conséquent la notion de groupe existait avant toutes les autres.

Poincaré interprète donc le fait qu'il n'y ait pas d'axiomatisation du déplacement des figures dans les *Eléments* comme une nouvelle indication de la profondeur et de l'universalité du concept de groupe en géométrie. La notion serait tellement liée au concept d'espace que le besoin d'une axiomatisation ne serait même pas ressenti par les grecs. Selon Poincaré, Helmholtz et Lie n'auraient fait ainsi qu'explicitier une machinerie conceptuelle que tous les géomètres avant eux mobilisaient déjà sans le savoir. L'affirmation selon laquelle l'approche en termes de groupes est naturelle et universelle sépare encore une fois Poincaré et Russell. L'auteur des *Principles* insistaient sur le caractère compliqué et artificiel des approches « directes » de la métrique ; Poincaré, au contraire, cherche à convaincre son lecteur du fait que sa conception, indépendante du cadre projectif, est complètement naturelle. Mais ce désaccord se fait une nouvelle fois à partir d'une position commune : rendre compte de la géométrie métrique, c'est, pour les deux auteurs, rendre compte de son caractère « naturel », élémentaire.

### III-2. Géométrie et métrique

Il existe donc un très puissant mouvement, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, visant à fonder l'ensemble de la géométrie sur la métrique, et plus particulièrement sur la notion de groupe de déplacement. Force est de constater que Russell est resté, dans l'*Essay* comme dans les *Principles*, extérieur à ce courant – et ce alors même qu'il développait, dès 1900b, une définition relationnelle du concept de groupe<sup>1</sup>. Russell n'ignore pas pour autant les travaux de Helmholtz et de Lie. L'*Essay* accorde ainsi une place importante à l'axiome de libre mobilité<sup>2</sup> et, dans l'article qu'il consacre, dans l'édition 1902 de l'*Encyclopaedia Britannica*, à la géométrie non euclidienne, Russell consacre un long développement à Riemann, Helmholtz et Lie<sup>3</sup>. Si la présence de ce courant est, il est vrai, moins affirmée dans les *Principles*, Russell, on l'a vu, défend l'idée qu'une définition directe, non projective, de la métrique est possible – et les travaux auxquels il se réfère à cette occasion, ceux de Pasch, Pieri et Peano, ne sont pas sans lien avec la tradition de recherche inaugurée par Helmholtz. Pourquoi l'auteur des *Principles* n'accorde que si peu d'importance, dans sa théorie de la géométrie, aux œuvres de Helmholtz et de Lie ?

Deux raisons expliquent la méfiance de Russell. La première, purement négative, provient de la volonté de séparer la géométrie (étudiée dans le livre VI) de la mécanique (auquel le livre VII des *Principles* est consacré). Dans Russell 1902, le philosophe explique ainsi (496) :

Helmholtz maintenant (que l'axiome de congruence) affirme l'existence réelle des corps rigides, et inférait en conséquence que la Géométrie est dépendante de la Mécanique. Il justifiait sa conception en se référant au processus de la mesure, dans lequel l'instrument de mesure doit être, au moins approximativement, un corps rigide. (...) Mais cela ne constitue pas une analyse de ce que *veut dire* égalité spatiale, et n'a aucun rapport avec la Géométrie. La définition du corps rigide, comme la définition du mouvement géométrique, présuppose ce qui est réellement signifié par l'axiome de congruence. Un corps rigide est un corps qui, à différents instants, occupe des espaces égaux. Ainsi l'égalité des espaces est logiquement antérieure à la rigidité des corps. La façon dont nous découvrons que deux espaces réels sont égaux n'est pas une préoccupation de géomètre ; tout ce qu'il a

---

<sup>1</sup> Voir mon chapitre 1.

<sup>2</sup> Pour un commentaire, voir Torretti 1978, 314-318.

<sup>3</sup> Russell 1902, 478-481, 487-488.



besoin de savoir est que des espaces égaux existent, et le fait que deux quantités spatiales puissent être égales ou inégales.

L'opération de mesure présupposant la distance, il est absurde, comme le suppose Helmholtz, de vouloir définir la congruence par la mesure<sup>1</sup>. Nous l'avons vu, les grandeurs, la grandeur de divisibilité des *stretches* comprise, sont toutes, pour Russell, indivisibles ; ce sont toujours les quantités, c-à-d les tous concrets, les corps matériels, qui sont comparés et ajoutés les uns aux autres. Russell partage donc l'opinion de Poincaré : on ne peut mesurer que les corps dans l'espace, non pas l'espace lui-même. Il est donc absurde de chercher à mesurer, par le report d'un étalon solide, la forme de l'espace lui-même – « l'égalité des espaces est logiquement antérieure à la rigidité des corps ». Russell, à la différence de Poincaré toutefois, semble considérer que l'approche en termes de groupe conduit nécessairement à la confusion dénoncée ici. La notion de déplacement, explique-t-il, n'est pas un concept géométrique, mais une notion mécanique, qui n'a de sens qu'une fois fixée la nature de l'espace dans lequel il est censé avoir lieu. Et c'est précisément en ce qu'elle conduirait à confondre géométrie et mécanique que l'approche de Helmholtz et de Lie serait philosophiquement critiquable. Russell a ici bien évidemment tort – la notion de déplacement est un concept purement mathématique chez Lie et Poincaré. Lorsqu'il évoque l'axiomatisation de Pieri, basée sur la notion de déplacement, Russell prend soin de souligner que le mouvement dont Pieri parle n'est pas une notion physique et ne présuppose aucune propriété métrique (410). Mais le philosophe ne paraît tout simplement pas réaliser qu'il en va de même dans l'approche algébrique. Cet aveuglement doit être, semble-t-il, mise au compte de l'opposition russellienne aux approches relativistes de l'espace. L'inspiration qui gouverne les théories de Helmholtz, mais également de Poincaré, est « relativiste » : l'espace est chez les deux penseurs engendré à partir des relations et des déplacements entre les corps. Russell l'a bien vu, et la méfiance qu'il éprouve à l'encontre de la notion de déplacement est une conséquence de sa défense de l'« espace absolu ». Il reste que ce premier argument russellien n'est pas recevable.

La deuxième raison permettant d'expliquer le relatif désintérêt de Russell pour la tradition incarnée par Helmholtz, Lie et Poincaré est plus substantielle. Nous l'avons dit, l'espace est pour Russell fondamentalement un concept projectif. Or, un des buts des géomètres projectifs, et en particulier de Von Staudt auquel Russell et Pieri se réfèrent souvent, était de garantir l'indépendance et l'autonomie de la nouvelle géométrie par rapport à toute considération métrique – « de purifier (la géométrie projective) de toute tâche métrique » (Russell 1903, 421)<sup>2</sup>. Non seulement la géométrie métrique n'est pas au centre de la pensée russellienne de l'espace, mais pire : affirmer que la géométrie projective est la théorie matrice, c'est nécessairement, pour Russell, s'engager à écarter des fondements de la géométrie toute référence aux concepts de mesure et de quantité. Dans l'*Essay*, Russell divise ainsi l'histoire de la « métageométrie » (i.e. des géométries non euclidiennes) en trois périodes. La première, qualifiée de « synthétique », correspond aux travaux de Lobatchevsky et Bolyai ; la seconde, l'étape « métrique », est celle inaugurée par Riemann, poursuivie par Helmholtz et Lie – elle « se base sur les méthodes de la géométrie analytique métrique » (18) ; enfin, la troisième, projective, dans lequel il inscrit ses propres recherches, est celle qui s'ouvre avec les travaux de Cayley et de Klein – elle « se distingue de la seconde (...) par sa méthode qui est projective au lieu d'être métrique » (18). Russell considère ainsi qu'il y a une opposition tranchée entre le second et le troisième stade de cette évolution, entre l'approche métrique

<sup>1</sup> Comme nous l'avons vu, cette critique est faite à différentes reprises dans Russell 1903 (161, 405-406, 414).

<sup>2</sup> Ainsi, le rapport harmonique entre deux couples de points n'est pas, chez Von Staudt, défini comme un rapport entre rapports de longueurs, mais par une construction géométrique (le quadrilatère de Von Staudt) qui ne met en jeu que les relations d'incidence dans le plan ; voir la figure 1 du chapitre 1.

(dans laquelle il inclut Riemann, Helmholtz, et Lie<sup>1</sup>) et la méthode projective qu'il promeut. C'est cette opposition qui explique son peu d'intérêt pour les développements de la géométrie en termes de groupe. La façon dont Russell voit l'histoire de la métageométrie, la manière notamment qu'il a d'opposer les méthodes projectives et les méthodes métriques, prête toutefois le flanc à la critique. La « seconde » période regroupe en réalité des approches très diverses, que Russell, à cause de l'insuffisance de son analyse, ne parvient pas à séparer. Les questions posées par la coordination doivent ainsi être distinguées de celles soulevées par la métrique ; on peut introduire des coordonnées sans pour autant définir de distance, et l'inverse est également vrai. Qualifier de « métrique » les géométries qui usent des méthodes analytiques n'est de plus pas très heureux. Le point de vue de Lie et de Poincaré est algébrique, non véritablement « analytique » au sens où Russell emploie ce terme : aucun axe de coordonnées, aucun nombre n'est introduit dans la définition de l'espace. Pourquoi Russell ne prend-il pas cela en compte ? Toujours dans le même ordre d'idée, le rôle qu'il fait jouer à Klein est très étonnant. Klein est plus connu aujourd'hui pour le programme d'Erlangen (i.e. comme le promoteur de l'approche algébrique inaugurée par Lie et reprise par Poincaré) que pour la définition projective des distances. Pour Klein lui-même, aucune opposition n'existait d'ailleurs entre le point de vue projectif adopté en 1871 et celui des groupes de transformation revendiqué un an plus tard<sup>2</sup> ; loin de s'opposer à l'idée que la géométrie projective occupe une place centrale, l'approche algébrique offre en effet la possibilité de dériver les trois groupes métriques classiques à partir du groupe des homographies<sup>3</sup>.

Si toutes ces critiques sont parfaitement fondées, un point cependant mérite d'être noté : Poincaré partage avec Russell l'idée qu'il y a une véritable opposition entre son approche algébrique et celle de Von Staudt. Après avoir longuement développé sa conception des fondements de la géométrie, Poincaré évoque, dans un très intéressant passage de son 1898, une alternative possible (c'est la seule qu'il évoque<sup>4</sup>), qu'il nomme « le raisonnement de Von Staudt » (28) :

On sait que Staudt a essayé de construire la géométrie sur des principes différents. Staudt n'admet que les axiomes suivants : 1) Par deux points on peut toujours mener une droite ; 2) Par trois points on peut toujours faire passer un plan ; 3) Toute ligne droite ayant deux de ses points dans un plan est entièrement contenue dans ce plan ; 4) Si trois plans ont un point commun, et un seulement, toute ligne droite coupera au moins un de ces trois plans. Ces axiomes suffisent à établir toutes les propriétés *descriptives*, relatives aux intersections de lignes et de plans. Pour obtenir les propriétés métriques nous commençons par *définir* un faisceau harmonique de quatre droites en prenant comme définition la propriété descriptive bien connue. Alors le rapport anharmonique de quatre points est *défini* et enfin, en supposant que l'un de ces quatre points a été rejeté à l'infini, le rapport de deux longueurs est *défini*.

Poincaré reconnaît donc la possibilité de fonder la géométrie, comme Russell cherche à le faire, sur les propriétés projectives de l'espace. Et, plus intéressant encore, il reconnaît que cette approche s'oppose à ses propres conceptions, fondées sur les groupes de déplacement. La parenté des analyses ne s'arrête pas là :

Pour obtenir les propriétés métriques nous commençons par *définir* (...) le rapport anharmonique de quatre points (...) et enfin, en supposant que l'un de ces quatre points a été rejeté à l'infini, (nous définissons) le rapport de deux longueurs (...). C'est là le point faible de la théorie précédente, si séduisante qu'elle soit. Arriver à la notion de longueur en la regardant comme un cas particulier du rapport anharmonique est un détour artificiel auquel on répugne. Ce n'est évidemment pas de cette manière que nos notions géométriques se sont formées. (...) Si nous avions procédé comme le suppose la géométrie de Staudt, quelque Apollonius aurait découvert les

<sup>1</sup> Le cas de Lie est plus complexe, voir note suivante.

<sup>2</sup> Russell paraît conscient de cela. Ainsi Russell explique que Lie « applique les méthodes projectives aux formulations de Helmholtz » (Russell 1897a, ix, §45), et qu'il occupe donc un entre-deux instable entre la seconde et la troisième période.

<sup>3</sup> La présentation (modernisée) du programme d'Erlangen que l'on trouve dans Brannan 1999 met bien relief ce point.

<sup>4</sup> Poincaré 1902, une autre géométrie purement « qualitative » (non métrique) est mentionnée : l'*Analysis Situs*, c'est-à-dire la topologie. Sur la topologie chez Poincaré, voir Torretti 1978, 352-358.

propriétés des polaires. Mais ce n'eût été que longtemps après que les progrès de la science auraient fait comprendre ce qu'est une longueur ou un angle. Nous aurions dû attendre quelque Newton pour découvrir les différents cas d'égalité des triangles. Et ce n'est évidemment pas de cette manière que les choses se sont passées.

L'objection que Poincaré adresse au « raisonnement de Von Staudt » est donc très exactement la même que celle que Russell émet à l'encontre de la métrique projective. Dans une telle approche, la longueur est en effet définie à partir du rapport anharmonique ; or « arriver à la notion de longueur en la regardant comme un cas particulier du rapport anharmonique est un détour artificiel auquel on répugne ». Les définitions de Klein, même si elles sont logiquement irréprochables, ne sont pas acceptables car elles n'expliquent pas le caractère central de la métrique dans les sciences mathématiques. Russell et Poincaré partagent tous deux l'idée que la définition projective de la distance est insuffisante. En quoi alors diffèrent-ils ?

Russell, on l'a vu, distingue deux concepts de distance, la distance comme relation et la distance comme divisibilité, et affirme que la distance, au sens de divisibilité, est une donnée empirique. Cette double manœuvre lui donne les moyens de relever le défi architectonique sans pour autant renoncer au raisonnement de Von Staudt. Si on n'a pas eu besoin d'« attendre quelque Newton pour découvrir les différents cas d'égalité des triangles », ce n'est pas, selon Russell, parce que la notion de métrique est mathématiquement fondamentale, mais parce que nous faisons quotidiennement l'expérience de la distance. Poincaré est conventionnaliste et ne peut suivre son adversaire sur ce point. Mais, à la différence de Russell, il soutient que l'approche « directe » n'est pas compliquée et artificielle. Le concept de groupe de déplacement est mathématiquement tellement naturel, explique Poincaré, qu'il est déjà présent, implicitement, chez Euclide. Le savant français n'a donc pas besoin de se référer à une intuition empirique pour donner un sens au concept de distance.

Résumons. La question posée était celle de savoir pourquoi Russell n'accordait que très peu de place aux travaux de Helmholtz, Lie et Poincaré sur les fondements de la géométrie. Une première réponse est fournie par le lien que Russell tisse entre ces travaux et les conceptions relativistes de l'espace. Russell est absolutiste ; il sépare de façon tranchée la géométrie (l'étude des propriétés de l'espace) de la mécanique (l'étude des propriétés des corps dans l'espace) et refuse donc pour cette raison de fonder la géométrie sur le déplacement. Mais cette première réponse est insatisfaisante ; Russell ne paraît pas saisir que le concept de déplacement est chez Poincaré une notion purement mathématique. Une autre solution consiste à voir dans l'attitude russellienne une conséquence de sa vision générale de l'histoire de la « métageométrie » ; dans le sillage des géomètres du XIX<sup>ème</sup>, Russell oppose les approches pures (projectives) aux approches métriques. Les considérations de Helmholtz et de Poincaré, appartiendraient pour le philosophe à la seconde catégorie, et n'auraient pas, pour cette raison, voix au chapitre. Là encore, la réponse laisse à désirer. Le point intéressant est toutefois que cette opposition est reprise par Poincaré lui-même, qui, de surcroît, adresse à la dérivation projective de la métrique exactement la même critique que Russell. L'idée qu'il y a une bifurcation entre l'approche en termes de groupe et celle de Von Staudt est donc commune aux défenseurs de l'un et de l'autre paradigme. Si Russell et Poincaré divergent, ils sont au moins en accord sur la façon dont ils le font.

### III-3. La nature de la perception de l'espace

Le point de clivage majeur entre Russell et Poincaré concerne le statut de la géométrie métrique. Russell ne défend pas l'idée que toutes les géométries métriques sont empiriques – on l'a vu, il y a dans les *Principles* plusieurs théories métriques qui sont considérées comme des branches des mathématiques pures. Mais il soutient qu'il y a une géométrie métrique empirique. Cette thèse heurte de plein fouet les conclusions conventionnalistes de Poincaré.

Russell reprend toutefois certains arguments clés de Poincaré, de sorte qu'il n'est pas aisé de comprendre exactement où les deux penseurs se séparent. La thèse que je vais défendre est que leur désaccord porte sur l'analyse de la perception de l'espace – plus généralement, sur celle de la perception tout court.

Tournons nous d'abord vers Poincaré. Le savant français est très clair là-dessus, il n'y a pas de perception de l'espace :

Nos sensations ne peuvent pas nous donner la notion d'espace. (1898, 5)

Aucune de nos sensations, isolée, n'aurait pu nous conduire à l'idée d'espace, nous y sommes amenés seulement en étudiant les lois suivant lesquelles ces sensations se succèdent. (1902, 83)

L'espace n'est pas immédiatement senti ; il est un produit des « lois suivant lesquelles ces sensations se succèdent » – ou dit autrement, il est donné par la structure du groupe qui agit sur la matière des sensations, groupe qui lui-même, s'il est suscité par l'expérience, est délivré par l'entendement. Pour Poincaré, les sensations sont donc des atomes que rien, sur le plan de la perception, ne relie<sup>1</sup> ; ce sont les lois du groupe qui organisent cette matière sensible, par elle-même amorphe. Une comparaison avec Kant ici s'impose. Kant, on le sait, distingue deux éléments dans l'intuition empirique ; une matière, qui correspond au contenu de la sensation ; une forme, qui est « ce qui fait que le divers du phénomène est coordonné dans l'intuition selon certains rapports ». Kant ajoute (54) :

Comme ce en quoi les sensations peuvent seulement se coordonner et être ramenées à une certaine forme ne peut pas être encore sensation, il s'ensuit que, si la matière de tout phénomène ne nous est donnée, il est vrai, qu'*a posteriori*, il faut que sa forme se trouve *a priori* dans l'esprit toute prête à s'appliquer tous, il faut, par conséquent, qu'elle puisse être considérée indépendamment de toute sensation.

Poincaré est ici d'accord avec Kant : une sensation ne peut pas délivrer la forme coordonnant et unifiant les sensations. Mais Kant, on le sait, poursuit son analyse en admettant la possibilité d'une « esthétique transcendantale », c-à-d la possibilité d'une synthèse « passive » du contenu sensoriel par les formes pures de la sensibilité que sont l'espace et le temps. C'est ce dernier point que Poincaré n'accepte pas : la forme coordonnant et unifiant le divers sensoriel est un concept, la structure du groupe de déplacement. Il y a donc bien rupture avec le canevas kantien ; mais cette rupture s'accompagne de la reprise de la thèse selon laquelle rien, au niveau de la sensation elle-même, ne relie le divers.

Allons plus loin. Si Poincaré considère la notion de groupe comme un concept, il n'en affirme pas moins que certaines expériences guident l'entendement dans son élaboration. Quelles sont ces expériences qui suggèrent à la raison de « créer » le concept de groupe ? Comme nous venons de le voir, l'espace n'est pas senti. Ce n'est donc pas la sensation pure, la pure vision, par exemple, qui est à la base de la construction de l'espace<sup>2</sup>. Les expériences conduisant l'entendement à engendrer le concept de groupe sont celles, très complexes, consistant à « compenser » certains changements par d'autres mouvements (1902, 83) :

Nous voyons d'abord que nos impressions sont sujettes au changement ; mais parmi les changements que nous constatons, nous sommes bientôt conduits à faire une distinction. Nous disons tantôt que les objets, causes de ces impressions, ont changé d'état, tantôt qu'ils ont changé de position, qu'ils se sont seulement déplacés. (...) Comment donc avons-nous été amenés à les distinguer ? Il est facile de s'en rendre compte. S'il y a eu seulement changement de position, nous pouvons restaurer l'ensemble primitif d'impressions en faisant des mouvements qui nous replacent vis-à-vis de l'objet mobile dans la même situation relative.

---

<sup>1</sup> Cet atomisme est renforcé chez Poincaré par l'hypothèse physiologique constamment admise selon laquelle chaque sensation est liée à une terminaison nerveuse particulière, complètement séparée de toutes les autres.

<sup>2</sup> Poincaré affirme ainsi qu'un œil fixe, même s'il avait exactement les propriétés physiologiques des yeux normaux, ne pourrait donner les expériences en question (1898, 7-8).

Ainsi si la pure sensation visuelle est dénuée de toute connexion à l'espace, il n'en va pas de même des mouvements de notre regard qui permettent de compenser les changements produits par les mobiles (*Ibid.*) :

S'il s'agit par exemple de la vue et si un objet se déplace devant notre œil, nous pouvons le « suivre à l'œil » et maintenir son image en un même point de la rétine par des mouvements appropriés du globe oculaire.

Les expériences de compensation n'engendrent pas d'elles-mêmes le concept de groupe et le concept d'espace. Mais elles jouent un rôle décisif dans la genèse psychologique de la notion. Déterminer exactement quel est ce rôle et comment l'expérience sensorielle pure guide l'entendement est une question fort discutée<sup>1</sup>. Ici, j'aimerais seulement insister sur la parenté entre les « expériences de compensation » et les procédures de mesure. Le mouvement d'une règle le long d'un segment compense, d'une certaine façon, l'écart entre les extrémités du segment et restaure ce faisant la situation initiale, celle dans laquelle les extrémités de l'étalon et du segment coïncidaient. La règle étalon joue ici exactement le même rôle que l'œil qui se meut, lorsqu'il compense le déplacement effectué par le point mobile. Poincaré fait lui-même la comparaison :

Il n'y a pas d'intuition directe de la grandeur, avons-nous dit, et nous ne pouvons atteindre que le rapport de cette grandeur à nos instruments de mesure. Nous n'aurions donc pas pu construire l'espace si nous n'avions eu un instrument pour le mesurer ; eh bien, cet instrument auquel nous rapportons tout, celui dont nous nous servons instinctivement, c'est notre propre corps. (1908, 89)

Notre corps est notre premier instrument de mesure ; comme les autres, il se compose de plusieurs pièces solides mobiles les unes par rapport aux autres, et certaines sensations nous avertissent des déplacements relatifs de ces pièces, de sorte que comme dans le cas des instruments artificiels, nous savons si notre corps s'est oui ou non déplacé comme un solide invariable. (1930, 39)

La « compensation » est une expérience de mesure où le corps propre joue le rôle d'instrument<sup>2</sup>. Et le processus par lequel notre corps s'instrumentalise est celui là même qui guide l'esprit dans sa construction du concept d'espace. Voir, pour Poincaré, ce n'est pas mesurer ; compenser, en revanche, c'est déjà mesurer et c'est donc déjà, en quelque manière, avoir rapport à un espace.

Revenons à Russell. Comme nous y avons insisté, l'auteur des *Principles* adhère à l'argument selon lequel l'on ne mesure toujours que des rapports entre corps, et jamais directement l'espace. Russell, cependant, rejette le conventionnalisme de Poincaré, et affirme que la métrique est, en son sens le plus fondamental, empiriquement déterminée. Comment Russell peut-il, en partant des mêmes prémisses que Poincaré, en arriver à défendre une position si diamétralement opposée ? La réponse est qu'il y a dans la position conventionnaliste une prémisse cachée : la distance ne peut être directement sentie, elle est nécessairement déterminée à travers un processus de compensation et de mesure. Si on rejette cette hypothèse, alors on peut souscrire à l'idée qu'une mesure (au sens d'une compensation d'un

---

<sup>1</sup> En particulier, il est difficile de distinguer entre les expériences qui président à la création du concept de groupe de celles qui président au choix du groupe. Voir pour plus sur ce point, Torretti 335-351, Nabonnand 2000b, Ly 2008.

<sup>2</sup> Voir aussi ce (beau) passage de *La relativité de l'espace* (1908, 87) : « Si nous regardons le monde dans un de ces miroirs de forme compliquée qui déforment les objets d'une façon bizarre, les rapports mutuels des diverses parties de ce monde n'en seraient pas altérés ; si en effet, deux objets se touchent, leurs images semblent également se toucher. A vrai dire quand nous regardons dans un pareil miroir, nous nous apercevons de la déformation, mais c'est parce que le monde réel subsiste à côté de son image déformée ; et alors même que ce monde réel nous serait caché, il y a quelque chose que l'on ne saurait nous cacher, c'est nous-mêmes ; nous ne pouvons cesser de voir, ou tout au moins de sentir, notre corps et nos membres qui n'ont pas été déformés et qui continuent à nous servir d'instruments de mesure. Mais si nous imaginons que notre corps soit déformé lui-même, et de la même façon que s'il était vu dans le miroir, ces instruments de mesure à leur tour nous feront défaut et la déformation ne pourra plus être constatée. »

changement de position par le déplacement d'un étalon) de la courbure de l'espace n'est pas possible, tout en maintenant la thèse qu'une « estime » directe des rapports de distance est concevable. Citons une nouvelle fois l'extrait du compte-rendu que Russell fait de la traduction anglaise de *La Science et l'Hypothèse* (591) :

L'argument (de Poincaré) est que toutes nos expériences concernent les corps, et que n'importe quel résultat apparemment non-euclidien peut être interprété comme étant dû à la nature des corps, non à la nature de l'espace. Admettant ceci, je ne pense pas que la conséquence (i.e. la conventionalité de la métrique) suive. (...) Certaines relations entre des points permettent un réarrangement complet (...) qui ne ressemble pas du tout à l'arrangement que nous percevons. Ces autres arrangements diffèrent de celui que nous percevons, il semblerait, seulement en ce que nous ne les percevons pas ; et ceci met en évidence la nécessité de supposer que les relations spatiales que nous considérons comme réelles sont *perçues*.

Pour Russell, « les relations spatiales que nous considérons comme réelles sont perçues » ; et lorsque il parle de perception des relations spatiales, Russell ne fait référence à aucune procédure d'étalonnage, mais à une saisie « immédiate » et instantanée des rapports métriques entre segments. L'appréhension des distances n'est pas ici le fruit d'une compensation, mais le résultat d'une estime perceptive directe. Selon Russell, nous aurions la capacité de percevoir des grandeurs de divisibilité entre segments sans « faire bouger » notre regard. Autrement dit, Russell refuse l'approche atomiste de la perception admis à la fois par Kant et Poincaré. Pour lui, il n'est pas vrai que ce que nous percevions soit un pur divers, sans unité et sans coordination ; nous sentons aussi des relations. Reprenons le texte de la lettre à Couturat du 4 avril 1904, elle aussi déjà citée (j'ai mis en gras les passages importants) :

Ce sont les relations, et non les points, qui caractérisent l'actualité de l'espace. Il est donc nécessaire d'admettre que **la sensation** – ou la perception, si vous préférez – **nous révèle des relations aussi bien que les termes des relations**. Toute espèce de relations subsiste entre les points de l'espace actuel ; mais il n'y a qu'une espèce de relations que nous appercevons immédiatement. La perception immédiate des relations est (si je ne me trompe pas) **une chose que Kant n'admet pas**. Mais voici un cas où cette perception est évidente.

Russell suggère ici que notre appareil perceptif est bien plus riche que ne feint de le croire Poincaré. Contrairement à ce que Kant (et Poincaré) pense, il est possible, selon Russell, de percevoir « des relations aussi bien que les termes des relations » – et notamment les relations de divisibilité qui constituent l'espace en son sens métrique. Or, si on admet l'existence d'une intuition empirique de l'espace lui-même, indépendante de toute procédure de mesure, alors, bien évidemment, tout le raisonnement de Poincaré s'écroule<sup>1</sup>. Le savant le sait, lui qui ne cesse, notamment dans *La relativité de l'espace* (Poincaré 1908), d'attaquer l'idée qu'il y aurait une intuition de l'espace (1908, 89) :

Si cette intuition de la distance, de la direction, de la ligne droite, si cette intuition directe de l'espace en un mot n'existe pas, d'où vient que nous croyons l'avoir ? Si ce n'est là qu'une illusion, d'où vient que cette illusion est si tenace ? C'est ce qu'il convient d'examiner.

Ce texte introduit un des nombreux développements sur la genèse psychologique du concept d'espace, et suggère donc qu'une des raisons pour lesquelles Poincaré élabore cette théorie est son désir de montrer que la notion de distance, loin d'être une donnée intuitive primitive, est le résultat d'un processus complexe d'association entre sensations, où les compensations

---

<sup>1</sup> Selon l'interprétation présentée ici, Russell devrait considérer avec beaucoup de scepticisme les tentatives de déterminer la courbure de notre espace fondée sur la mesure. Et force est de constater que la référence à de telles expériences (les triangulations de Gauss), présente dans les premiers textes, disparaît complètement des *Principles*. Lorsque Russell évoque le sujet dans son article pour l'*Encyclopaedia Britannica* (1902, 502), il émet ainsi de fortes réserves sur les tentatives reposant sur la mesure des distances entre la Terre et certains astres, précisément parce que les lois de l'optique et de la mécanique présupposent la géométrie euclidienne.

jouent un rôle majeur. Poincaré ne ferait ici que reprendre une manœuvre classique dans la tradition empiriste associationiste – montrer que ce que l'on considère comme une donnée n'est que le produit de connexions répétées et habituelles entre sensations.

Russell ne prétend pas seulement que nous avons une perception de la distance (de la divisibilité) ; il affirme que cette intuition est susceptible de donner un sens à la notion de métrique telle qu'elle est développée en géométrie. La position russellienne est-elle tenable ? La superposition est, comme le note Poincaré, un concept euclidien fondamental : comment une estime directe des longueurs, nécessairement approximative et vague, pourrait-elle s'y substituer ? Qu'il y ait une saisie intuitive des relations spatiales est une chose que l'on peut accorder ; mais que cette perception puisse permettre de distinguer entre les diverses géométries en est une autre, beaucoup plus douteuse. Russell, pressé par Couturat sur ce point, maintient ses positions (lettre du 22/04/1904, Schmid 2001, 382)<sup>1</sup> :

Si vous admettez, même de la manière la plus vague et générale qu'il y a des arrangements des points de l'espace qu'exclue l'expérience, vous admettez que l'expérience peut nous montrer certains rapports entre les points (...). Du moment qu'on admet que l'expérience nous montre des relations spatiales, il s'ensuit que ces relations que nous percevons sont ou bien euclidiennes, ou bien non-euclidiennes.

Mais il n'en dit pas plus et avoue même son embarras (lettre 17/05/1904, Schmid 2001, 392) : « je ne me sens pas très à l'aise dans cette question (de l'espace), qui appartient à la théorie de la connaissance, pas à la logique. » Manque incontestablement ici un argument qui permettrait au lecteur de comprendre comment l'intuition de la distance se manifeste, chez Russell, au niveau de la pratique géométrique.

La référence à la théorie de la connaissance, et donc à la psychologie, n'est cependant pas gratuite. Or sur ce point, les positions du philosophe anglais semblent plus fortes et pertinents que celles du savant français. La thèse kantienne selon laquelle nos sensations seraient des atomes amorphes sans unité est en effet déjà, à l'époque de Poincaré, extrêmement contestée. L'un des chefs de file de l'opposition est précisément Meinong – dont Russell, au moment où il écrit à Couturat, est en train de lire un des plus importants ouvrages, *Über Annahme*. Meinong y développe une classification complexe des différents types d'actes intentionnels et de leurs corrélats et y affirme notamment l'existence d'une appréhension directe de certains objets « d'ordre supérieur », les *Gestalts*. Une « qualité de *Gestalt* », une mélodie par exemple, est le corrélat d'une sensation, au même titre qu'une note de musique – mais à la différence des autres sensations atomiques, la *Gestalt* se présente comme un certain rapport, une forme d'articulation : percevoir une mélodie, c'est sentir une certaine relation entre les notes qui la composent<sup>2</sup>. Il est donc faux de soutenir, avec Kant et Poincaré, que le divers sensible n'a en lui-même aucune unité, que seul l'entendement ou une forme vide de l'intuition permettent de coordonner les sensations. Il y a, selon Meinong, des « objets d'ordre supérieur », des modes d'unification du divers phénoménal, des *Gestalts*, qui sont sentis. Russell reprend, dans le compte-rendu extrêmement favorable qu'il rédige de *Über Annahme*, la thèse de Meinong (et l'exemple de la mélodie ; voir 1904, 211) et affirme notamment que les relations sont des objets d'ordre supérieur. Ce cadre est certainement celui que Russell a derrière la tête lorsqu'il écrit à Couturat : l'estime directe des rapports métriques comme la perception de la mélodie

---

<sup>1</sup> Voir aussi lettre du 17/05/1904 (*Ibid.*, 392) : « Quant à l'espace, je soutiens mon opinion. Il est vrai qu'il faut un long travail d'élaboration pour arriver à un espace géométrique, mais il faut des données pour l'élaboration. Il a fallu un long travail pour construire la carte de l'Afrique ; pourtant c'est l'expérience qui a fourni les données du travail. Il est vrai que les relations spatiales ne sont pas *nécessaires* (si ce mot a un sens) ; c'est la marque habituelle des faits empiriques. »

<sup>2</sup> Pour une présentation des travaux des philosophes et psychologues autrichiens, élèves de Brentano, et collaborateurs de Meinong, je renvoie à Smith 1994, notamment son chap. 8, consacré aux recherches de C. von Ehrenfels, et leurs influences sur Stumpf, Meinong et Husserl.

se fonderaient sur une conception pré-*Gestaltiste* de la sensation<sup>1</sup>. L'opposition de Russell à Poincaré recouperait donc en partie celle entre la nouvelle psychologie autrichienne, qui commence à s'implanter fermement en Angleterre au tournant du siècle<sup>2</sup>, et la vieille tradition associationniste de plus en plus contestée.

Concluons cette comparaison par un tableau récapitulatif des positions respectives de Poincaré et Russell concernant le statut de la géométrie métrique :

KANT	L'espace n'appartient pas à la matière des phénomènes		L'espace est une forme de l'intuition sensible
POINCARÉ	L'espace n'appartient pas à la matière des phénomènes = nous ne sentons pas l'espace	Les expériences qui suscitent l'idée d'espace sont les expériences de compensation et de mesure	L'espace (la forme) est le « groupe » défini comme concept de l'entendement
RUSSELL	Il y a une sensation de la matière des phénomènes (couleur, sons, etc.)	Les expériences de compensation et de mesures présupposent la définition d'un espace et d'une métrique	Il y a une sensation des relations spatiales

Poincaré et Russell sont en désaccord : le premier affirme que le choix de la métrique est conventionnel, le second qu'il y a une géométrie métrique empirique<sup>3</sup>. Cette spectaculaire divergence ne doit toutefois pas occulter les nombreux points d'accord. Russell et Poincaré ont notamment en commun un même rapport au kantisme ; les deux philosophes refusent de distinguer une composante matérielle et formelle de la sensation, et refusent en conséquence de fonder la géométrie sur le caractère formelle de l'intuition spatiale. À partir de cette base partagée, les voies se séparent. Poincaré fait de l'espace métrique un concept, tandis que Russell fait de la métrique le contenu d'une perception (colonne de droite). Les mêmes expériences de compensation et de mesure ne jouent d'autre part absolument pas le même rôle chez les deux auteurs : elles présupposent l'existence d'une métrique chez Russell, alors qu'elles sont ce qui occasionne la « création » du concept de l'espace chez Poincaré (colonne du milieu).

## Conclusion

Les propos de Russell sur la géométrie métrique n'ont pas toujours bonne presse, et c'est compréhensible. Les seuls exposés d'ensemble sont donnés dans l'*Essay* et dans les articles de réponse aux attaques de Poincaré, à une période où Russell se cherche encore. Dans les autres textes de la même époque, la question est, la plupart du temps, abordée par Russell à l'occasion d'un autre problème, celui du caractère absolu ou relatif de l'espace, celui de la

<sup>1</sup> A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, la perception des rapports entre segments est un des champs d'étude privilégiés en psychophysique. Pensons par exemple à l'illusion de Müller-Lyer découverte en 1889. C'est à ce genre d'expérience que Russell aurait pu faire référence pour préciser sa pensée.

<sup>2</sup> Voir sur ce point le très éclairant Nasim 2009.

<sup>3</sup> N'oublions pas que Russell développe trois approches de la géométrie métrique. La définition d'un espace métrique n'est pas nécessairement fondée, chez Russell, sur la grandeur de divisibilité. On peut par exemple introduire une métrique par la méthode projective ; dans ce cas, le choix entre les géométries n'est pas dicté par l'expérience, et ce que raconte Poincaré est vrai – mais, à la différence de Poincaré, Russell admet l'existence d'une science empirique des grandeurs de divisibilité.



nature des définitions et de l'indéfinissabilité, etc. Dans les *Principles*, l'analyse de la géométrie métrique menée dans les chapitres XLVII et XLVIII présuppose constamment la théorie de la grandeur développée dans la partie III – et sa cohérence générale est tout sauf évidente<sup>1</sup>. J'ai cherché, dans ce chapitre, à montrer que se cachait, derrière cette apparente désorganisation, une théorie très charpentée et systématique, reposant sur de nombreuses distinctions extrêmement fines qu'il faut toujours garder en tête si l'on veut ne pas se perdre. La clé de voûte de l'ensemble est l'idée meinongienne que, lorsque l'on analyse la notion de longueur d'un segment, on commet toujours une confusion entre deux sortes de grandeurs, les différences et les dissimilarités. Russell se fonde sur cette intuition pour différencier deux géométries métriques : l'une mathématique basée sur la géométrie projective, l'autre empirique portant sur la grandeur de divisibilité. La distinction permet de complexifier le problème du statut de la géométrie métrique ; s'il n'y a pas une, mais plusieurs géométries, la réponse à la question du statut, au centre des discussions à la charnière du XIX<sup>ème</sup> et du XX<sup>ème</sup> siècle, ne peut être univoque.

Le schéma se complique encore, car Russell intègre dans sa réflexion des développements liés au problème du caractère absolu ou relatif de l'espace et à la celui corrélatif du rapport entre projectif et métrique. Au final, pas moins de trois géométries différentes se dissimulent sous une commune appellation. L'analyse de la métrique développée dans la partie VI ne reprend donc pas sans les altérer les conclusions de la partie III sur la grandeur mesurable. Mais les distinctions élaborées dans le contexte de la théorie de la quantité ne sont pas abolies ; elles s'enrichissent, se complexifient, s'approfondissent tout au long de la partie VI. Nous l'avons déjà dit, et nous le redirons encore : Russell se montre toujours extrêmement attentif aux spécificités des théories qu'il considère et n'applique jamais « mécaniquement » à un domaine (en l'occurrence la géométrie métrique) un canevas hérité de l'analyse d'un autre champ (celui de la grandeur). On ne doit donc pas s'étonner que le schéma proposé dans la partie III ne se retrouve pas telle qu'elle dans la partie VI. Au contraire, même : l'existence de ces désajustements, de ces points de « frottement », montre que la confrontation avec la géométrie, telle que les mathématiciens la pratiquaient alors, n'est pas feinte. Par contrecoup, l'existence de ces tensions donne de la valeur et de la solidité aux nombreux passages et points communs entre la partie III et la partie VI. La systématisme du traitement russellien ne provient pas d'une volonté *a priori* d'unifier la théorie de la grandeur à celle de la métrique ; elle ressort de l'examen du concept de grandeur mesurable, d'une part, et de l'étude indépendante de la géométrie métrique, de l'autre.

La réelle force de la réflexion russellienne se révèle lorsqu'on la compare à l'approche de Poincaré. Ce qui sépare les deux penseurs est à la fois important et mince. Important, car Russell et Poincaré ne s'appuient pas sur les mêmes mathématiques – à la tradition de Staudt, Poincaré oppose celle de Helmholtz, plus proche selon lui du raisonnement d'Euclide. Mais ce qui les sépare est également mince, car le rapport à la doctrine kantienne de la forme de l'intuition est chez les deux philosophes le même, la volonté de donner toute son indépendance et sa centralité à la géométrie métrique est commune, la critique de l'empirisme de Helmholtz identique. Il est dommage que les commentateurs qui se sont penchés sur la dispute entre Russell et Poincaré aient ignoré les *Principles*. La prise en compte de la partie III et de la partie VI aurait permis de complexifier et de rééquilibrer l'image que l'on se fait du débat. Bien des points sont, bien entendu, extrêmement critiquables chez Russell (notamment, tout ce qui concerne la grandeur de divisibilité). Mais il y a des choses surprenantes dans cette théorie (l'importance accordée aux considérations architectoniques),

---

<sup>1</sup> On peut légitimement être désorienté par les multiples affirmations apparemment contradictoires éparpillées en divers endroits du livre : la grandeur n'est jamais divisible, mais il y a une grandeur de divisibilité ; la distance est un concept projectif, mais la géométrie métrique est empirique ; il est impossible de mesurer la courbure de l'espace, mais une perception des distances est possible ; la distance est un indéfinissable, mais Russell la définit ; etc.

de belles intuitions (celle concernant l'existence de plusieurs notions de longueurs, celle aussi tenant à l'estime perceptive des distances), et surtout une cohérence qui force l'admiration. Ce chapitre doit être lu comme un effort pour sortir cet édifice de l'ombre.

## APPENDICE : *Principles*, §411

La construction présentée au §411 n'est pas extrêmement intéressante ; elle est de plus décrite de façon très rapide et vague par Russell. Mais elle mérite un traitement particulier, car elle relie la théorie géométrique de la métrique avec les développements sur la quantité (notamment l'axiomatique de la distance) présentés dans le chapitre XXI et dans Russell 1900b. Elle annonce aussi les *Principia* : la doctrine des familles de vecteurs aboutit à une définition des réseaux de Möbius très similaire à celle esquissée ici.

Russell commence par élaborer une construction (427):

Soient  $p, q, r$  trois points fixés,  $abc$  une ligne ne passant pas par  $p$  ou  $q$  ou  $r$  mais passant dans le plan  $pqr$ . Posons que  $qr$  passe par  $a$ ,  $rp$  par  $b$ ,  $pq$  par  $c$ . Soit  $R_I$  la relation qui a lieu entre  $x$  et  $y$  lorsqu'ils sont des points sur  $abc$  et que  $xr, yq$  se croisent sur  $ap$  (...).

Le schéma suivant (fig. 1) permet de comprendre de quoi il retourne :

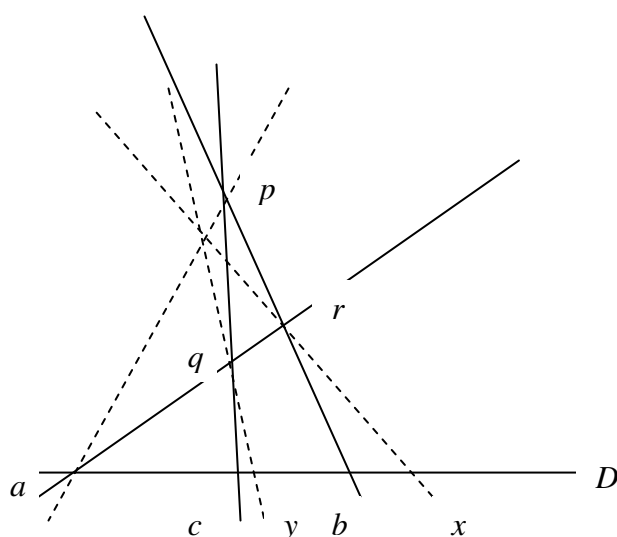


Figure 1 :  $x$  a avec  $y$  la relation  $R_I$ . Le point  $a$  est le point invariant par  $R_I$ , et on a, par construction,  $bR_Ic$ . Il faut imaginer que  $a$  est le point à l'infini, et que  $R_I$  est une transformation unité.

Russell continue (427-428) :

Alors un réseau de Möbius peut être considéré comme construit à partir des répétitions (de la relation  $R_I$ ). Nous aurons, si  $xR_Iy, yR_Iz$  alors  $xH_{ayz}$ . Nous pouvons définir la racine carrée de  $R_I$ , ou n'importe quelle puissance de  $R_I$  dont l'index est une puissance positive ou négative de 2. De plus, si  $s$  est n'importe quel point de  $qr$ , et  $xR'_Iy$  signifie que  $x$  et  $y$  sont sur  $abc$  et  $xr, ys$  se croisent sur  $ap$ , alors  $R_I R'_I = R'_I R_I$ . De ces propositions, qui sont prouvées par des méthodes purement projectives, il résulte que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres, nous pouvons définir  $R_I^{\alpha+\beta}$  comme signifiant  $R_I^\alpha R_I^\beta$ , à condition que  $R_I^\alpha$  et  $R_I^\beta$  aient déjà été définies ; en conséquence, puisque  $R_I^{2^n}$  peut être définie si  $n$  est positif ou négatif, toutes les puissances rationnelles de  $R_I$  peuvent être définies, et les puissances irrationnelles peuvent être définies comme limites. En conséquence,  $x$  étant un nombre réel quelconque, positif ou négatif, nous pouvons définir  $R_I^x$ , car nous pouvons identifier  $R_I^{-x}$  avec  $\check{R}_I^x$ . Nous pouvons maintenant considérer cette relation  $R_I^x$  comme la distance entre deux points quelconques, et considérer  $x$  comme la mesure de la distance. Nous verrons que les distances ainsi définies ont les propriétés usuelles des distances euclidiennes, à l'exception du fait que la distance de  $a$  à n'importe quel autre point est infinie.

Russell s'inspire ici directement de F. Klein, qui voit dans les réseaux de Möbius des échelles (*skala*) construites sur la droite projective. La relation  $R_I$  qui lie les points  $b$  et  $c$  est en effet une transformation projective parabolique de la droite  $D$  qui laisse  $a$ , le point à l'infini, invariant<sup>1</sup>, et qui engendre la *skala*. Reprenons la figure déjà donnée tirée de Klein 1928 :

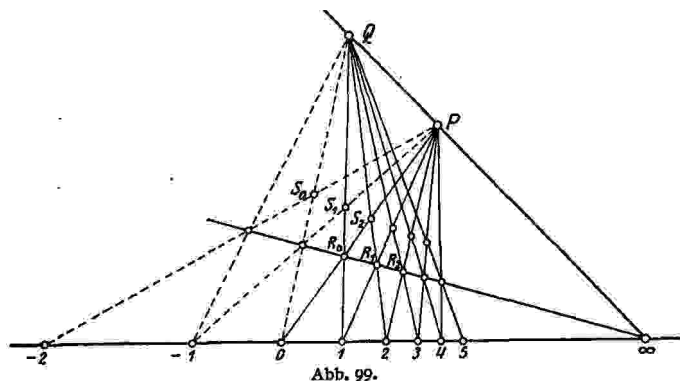


Fig. 2 : Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Berlin : J. Springer, 1928, 159.

Le rôle de  $\infty$  est joué chez Russell par le point  $a$ , et, en posant  $x=b$  et  $y=c$ , on peut faire correspondre le  $b$  au 0 et le  $c$  au 1 de Klein. Chez Klein, 2 est le conjugué harmonique de 0 par rapport à 1 et  $\infty$  ; on retrouve bien le résultat : si  $z=R_I c$ , alors  $bH_{ac}z$ . La relation  $R_I$  correspond à un pas dans l'échelle, construite de façon purement projective.

Habituellement, après avoir défini les images de 1 par les puissances entières de  $R_I$ , on construit les images de 1 par les puissances fractions de l'unité de  $R_I$ , en faisant jouer au zéro le rôle de l'infini, et à  $\infty$  le rôle du zéro. On définit ainsi  $d=R_I^{1/2} c$  ( $d$  est le point de coordonnée  $1/2$ ) comme étant le conjugué harmonique de  $a$  par rapport à  $b$  et  $c$ , et l'on poursuit la procédure pour construire toutes les images ayant avec  $c$  une relation  $R_I^{1/n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (tous les points de coordonnées  $1/n$ ). En combinant les deux procédures, on parvient à identifier chaque élément du réseau de Möbius engendré par  $a$ ,  $b$  et  $c$  à l'image de  $c$  par une relation  $R_I^q$ ,  $q \in \mathbb{Q}$  (à associer à chaque élément de l'ensemble une coordonnée rationnelle). Par des considérations topologiques, on parvient ensuite à étendre la coordination à tous les points de la droite projective.

Russell n'emprunte cependant pas ce sentier bien balisé. Le philosophe s'intéresse directement aux transformations projectives de la droite  $D$  laissant  $a$  invariant ; il veut montrer qu'elles sont toutes de la forme  $S = R_I^x$ , avec  $x$  étant un nombre réel. Il refuse donc, comme le fait Klein, de fixer d'emblée des points origines, pour déterminer ensuite leurs images par les transformations. La démarche russellienne est tout à fait cohérente avec la conception de la distance exposée en 1900b : la droite  $D$  correspond en effet à l'ensemble de base  $\lambda$  sur lequel sont définies les relations distances appartenant à  $L$  que sont les transformations paraboliques de la droite projective. Russell ne veut pas introduire des coordonnées sur la droite projective, mais retrouver la structure mise en place en 1900b, c'est-à-dire introduire des distances relationnelles dans un espace projectif – ce qui explique pourquoi il ne fixe pas des points sur  $D$ , mais se concentre sur les transformations de la droite. Le raisonnement ne s'écarte sinon que sur des points de détail de l'approche standard. Au lieu de définir les puissances entières, puis fractionnaires de  $R_I$ , Russell définit, en s'appuyant sur le rapport harmonique et donc la construction du quadrilatère, les puissances de  $R_I$ , dont « l'index est une puissance positive ou négative de 2 » ; puis, s'assurant que la composition

<sup>1</sup> Une transformation projective (ou homographie) de la droite réelle est elliptique si elle ne laisse aucun point invariant, parabolique si elle laisse un point invariant, hyperbolique si elle laisse deux points invariants.

des transformations projectives paraboliques est commutative, il définit les puissances rationnelles de  $R_I$ . Un argument lié à la structure topologique de la droite projective, qui manque ici, mais qui est aisément à la portée de Russell<sup>1</sup>, montrerait que toutes les homographies laissant  $a$  invariant se représentent sous la forme  $R_I^x$  avec  $x$  réel.

Dans le paragraphe 411, Russell, détournant des procédures classiques d'introduction de coordonnée sur la droite projective, montre donc comment il est possible de construire, d'une façon purement géométrique, un ensemble  $L$  de relations définies sur le même domaine et co-domaine  $\lambda$ , formant une distance, au sens de 1900a. D'un point de vue mathématique, le résultat est trivial, puisqu'il constitue une légère généralisation du cas euclidien, servant de matrice à l'axiomatisation d'un Burali-Forti comme d'un Hölder. Mais dans la perspective d'une lecture systématique de l'œuvre russellienne, l'existence d'un tel texte est précieuse. Elle montre que Russell connecte les différents contextes théoriques qu'il considère – la distance n'est pas seulement un concept dont la théorie est faite dans la partie III et oubliée ensuite ; une légère réorganisation de procédures très répandues permet de montrer que ledit concept intervient dans la définition projective d'une métrique. Nous verrons au prochain chapitre comment Russell et Whitehead réintroduisent, en 1913, le paradigme de la coordination dans leur théorie abstraite des quantités.

---

<sup>1</sup> Sur ce point, qui a partie liée avec l'importance que Russell accorde à Pieri, voir Gandon 2004.



## **PARTIE II**

### **Relations et quantités dans les *Principia Mathematica***





## Chapitre 4

### La théorie de la grandeur dans les *Principia Mathematica*.

#### Introduction

Le livre VI des *Principia Mathematica*, qui en l'absence du volume IV, non publié, conclut l'ouvrage, est entièrement consacré à la notion de grandeur. Russell et Whitehead définissent les nombres négatifs, rationnels et réels, comme des relations entre relations quantitatives, et lient ainsi, au niveau des définitions, nombres et grandeurs. Comme je le montrerai, la théorie des quantités élaborée dans les *Principia* reprend et généralise, sur bien des points, la doctrine de la distance élaborée en 1900 et reprise (partiellement) dans les *Principles*. Cependant, ni dans Russell 1900b, ni dans Russell 1903, un lien aussi étroit n'avait été tissé entre nombres et quantités. Les réels étaient en effet définis jusqu'alors d'une façon purement « arithmétique », qui s'inspirait de l'approche dedekindienne en termes de coupures. Or, dans les *Principia*, Russell et Whitehead souhaitent revenir à la définition traditionnelle, euclidienne des nombres comme rapport entre quantités – dit autrement, ils cherchent à rompre avec l'arithmétisation de l'analyse. Whitehead, dans une savoureuse lettre à Russell datée 14/09/1909, explique très clairement la teneur du projet :

Cher Bertie,

L'importance de la quantité provient de ces considérations – la moderne arithmétisation des mathématiques est une erreur complète – bien entendu, une erreur utile, en ce qu'elle tourne notre attention sur les points pertinents. Elle revient à restreindre les preuves aux cas arithmétiques particuliers dont la déduction à partir des prémisses logiques forme un théorème d'existence. Mais cette limitation de la preuve laisse la théorie des mathématiques appliquées (mesure, etc) complètement sans justification. Alors qu'avec une vraie théorie de la quantité, l'analyse procède d'une idée générale, et les entités arithmétiques trouvent leur place comme ce qui procure les théorèmes d'existence. Les considérer comme les seules entités conduit en fait à des complications en mettant en jeu toute sorte de développements hors de propos. En bref, les vieilles algèbres démodées qui parlaient de « quantités » auraient été dans le vrai, si seulement elles avaient su ce que ces « quantités » étaient – ce qui n'était pas le cas. (...) Tu vois en bref que j'ai retrouvé la simple foi de mon enfance. J'espère seulement que ce n'est pas un signe de délabrement intellectuel ou de mort prochaine. Tu devras consacrer quelque attention à mon MS – car ses résultats pourront choquer l'orthodoxie courante. En réalité, les mathématiciens se sentiront comme des presbytériens écossais qui découvriraient qu'un professeur de théologie dans un de leurs collèges a dédié ses travaux au Pape.

À toi avec affection, ANW.

Le pape, ici, c'est Euclide<sup>1</sup> ; et les presbytériens écossais, les collègues mathématiciens de Russell et Whitehead, tous disciples de Cantor et Dedekind.

Ce retour à une conception traditionnelle du nombre comme rapport de quantité ne remet cependant pas en question le processus de logicisation. Contrairement à ce qui se passe chez Burali-Forti, par exemple (qui lui aussi définit les réels comme des rapports de quantités), les propriétés ordinales et algébriques des nombres ne dérivent pas, dans les *Principia*, des propriétés contingentes de la structure quantitative à partir de laquelle ils sont définis, mais découlent directement des principes logiques. Autrement dit, la doctrine de la quantité des

---

<sup>1</sup> Whitehead reconnaît une filiation euclidienne « oblique » dans sa lettre du 28/1/1913 : « Concernant la préface – les recherches sur les « grandeurs » ont commencé par une étude des articles de Burali-Forti dans la *Rivista* et visèrent initialement à obtenir les mêmes résultats. Bien entendu son travail est en réalité fondé sur le livre V d'Euclide – que j'aurai du étudier, mais que je n'ai pas étudié. Ainsi nos antécédents sont Euclide et Burali-Forti. »

*Principia*, si elle se présente comme une alternative à l'arithmétisation de l'analyse, retient malgré tout l'idée dedekindienne selon laquelle les propriétés des réels ne dépendent en aucune manière de la structure du temps ou de l'espace, ou de quelque autre domaine quantitatif que ce soit. C'est cette approche ambitieuse, qui vise à explorer une troisième voie entre Euclide et Dedekind, que je vais exposer ici.

À la différence des *Principles*, qui intégrait dans les développements mathématiques et logiques des considérations métaphysiques, les *Principia*, et particulièrement la partie VI, laissent (volontairement ?) de côté les discussions philosophiques. On ne trouve pas, dans Russell & Whitehead 1913, l'équivalent de la systématisation contenue dans le *Principles*. La non publication du livre IV, qui devait être consacré à la géométrie, ne facilite d'ailleurs pas la tâche du lecteur. Les développements sur la quantité avaient en effet pour fonction initiale d'introduire à la géométrie ; comme la conception que Whitehead et Russell se faisaient de la géométrie métrique nous est inconnue, nous ne pouvons nous y appuyer pour donner un sens à telle ou telle construction. La stratégie herméneutique suivie dans les trois chapitres précédents, consistant à dégager de textes épars, une unité logique et doctrinale, est donc inadaptée à *Principia* VI. J'ai ainsi choisi de suivre, dans ce chapitre 4, de façon la plus fidèle possible, les développements de Russell et Whitehead, afin d'offrir une sorte d'introduction commentée à la lecture de ces textes arides. Je réserve les commentaires plus philosophiques aux deux prochains chapitres. Chaque section des *Principia* est introduite par un texte en anglais (sans formalisme) dans lequel Russell et Whitehead présentent les principaux concepts et théorèmes qui vont suivre – je me suis avant tout basé sur ces passages pour élaborer le commentaire qui suit. Je n'ai (la plupart du temps) pas refait les démonstrations des différents théorèmes émaillant la construction, mais j'ai cru nécessaire d'entrer parfois dans les détails de l'exposé, ne serait-ce que pour saisir le sens véritable des notations utilisées par les auteurs<sup>1</sup>. Je vais d'abord m'intéresser à la définition des nombres positifs, rationnels et réels (section A). Puis, j'analyserai la définition de la grandeur, i.e. la notion de famille vectorielle (section B). Je parlerai, enfin, dans un troisième temps, de la théorie du « *measurement* » (section C et D).

## I- La généralisation des nombres

Le but de cette première section est de commenter la section A du livre VI des *Principia*, consacrée à la définition des nombres négatifs, rationnels et réels. Je me concentrerai sur les deux dernières sortes de nombres, et m'attacherai à montrer en quoi la définition proposée ici diffère de celles, déjà classique à l'époque, élaborées par Dedekind et Cantor.

### I-1. Les nombres dans les *Principles* et les *Principia*

Au début de la partie VI, la nécessité de « généraliser » les nombres, c'est-à-dire de définir, à côté des entiers et des nombres transfinis, des nombres négatifs, des rationnels et des réels, est explicitement liée à l'opération de mesure des quantités (233) :

Le but (du livre VI) est d'expliquer les genres d'applications des nombres appelées *mesure* (et) **pour ce faire**, nous avons d'abord à considérer les généralisations du nombre. (je souligne)

---

<sup>1</sup> J'ai choisi de ne pas complètement moderniser les notations russelliennes, tout en ne les reprenant pas toujours telles quelles, parfois pour des raisons purement techniques (certains symboles ne sont pas disponibles sur les logiciels sous Word) et parfois parce que la traduction (partielle) aide la compréhension. .

Cette connexion entre extension des nombres et opération de mesure est une réelle nouveauté. En 1903, toute relation entre quantités et nombres était rejetée. Comme Russell le déclare au début de la partie III des *Principles* (158) :

La séparation entre nombre et quantité est (...) complète : chacun est entièrement indépendant de l'autre.

Le changement est cependant moins spectaculaire qu'il n'y paraît à première vue. Il ne concerne pas tant l'attitude générale de Russell vis-à-vis des travaux de Cantor et de Dedekind, que son approche des relations entre les types d'ordre et les nombres.

Expliquons ce point. C'est au chapitre XXXIII des *Principles* que Russell expose sa définition des nombres réels. Il se donne un ordre de type  $\eta$  (isomorphe aux rationnels) et il définit un segment de rationnels comme « une classe de rationnels qui n'est pas nulle, ni cependant coextensive avec les rationnels eux-mêmes (i.e. qui contient certains mais pas tous les rationnels), et qui est identique avec la classe des rationnels plus petit qu'un terme (variable) d'elle-même, i.e. avec la classe des rationnels  $x$  tel qu'il y a un rationnel  $y$  de ladite classe qui soit tel que  $x$  est plus petit que  $y$  » (271). Un segment est donc le premier élément d'une coupure de Dedekind. Russell s'attache alors à montrer que les segments de rationnels forment une série et que cet ordre est de type  $\theta$ , ce qui, selon lui, revient à prouver qu'un « segment de rationnels est un nombre réel » (272). Il reconstruit ensuite, sur cette base, les concepts fondamentaux de l'analyse : celui de limite, au chapitre XXXIV, et de continuité (chap. XXXV et XXXVI).

Ces raisonnements, qui s'inspirent beaucoup du très célèbre *Stetigkeit und irrationale Zahlen* de Dedekind, sont bien entendu présents dans les *Principia*. Dans la section \*273, Russell et Whitehead caractérisent le type d'ordre  $\eta$  des rationnels de la façon suivante : un ordre est de type  $\eta$  « s'il est compact (dense), n'a pas de commencement ni de fin, et a  $\aleph_0$  termes dans son champ » (Russell 1913, 199). La classe des séries dites « dedekindiennes » de type  $\theta$  est, elle, définie à la section \*275 ainsi : un ordre  $P$  est de type  $\theta$  si et seulement si chaque sous-ensemble de son champ a un maximum ou une plus petite borne supérieure<sup>1</sup> et s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense dans  $P$ <sup>2</sup>. Les deux logiciens montrent, en reprenant le raisonnement des *Principles*, comment engendrer un tel ordre à partir d'une série rationnelle de type  $\eta$  : la série des segments d'une série rationnelle est dedekindienne. Russell et Whitehead développent ensuite, sur cette base, dans la section C de la partie V, leur analyse des concepts de limite, de convergence et de continuité d'une fonction.

On retrouve donc dans les *Principia* exactement les mêmes concepts et les mêmes techniques que dans les *Principles*. Une chose toutefois change. En 1903, comme on l'a vu, Russell définit le nombre réel comme étant un segment de rationnels. En 1913 au contraire, il prend soin de souligner que les éléments des *series* de type  $\eta$  et  $\theta$  ne sont pas des nombres, et que la définition des types d'ordre est indépendante de toute référence aux réels ou aux rationnels. Ainsi, en \*273, après avoir affirmé qu'une série rationnelle est ordinalement similaire à la série des nombres rationnels positifs et négatifs « pris dans leur ordre de grandeur », les auteurs remarquent que cette propriété « n'est pas (...) la plus appropriée pour ce qui concerne la définition » (199). De même, lors de la définition du type  $\theta$ , aucune référence aux nombres réels n'est faite. Il ne s'agit pas là d'une négligence ou d'un point de détail. Pour Russell et Whitehead, les concepts de base de l'analyse sont des concepts ordinaux et seulement ordinaux – rien, en analyse, ne dépend du fait que les fonctions étudiées soient des

<sup>1</sup> Russell et Whitehead parlent de « *sequent* » au lieu de « plus petite borne supérieure » (Cf. Russell 1912, 559). Remarquons que, selon la définition donnée ici,  $\langle \mathbb{R}, < \rangle$  n'est pas dedekindien :  $\mathbb{R}$  tout entier est inclus dans  $\mathbb{R}$ , et  $\mathbb{R}$  n'admet pas de borne supérieure. Sur ce point, voir page 120 la note sur le concept de semi-dedekindien.

<sup>2</sup> Russell parle de « *median class* » pour désigner ce type de sous-ensemble (Cf. Russell 1913, 186-187).

fonctions numériques. Le sommaire de la section C de la partie V, consacrée aux fondements de l'analyse (1912, 698)<sup>1</sup>, débute ainsi de cette manière :

La section C est concernée par la convergence et les limites des fonctions, et la définition d'une fonction continue. Son objet est de montrer comment ces notions peuvent être exprimées, et plusieurs de leurs propriétés établies, d'une façon beaucoup plus générale que cela n'est fait habituellement, et sans faire l'hypothèse que les arguments et les valeurs des fonctions concernées soient ou bien numérique ou bien numériquement mesurable.

Cette idée, il est vrai, n'est pas absente des *Principles*. Russell consacre le chapitre XXXV à montrer comment les principaux concepts cantorien peuvent être définis « de manière ordinaire », sans faire référence à aucune notion métrique. Mais tout se passe comme si, en 1903, Russell ne distinguait pas vraiment les nombres rationnels et réels de leurs types d'ordre respectif. Dans les *Principia*, en revanche, ce n'est plus le cas. Les nombres rationnels et les nombres réels, pris dans « leur succession naturelle », ont des ordres de type  $\eta$  et  $\theta$  (respectivement), mais ils ne sont pas pour autant identifiables à ces types d'ordre eux-mêmes.

Le lien établi dans les *Principia* entre généralisation des nombres et opérations de mesure n'est donc pas le résultat d'un abandon des théories de Cantor et Dedekind – elle est plutôt la conséquence directe de la thèse selon laquelle leurs travaux portent sur la notion d'ordre sériel, et non pas sur celle de nombre<sup>2</sup>. Russell et Whitehead, sans rien changer à la théorie des types d'ordre, introduisent en 1913 une distinction entre *series* et nombres, et, ce faisant, rendent nécessaire l'élaboration d'une nouvelle théorie : celle de l'extension des nombres de la section A.

Il y a un gain à la manœuvre : si les notions de limites, de continuité, etc... dépendaient, dans leur définition, du concept de nombre réel, alors leurs applications aux phénomènes physiques présupposent une corrélation préalable des phénomènes aux nombres, c'est-à-dire présupposent la mesure. Or tel n'est pas le cas selon Whitehead et Russell. Pour appliquer des concepts relevant de l'analyse mathématique à des phénomènes physiques (par exemple), il suffit en effet, selon eux, de vérifier que ces phénomènes aient un type d'ordre particulier – que ces phénomènes eux-mêmes soient, ou soient corrélés à, des nombres, n'a aucune importance. Ainsi, que ce soit dans *The Concept of Nature*<sup>3</sup> ou dans *Our Knowledge of External World*<sup>4</sup>, les notions de limite et de convergence sont directement appliquées à la série temporelle, sans qu'une corrélation des instants à des nombres aient préalablement été

---

<sup>1</sup> La même thèse est répétée dans l'introduction de la section C (687) : « Dans les définitions habituellement données dans les traités d'analyse, on fait l'hypothèse qu'à la fois les arguments et les valeurs des fonctions sont des nombres d'un certain genre, généralement des nombres réels, et les limites sont prises relativement à l'ordre des grandeurs. Il n'y a, cependant, rien d'essentiel dans les définitions qui demandent de restreindre à ce point les hypothèses. Ce qui est essentiel est que les arguments soient donnés comme appartenant à une série, et que les valeurs soient également données comme appartenant à une série, qui n'a pas besoin d'être la même que la série à laquelle les arguments appartiennent. Dans ce qui suit, nous ferons donc l'hypothèse que tous les arguments possibles de notre fonction, ou tout du moins tous les arguments que nous considérons, appartiennent au champ d'une certaine relation *Q*, qui, dans le cas où nos définitions sont utiles, sera une relation sérielle. » Cette volonté de séparer l'analyse mathématique des structures numériques est clairement indiquée également dans Russell 1919, 227-230 ; pour plus sur ce point, voir chap. 5.

<sup>2</sup> Il faut probablement voir dans cette nouvelle distinction entre l'« ordinal » et le « numérique » une influence des travaux de Hausdorff. Russell et Whitehead citent les *Untersuchungen über Ordnungstypen* (1906) à plusieurs reprises dans les *Principia*, et la référence à Hausdorff scande l'échange épistolaire entre Russell et Jourdain. Dès 1906, Hausdorff milite pour l'adoption d'un point de vue « général », et l'abandon des contraintes qui conduisent à étudier seulement le continu linéaire ou les ensembles bien ordonnés. Voici ce qu'il écrit dans son introduction de 1906 (106) : « Autant que je sache, tous les résultats essentiels (contenus dans ce qui suit) sont nouveaux, puisque jusqu'ici les recherches existantes portent presque exclusivement sur des sous-ensembles du continu linéaire ou sur les ensembles bien ordonnés. (...) Ceci étant dit, il faut reconnaître que des détails dans les recherches qui vont suivre peuvent déjà se trouver dans la littérature existante. (...) Cependant, la correspondance entre mes recherches abstraites et celles des autres, qui ont en vue principalement les applications à l'analyse et à la géométrie, ne s'étend probablement pas au-delà de ces détails. »

<sup>3</sup> Whitehead 1920, 49-73.

<sup>4</sup> Russell 1914, 121-134.

effectuée. La mesure n'est pas indispensable à l'application de l'analyse – c'est pourquoi il faut absolument éviter de faire comme si l'analyse portait sur les nombres. Je reviendrai sur cette idée importante dans les chapitres suivants.

Résumons. Le lien fait en 1913 entre mesure et nombre doit être replacé dans le contexte de la définition de l'analyse mathématique comme théorie des types d'ordre et de leurs propriétés. Russell et Whitehead radicalisent la position des *Principles* en distinguant de façon plus nette deux structures, les structures ordinales, objet de l'analyse mathématique (partie V), d'une part, et les structures numériques, nécessitant un traitement spécial, indépendant de l'analyse (partie VI), de l'autre. C'est ce nouvel objet, dont il n'est pas véritablement question dans les *Principles*, qui constitue le sujet de la section A de la partie VI, dans laquelle il nous faut maintenant nous engager.

## I-2. La définition des rationnels dans les *Principia*

Dans la section \*120, Russell et Whitehead donnent les définitions des cardinaux inductifs et des opérations d'addition et de multiplication entre cardinaux. Leur développement est rendu difficile par leur volonté de généraliser au maximum la portée de leur théorie. Tirant les conclusions de l'impossibilité de dériver par la seule logique l'existence d'une classe infinie, les auteurs refusent ainsi de poser la moindre hypothèse sur la cardinalité de la classe des individus. Ceci a des conséquences évidemment très importantes sur la construction de l'arithmétique. Imaginons, par exemple qu'il y ait neuf individus dans le monde. Les cardinaux de 1 à 9, définis comme classes équinumériques de classes d'individus, auraient leurs propriétés habituelles, mais 10, c'est-à-dire  $9+1$ , serait la classe nulle, comme 11, et tous les entiers qui suivent. S'il y avait exactement neuf individus dans le monde, les cardinaux inductifs ne formeraient donc pas une progression, et il ne serait pas vrai que deux cardinaux distincts aient toujours des successeurs distincts<sup>1</sup>. Pour éviter cette conséquence, Russell et Whitehead, se basant sur le fait que le nombre de parties d'une classe de  $n$  éléments est  $2^n$ , mettent au point une stratégie d'« ascension typologique ». Pour garantir l'existence d'une classe de  $n$  importe quelle cardinalité finie, il suffit d'aller suffisamment loin dans la hiérarchie des types, et de considérer dans la définition des cardinaux, non pas les classes d'individus, mais les classes de classes d'individus, ou les classes de classes de classes d'individus, etc... Cette stratégie échoue toutefois dès que l'on veut élaborer une théorie des entiers transfinis et des irrationnels. La seule possibilité pour retrouver la pleine force des mathématiques cantorienne est alors d'admettre l'axiome de l'infini, qui stipule qu'il y a des classes d'individu de  $n$  importe quelle cardinalité finie. La théorie des rationnels, on le verra, est compliquée par le même souci de développer une doctrine indépendante de toute hypothèse sur la cardinalité de la classe des individus<sup>2</sup>. Dans la suite de cette section, je vais, la plupart du temps, faire comme si l'axiome de l'infini était admis par les auteurs. Passons à la construction proprement dite. Russell et Whitehead commencent par définir la relation  $\text{Prm}$  entre couples d'entiers inductifs :

$$(m, n)\text{Prm}(p, q) \text{ ssi } m \text{ est premier relativement à } n, \text{ et } m \times q = n \times p.$$

<sup>1</sup> Voir Russell 1919, 260. Sur cette question, voir Landini non publié.

<sup>2</sup> Comme les auteurs l'expliquent : « De grandes difficultés sont causées, dans cette section, par les théorèmes d'existence et la question des types. Ces difficultés disparaissent si l'axiome de l'infini est admis, mais il semble inopportun de rendre la théorie de (disons)  $2/3$  dépendante de l'hypothèse selon laquelle le nombre des objets dans l'univers n'est pas fini. Nous avons, en conséquence, pris la peine de ne pas faire cette hypothèse, excepté lorsque, comme dans la théorie des nombres réels, elle est réellement essentielle, et pas seulement commode. »

$(m, n)\text{Prm}(p, q)$  signifie donc que  $m/n$  est la fraction irréductible égale à  $p/q$ . On reconnaît dans la dernière clause ( $m \times q = n \times p$ ) la condition définissant la relation d'équivalence entre couples d'entiers utilisée dans la construction standard des rationnels à partir des entiers. Deux entiers  $\mu$  et  $\nu$  ( $\nu \neq 0$ ) étant donnés, le nombre rationnel (*ratio*)  $\mu/\nu$  est alors défini de la manière suivante (\*303. 01, 260) :

$$\mu/\nu = RS\{\exists(\rho, \sigma) . (\rho, \sigma)\text{Prm}(\mu, \nu) . \exists!R^\sigma \cap S^\rho\}$$

Le nombre  $\mu/\nu$  est donc une relation entre des relations. Plus précisément, deux relations  $R$  et  $S$  ont entre elles le nombre  $\mu/\nu$  (ce que Russell et Whitehead notent que  $R(\mu/\nu)S$ ) si et seulement si il existe deux objets  $x$  et  $y$  tels que,  $\rho/\sigma$  étant la fraction irréductible associée à  $\mu/\nu$ , on ait  $xR^\sigma y$  et  $xS^\rho y$ . Le signe «  $R^\sigma$  » désigne ici le produit relationnel de  $R$ ,  $\sigma$  fois par elle-même<sup>1</sup>.

Il faut distinguer deux ingrédients dans la définition \*303. 01. Le premier est la clause «  $\exists(\rho, \sigma) . (\rho, \sigma)\text{Prm}(\mu, \nu)$  », qui garantit que l'entité définie possède les bonnes propriétés arithmétiques. Le second est donné par la clause «  $RS\{ \dots \exists!R^\sigma \cap S^\rho \}$  », qui définit le nombre rationnel comme une relation de relation. Ces deux éléments ne jouent pas du tout le même rôle dans la théorie, et la réussite du projet tient, précisément, à leur combinaison.

Commençons par dire quelques mots du second ingrédient, l'ingrédient relationnel. C'est cette partie de la définition qui éloigne l'approche logiciste de la démarche d'un Dedekind ou d'un Cantor, et la rapproche de la définition classique, euclidienne, du rapport<sup>2</sup>. En effet, imaginons que  $R$  représente une certaine distance algébrique entre deux points sur une droite (ou un certain vecteur), et que  $S$  soit une autre distance (vecteur) de même direction. \*303. 01 revient à dire que  $R$  et  $S$  ont le rapport (*ratio*)  $\mu/\nu$  si et seulement si il est possible de trouver un point à partir duquel  $\nu$  pas de taille  $R$  amènent exactement au même point que  $\mu$  pas de taille  $S$ . La ressemblance avec la définition d'Euclide en termes d'équimultiple est frappante, et rappelons que Russell avait adopté la même approche pour définir les exposants rationnels dans *On the Logic of Relations* (1900b). Les « distances » étant considérées comme des relations, les exposants rationnels étaient alors, exactement comme les *ratios* le sont dans les *Principia*, des relations de relations.

Il y a cependant trois différences entre la théorie classique, euclidienne disons, reprises dans Russell 1900b, et la définition ici avancée. Russell et Whitehead passent d'abord systématiquement par la fraction irréductible  $\rho/\sigma$  associée au couple  $(\mu, \nu)$ , au lieu de considérer directement les  $\nu$  et les  $\mu$  multiples de  $R$  et de  $S$ . C'est un détail, lié au désir de minimiser la montée dans la hiérarchie typologique<sup>3</sup>. Plus fondamental, en revanche, est la seconde divergence : l'exemple de la droite charrie avec lui toute une structure géométrique dont le modèle très abstrait des *Principia* est dépourvu. Ainsi, dans le modèle euclidien, repris

<sup>1</sup> Comme aucune hypothèse n'est faite sur les relations qui apparaissent dans le *definiens*, la notion de produit relationnel n'est pas aussi simple à définir qu'en 1900b. Rappelons que dans le cas des relations un-un ayant même champ, ce produit relationnel pouvait être assimilé à une composition d'applications injectives. Dans le cas général, qui est celui de \*303. 01, la définition suivante est adoptée : soient  $R \subset X \times Y$  et  $S \subset V \times W$ , alors  $R|S = \{(x, z) \in X \times W : \exists y \in Y \cap V, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$ . Si  $Y \cap V = \emptyset$ ,  $R|S$  est donc la relation vide. Soulignons également que les relations sont en 1913 des symboles incomplets, et non des termes primitifs comme c'était le cas en 1900, ce qui ajoute encore à la complexité de la notion de produit relationnel ; voir sur ce point Landini 2008, 178-182.

<sup>2</sup> Russell, dans une lettre à Jourdain datée du 21/03/1910, affirme explicitement que la raison d'être du canevas relationnel est de lier nombres rationnels et grandeurs ; après avoir reconnu que l'on peut définir les rationnels comme des classes d'équivalence dans l'ensemble  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , il affirme : « J'ai maintenant accepté de Whitehead une nouvelle définition quantitative (non arithmétique) de  $\mu/\nu$ , selon laquelle ce dernier est une relation des vecteurs  $R, S$  qui a lieu (d'une manière générale) chaque fois que  $\exists!R^\sigma \cap S^\rho$ . Cela permet de considérer deux tiers d'une livre de beurre sans faire un détour arithmétique élaboré. »

<sup>3</sup> L'importance accordée aux fractions irréductibles provient de la volonté d'éviter toute ascension superflue dans la hiérarchie des types, lorsque que l'axiome de l'infini n'est pas admis.

et formalisé dans Russell 1900b, il n'est pas possible que deux distances aient entre elles plusieurs rapports différents et il n'est pas possible non plus qu'un même rapport lie une distance à plusieurs autres. Or ces deux cas sont explicitement envisagées par Russell et Whitehead (1913, 261-262), et on verra bientôt qu'ils jouent même un rôle fondamental dans l'articulation entre la section A et la section C de *Principia* VI (voir plus bas, section III-1). Cette seconde différence conduit directement à mon troisième point : les relations  $R$  et  $S$  ne doivent pas être, dans cette première partie du livre VI des *Principia*, caractérisées comme des grandeurs. Nous, qui avons lu *On the Logic of Relations* et les développements des *Principles* consacrés à la distance, nous savons que Russell et Whitehead conçoivent certaines grandeurs (notamment les distances) comme des relations, et qu'il semble donc naturel de voir les relations  $R$  et  $S$  qui entrent dans la définition des rationnels comme des grandeurs. Mais rien n'autorise, dans la section A du livre VI, une telle interprétation – aucune connexion n'a été encore établie entre relation et quantité, et quand le lien sera effectivement tissé, dans la section B, puis C, il s'accompagnera d'une perte en généralité. À ce stade, les relations dont il est question sont absolument générales ; les rationnels sont définis comme nombres « purs » ; ils ne sont pas définis comme des rapports de grandeurs – ou comme le dira Russell dans la partie C, comme des « nombres appliqués » (voir *infra*).

Concentrons-nous maintenant sur l'autre ingrédient de la définition, celui qui mobilise la relation Prm. C'est cette partie qui joue le rôle déterminant dans la déduction des propriétés ordinales et algébriques des rationnels. Associer une fraction irréductible à chaque rationnel revient en effet à définir les classes d'équivalence de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  associées habituellement aux rationnels. Ainsi, puisque  $(2, 3)\text{Prm}(6, 9)$  et  $(2, 3)\text{Prm}(4, 6)$ , il suit immédiatement de la définition que  $2/3 = 4/6 = 6/9$ . En bref, la première partie de \*303.01 permet d'obtenir les critères d'identité habituellement associés aux rationnels, i.e. ce qui permet de distinguer et d'identifier les éléments de  $\mathbb{Q}$ . Sur cette base, Russell et Whitehead définissent la relation « < », l'addition et la multiplication entre rationnels, de façon tout à fait classique :

$$\begin{aligned} m/n < p/q &\text{ssi } m \times q < n \times p \text{ (*304.01)} \\ m/n \times p/q &= mp/nq \text{ (*305. 01)} \\ m/n + p/q &= (mq + pn)/nq \text{ (*306.14).} \end{aligned}$$

Ces stipulations sont cohérentes avec la définition \*303.01, au sens où, si  $a/b = c/d$ , alors les définitions de l'ordre, de l'addition et de la multiplication conduisent aux mêmes résultats, lorsqu'ils appliqués sur  $a/b$  ou sur  $c/d$ . Elles permettent, surtout, si l'axiome de l'infini est admis, de dériver les propriétés ordinales et algébriques habituelles des rationnels à partir des propriétés arithmétiques des entiers (la densité est démontrée en \*304.3, la commutativité et l'associativité de la multiplication sont prouvées en \*305.11 et \*305.41, celles de l'addition en \*306.11 et \*306.31). Rien, dans la déduction de ce que Russell et Whitehead nomment les propriétés arithmétiques des rationnels ne dépend donc de l'idée que ces derniers sont des relations de relations.

Précisons les choses, car ce point se révélera être fondamental. L'idée qu'un *ratio* est une relation entre relations joue bien, en réalité, un rôle dans la déduction des caractéristiques algébriques et ordinales des rationnels : celui d'obstacle potentiel. En effet, si nous refusions l'axiome de l'infini, alors la définition \*303.01 ne nous permettrait pas d'affirmer, par exemple, que  $m/n = p/q$  si et seulement si  $mq = np$ . Admettons que (selon les critères habituels)  $m/n$  diffère de  $p/q$  et que  $m, n$  mais également  $p, q$  soient premiers entre eux et très grands. Si le nombre d'individus est limité, il n'est a priori pas certain que des relations  $R$  et  $S$  entre individus, et des individus  $x$  et  $y$  existent tels que  $xR^m y$  et  $xS^n y$  ou que  $xR^q y$  et  $xS^p y$ . S'il n'existait pas de relation  $R, S$  satisfaisant ces deux conditions, alors  $m/n$  comme  $p/q$ , bien que distincts selon les critères habituels, correspondraient au même ensemble de relations, à savoir

le vide, et devraient donc être déclarés égaux, au sens de la définition \*303.01. On le voit : lorsque l'axiome de l'infini n'est pas accepté, il peut arriver qu'il n'y ait pas « assez » de relations pour distinguer deux nombres rationnels. Le problème est donc analogue à celui qui se posait pour les cardinaux, et la stratégie des logiciens est dans les deux cas la même : Russell et Whitehead, en mobilisant toute la machinerie de l'ascension typologique, montrent que la catastrophe concernant  $m/n$  et  $p/q$  peut toujours être évitée<sup>1</sup>.

La nécessité d'une montée typologique (ou de l'axiome de l'infini) étant accordée, il n'en reste pas moins que toutes les propriétés arithmétiques des rationnels (algébriques et ordinales) ne dérivent que de la relation  $\text{Prm}$  et des définitions tout à fait classiques de l'addition, de multiplication et de l'ordre sur les *ratios*. L'introduction de l'appendice relationnel en \*303. 01 ne joue aucun rôle (à part celui d'obstacle potentiel, lorsque l'axiome de l'infini est rejeté) dans la déduction des propriétés purement mathématiques des rationnels. Ce point est fondamental car il permet d'attribuer à la définition de Russell et de Whitehead le même niveau de pureté logique que les approches standard qui définissent les rationnels comme des classes d'équivalence sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Les mêmes axiomes sont, dans les deux cas, nécessaires pour garantir que les entités définies aient les propriétés attendues.

Résumons. La définition des rationnels comporte deux parties, une partie arithmétique qui permet de dériver l'ensemble des propriétés ordinales et algébriques du corps des rationnels (si l'axiome de l'infini est admis) ; une partie relationnelle, sans efficace « arithmétique » (toujours si l'axiome de l'infini est admis), dont la fonction semble être d'amorcer un lien entre rationnels et grandeurs. Avant de poursuivre l'analyse de la distinction entre ces deux éléments, je vais brièvement examiner la définition des réels.

### I-3. La définition des réels dans les *Principia*

Russell et Whitehead proposent deux définitions des réels. La première, exposée en \*310, constitue un aménagement minimal de l'approche des *Principles*. Si l'axiome de l'infini est admis, la *series* des nombres rationnels, tels que définis en \*303. 01, est de type  $\eta$ . Il est alors possible de définir les réels comme des segments de rationnels, et d'introduire une addition et une multiplication entre ces segments (\*311, \*312, \*313). On démontre que la structure ainsi définie a exactement les mêmes propriétés que le corps des réels. À la différence de ce qui se passe dans les *Principles*, les réels ne sont pas les segments de n'importe quelle série de type  $\eta$ , mais seulement les segments de la série des rationnels. L'essentiel est cependant conservé : les réels sont bien identifiés à des segments, et Russell et Whitehead ont raison de souligner, dans le résumé introductif de \*310, la parenté avec les *Principles*.

Bien que cette première démarche ne pose aucun problème sur le plan mathématique, elle a pour conséquence d'introduire une hétérogénéité typologique entre réels et rationnels. Les réels, lorsqu'ils sont définis en termes de segments, sont identifiés à des classes de rationnels et ne sont donc pas du même type qu'eux (1913, 317, 335). Or Russell et Whitehead aimeraient conserver une homogénéité typologique, c'est-à-dire (pour dire vite) définir les réels, non pas comme des ensembles de relations de relations, mais comme des relations de relations. Avant d'entrer plus en détail dans les raisons qui les poussent à formuler une telle demande, voyons comment les auteurs s'y prennent pour la satisfaire.

La manœuvre est en réalité très simple. En \*310, un nombre réel  $r$  est défini comme un segment  $R$  de rationnels, c'est-à-dire comme un certain ensemble de rationnels. Les rationnels sont eux-mêmes introduits comme des relations de relations, c'est-à-dire comme des ensembles de couples de relations. Le segment  $R$  est donc un ensemble dont les éléments sont

---

<sup>1</sup> Voir l'explication des auteurs dans l'introduction de \*303 (Russell 1913, 263-265). Signalons qu'il y a une différence entre le cas des *ratios* et celui des cardinaux inductifs : pour démontrer que l'ordre engendré sur  $\mathbb{Q}$  est compact (dense), il est nécessaire d'admettre l'axiome de l'infini (\*304. 3).



des ensembles de couples. Puisque  $R$  est une famille d'ensembles, il est possible de former  $\cup R$ , l'union des éléments de  $R$ . Il est clair qu'à chaque segment  $R$  correspond un et un seul ensemble  $\cup R$ . Mieux, Russell et Whitehead montrent (\*310.33) que l'ordre entre les segments de rationnels est ordinalement similaire à l'ordre (que l'on peut naturellement introduire) sur les unions de segments. Les auteurs se fondent sur ce résultat pour affirmer que la substitution de  $\cup R$  à  $R$  dans la définition des réels ne modifie en rien les propriétés arithmétiques de ce qui est défini. En conséquence, les deux auteurs identifient en \*314 un réel  $r$ , non plus au segment  $R$  de rationnel, mais à l'union  $\cup R$  d'un tel segment. Comme le résume Quine (1962, 129)<sup>1</sup> :

Whitehead et Russell (\*310, \*314) développaient systématiquement deux versions des nombres réels. Dans une version, (...) chaque nombre réel  $x$  devenait, intuitivement parlant la classe  $z$  de tous les rationnels (*ratios*)  $< x$ . Dans l'autre,  $x$  devenait plutôt  $\cup z$  ; intuitivement donc, l'union de tous les rationnels  $< x$ .

Le gain de la manœuvre est bien sûr d'assurer l'homogénéité typologique entre les réels et les rationnels :  $\cup R$  est un ensemble de couples de relations, exactement comme les rationnels, éléments de  $R$ . Russell et Whitehead, par cette astuce formelle, réussissent donc à préserver les propriétés arithmétiques des réels tout en évitant de distinguer les types logiques des deux catégories de nombres.

Mais on peut se demander si ce n'est pas cher payé pour un bien maigre avantage. En effet, comme le remarque Quine, l'option explorée en \*314 introduit une dissymétrie entre les rationnels et les réels (*Ibid.*) : « les rationnels de Russell et de Whitehead sont encore mutuellement exclusifs, (...) alors que leurs nombres réels sont emboîtés »<sup>2</sup>. Pour expliquer ce point, simplifions les choses et restreignons nous à un ensemble  $L$  de relations qui forment une distance au sens de 1900b. Dans ce cas, si  $R(m/n)S$ , c'est-à-dire s'il existe deux objets  $x$  et  $y$  tels que  $xR^ny$  et  $xS^my$ , alors  $R^n = S^m$ , ou encore  $S = R^{n/m}$ . Si  $S = R^2$ , nous aurons alors  $R(1/2)S$ , et étant donné la structure très contraignante que nous imposons à nos relations,  $1/2$  est le seul rationnel liant  $R$  et  $S$  ; c'est ce que veut dire Quine quand il affirme que les rationnels sont « mutuellement exclusifs ». Maintenant, étant donnée la définition \*314, si  $R(1/2)S$ , alors on a également  $R(\sqrt{2})S$  et  $R(\pi)S$ . En effet, les couples de relation reliées par  $1/2$  sont, en vertu de la définition \*314, des éléments de tous les réels supérieurs ou égaux à  $1/2$ . Il semble que Quine ait raison : l'homogénéisation typologique des deux catégories de nombre engendre, en contrepartie, une dissymétrie dans l'usage des rationnels et des réels pour mesurer les grandeurs<sup>3</sup>. Pour quelle raison Russell et Whitehead cherchent-ils dès lors à maintenir une homogénéité typologique entre réels et rationnels ?

Ils s'en expliquent au début de \*314 :

Les nombres réels relationnels sont utiles lors de l'application de la mesure par les nombres réels aux familles de vecteurs, car il est alors commode d'avoir des nombres réels du même genre que les rapports (*ratio*).

Rappelons l'idée directrice de la partie VI des *Principia* : il y a une connexion essentielle entre nombres (rationnels et réels) et mesures. L'hétérogénéité typologique, dans la mesure où elle ne permettrait pas d'appliquer les réels aux grandeurs relations, pourrait de ce point de vue poser problème. On pourrait penser que Russell et Whitehead ont l'exemple d'Euclide en

<sup>1</sup> Quine définit cependant les ratios comme des classes de couples d'entiers et non comme des classes de relations.

<sup>2</sup> Quine se trompe en affirmant que les rationnels de Russell et de Whitehead sont mutuellement exclusifs. Comme je l'ai expliqué, rien n'interdit qu'un même couple de relations ait plusieurs ratios. Son erreur provient du fait qu'il néglige complètement la partie relationnelle de la définition des *Principia* ; pour Quine, un ratio est un ensemble de couples d'entiers, non un ensemble de couples de relations.

<sup>3</sup> Quine, pour remédier à ce défaut, propose de définir les ratios eux aussi par une inégalité ; brièvement dit,  $m/n$  est, selon le logicien, la classe des couples d'entiers  $p, q$  tels que  $pn < qm$ . De cette manière, l'homogénéité typologique ne s'accompagnerait plus de la divergence pointée par Quine. Les rationnels ne seraient plus mutuellement exclusifs :  $R(1/2)S$  impliquerait  $R(3/2)S$ , comme il implique  $R(\sqrt{2})S$  et  $R(\pi)S$ .

tête lorsqu'ils demandent que les rationnels et les réels soient de même type : l'égalité entre les rapports est définie dans les *Eléments* de la même manière, que les rapports considérés soient rationnels ou irrationnels – c'est précisément la grande force de la définition V, 5 que de ne pas distinguer les deux cas. Mais le commentaire de Quine montre que nous faisons là fausse route. La façon dont les réels « relationnels » sont définis dans les *Principia* introduit en réalité une dissymétrie entre le cas rationnel et le cas réel. Comment alors comprendre la demande des deux auteurs ? Afin de mieux saisir le sens de \*314, il faut se pencher sur la façon dont Russell et Whitehead utilisent la définition dans la section C, consacrée à la mesure. Pour simplifier, plaçons-nous encore dans le cadre des distances relationnelles de Russell 1900b, i.e. posons que le champ des rationnels et des réels est restreint à celui d'un ensemble  $L$  de relations bijective définies sur même domaine  $\lambda$ , qui forme un groupe archimédien complet pour l'opération de produit relationnel. À la section \*352, les auteurs définissent les multiples rationnels d'un vecteur (d'une distance) de  $L$  : soit  $R \in L$ , la classe des multiples rationnels de  $R$ , notée  $R_L$ , est l'ensemble des relations  $S$  de  $L$  telles que  $R(X)S$ , avec  $X \in \mathbb{Q}^1$ . La mesure d'un élément quelconque  $S$  de  $R_L$  pour l'unité  $R$  est alors le nombre rationnel  $X$  tel que  $R(X)S$  (ce nombre est unique étant donné la structure, très riche, de  $L$ ). Russell et Whitehead expliquent alors, au début du \*356 (1913, 442), que<sup>2</sup> :

Si un ensemble donné de vecteurs, tous multiples rationnels d'un vecteur donné  $R$ , a une limite relativement (à la relation d'ordre définie sur  $L$ ), et si leurs mesures déterminent un segment de  $(\mathbb{Q})$ , alors nous considérons le nombre réel représenté par ce segment comme la mesure de la limite de l'ensemble donné de vecteurs.

Je reviendrai sur cette démarche à la fin du chapitre. Mais contentons-nous pour l'instant de constater l'équivalence entre la procédure ici mise en place et celle utilisée dans la définition de l'exposant réel d'une relation distance en 1900b. Je rappelle la situation qui prévalait alors –  $U$  étant une classe de rationnels, et  $\theta U$  étant le segment déterminé par  $U$ ,  $xR''y$  (où  $u = \theta U$ ) était introduit par la double clause<sup>3</sup> :

- $\forall z \in \lambda, \forall p \in \theta U, xR^p y \Rightarrow (xz) < (xy)$
- $\forall p \in U, \forall q \in \mathbb{Q}, (p < q \wedge xR^q z) \Rightarrow (xy) < (xz).$

$S = R''$  est ici le vecteur limite dont parle les *Principia*, et  $U$  est la classe des mesures des éléments de l'ensemble des multiples rationnels de  $R$ . La mesure de  $S$  est définie comme le nombre réel représenté par le segment  $\theta U$ .

Russell et Whitehead expliquent ensuite que la définition du nombre réel comme union d'un segment de rationnel (\*314), plutôt que comme segment, est plus commode parce qu'elle permet, sans rien changer au canevas mis en place, de mesurer les multiples rationnels de  $R$  directement par des nombres « réels rationnels ». En bref, l'idée est de concevoir le *ratio*  $m/n$  mesurant un élément quelconque  $S$  de  $R_L$ , non plus comme l'ensemble des couples  $P$  et  $Q$  tels que  $P^n = Q^m$ , mais comme la classe des couples  $P$  et  $Q$  telles que  $P^n < Q^m$ , avec «  $<$  » désignant la relation d'ordre sur  $L$ . L'intérêt de la manœuvre est de pouvoir poser que « la mesure de la limite d'un ensemble de vecteurs rationnels (est) la limite de leurs mesures », ce qui n'est pas possible si on en reste à la définition \*310 des réels, et ce qui est pourtant conforme à « ce qui est requis pour une application des nombres réels » (442). C'est donc pour obtenir un parallélisme dans les passages à la limite entre les cas réel et rationnel que

<sup>1</sup> Il est clair que la notion de multiples rationnels d'un vecteur est extrêmement proche de celle de réseau de Möbius reprise en \*354 ; voir appendice chap. 4 et *infra*.

<sup>2</sup> Russell et Whitehead définissent la limite supérieure d'un sous ensemble  $A$  d'une série  $P$  par la double condition suivante : 1)  $A$  n'a pas de maximum ; 2) la limite supérieure est la plus petite borne supérieure de  $A$  dans  $P$  (Russell 1912, 575).

<sup>3</sup> Rappelons que  $(xy)$  est l'ensemble des éléments  $z$  de  $\lambda$  plus grand que  $x$  et plus petit que  $y$ , la relation d'ordre sur  $\lambda$  étant dérivée de la relation d'ordre entre les relations de  $L$ . Voir chap. 1.

Russell et Whitehead ont besoin de l'homogénéité typologique. Russell et Whitehead adoptent en réalité la solution suggérée par Quine lui-même dans *Set Theory and its Logic* (voir note page 120). Et ils l'adoptent pour justifier un principe qu'ils considèrent comme fondamental dans l'application des réels aux grandeurs : le principe selon lequel la mesure de la limite d'un ensemble de grandeurs (est) la limite de leurs mesures (que cette limite soit rationnelle ou irrationnelle).

La dissymétrie dans la définition des rationnels et des réels dans les *Principia* a donc, contrairement à ce que suggère Quine, une justification. Quine fait comme si l'application des nombres aux quantités était univoque, et c'est pour cette raison que la différence de traitement des cas rationnel et réel lui paraît critiquable. Mais, pour Russell et Whitehead, il y a plusieurs façons non équivalentes d'appliquer les nombres aux grandeurs : les procédures de « passages à la limite » ne sont pas du même type que les opérations de mesure « classiques » (celle aboutissant à des mesures rationnelles) et cette différence doit se refléter dans la définition des nombres eux-mêmes. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre suivant (voir pages 120 *sq.* et 120 *sq.*).

#### I. 4 : Conclusion

Résumons. Le survol de la section A auquel nous nous sommes livrés montre deux choses. D'une part, la forme des définitions mises en place tout au long du chapitre ne s'explique que par la considération de l'application des nombres aux grandeurs exposée dans la section C. Il est important de réaliser que cette application est loin d'être transparente. Comme nous venons de le voir, les auteurs prennent en compte les opérations de passages à la limite dans leur théorie des mesures irrationnelles – comme nous le verrons également à la fin de ce chapitre, la définition des rationnels est elle-même reformulée dans la section D, afin de permettre la mesure de grandeurs appartenant à des familles particulières, dites cycliques. Il n'est donc pas facile de deviner les raisons qui conduisent Russell et Whitehead à tel ou tel choix définitionnel. La section A est en réalité une partie préparatoire, dont la complète intelligibilité dépend de la suite, notamment des sections C et D, auxquelles les auteurs ne cessent de renvoyer<sup>1</sup>. Le plan de la partie VI incarne ainsi à la lettre le principe inaugural (que Russell et Whitehead annoncent au tout début du livre VI (233)) selon lequel la définition des nombres rationnels et réels doit permettre d'expliquer leur principale application, i.e. la mesure des grandeurs. Crispin Wright utilise la formule « *Frege's Constraint* » pour désigner le principe selon lequel fonder de façon satisfaisante une théorie mathématique, c'est « d'une façon ou d'une autre expliquer ses concepts fondamentaux de façon à ce que leur applications soient immédiates » (Wright 2000, 317)<sup>2</sup>. Russell et Whitehead adhèrent, dans la partie VI, à la *Frege's Constraint* (que nous nommerons, pour cette raison, *Application Constraint*) : pour eux, la définition des nombres rationnels et réels doit fournir une explication de leurs applications à la mesure des quantités.

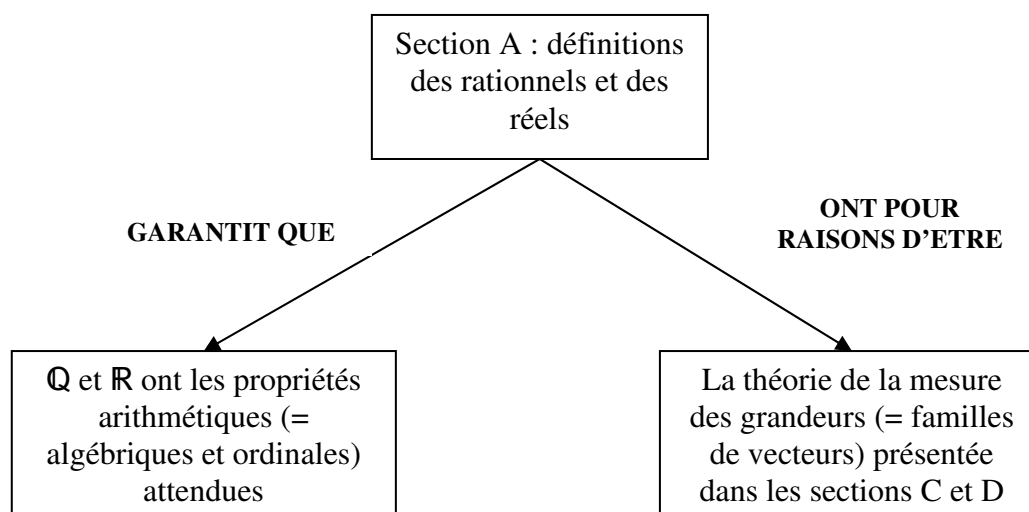
Mais d'autre part, et ce point est au moins aussi important que le précédent, le fait que de nombreux développements de la section A renvoient au contenu des sections C et D de la partie VI ne menace pas l'indépendance et l'antériorité logique de ce premier moment : de la

<sup>1</sup> Voir par exemple, au début de \*303 : « la plupart des applications importantes des rationnels s'effectuent sur (...) des relations qui peuvent, en un certain sens, être appelées vecteurs » (260) ; au commencement de \*306, on trouve : « Dans les applications, si  $R$ ,  $S$ ,  $T$  sont membres d'une famille de vecteurs qui a les propriétés qui conviennent, nous voulons (que) si (...)  $R$  est  $2/3$  de  $T$ , et (...)  $S$  est  $5/7$  de  $T$ , (...) le vecteur qui consiste à d'abord se déplacer d'une distance  $R$  puis d'une distance  $S$  soit  $(2/3 + 5/7)$  de  $T$  (et) nous montrerons dans la section C que notre définition de l'addition satisfait cette exigence. » (289). Je pourrai multiplier les exemples.

<sup>2</sup> Wright oppose les approches dérivant de l'*Application Constraint* aux conceptions structuralistes des mathématiques pour lesquelles « l'application d'une théorie est toujours postérieure à sa compréhension, en ce qu'elle repose sur l'appréciation d'affinités structurelles entre la structure concernée et un domaine auquel elle est appliquée » (*Ibid.*).

caractérisation \*303.01 comme de la définition \*314, *toutes* les propriétés ordinaires des rationnels et des réels suivent, sans qu'aucune hypothèse ne soit posée sur les relations auxquelles les nombres s'appliquent. Bien entendu, pour ce faire, l'axiome de l'infini doit être admis. Mais il doit être présupposé dans toutes les constructions alternatives, et son admission ne singularise donc pas l'approche des *Principia* par rapport à ses concurrentes (celles de Cantor et Dedekind). La « généralisation » du nombre (la définition des rationnels et des réels) s'effectue, chez Russell et Whitehead, indépendamment de toute considération sur les quantités. Si les raisons qui poussent les auteurs à adopter telle forme définitionnelle plutôt que telle autre échappe le plus souvent au lecteur, le fait est que toutes les propriétés arithmétiques (ordinales et algébriques) des réels et des rationnels sont garanties par les définitions (et les axiomes logiques, dont l'axiome de l'infini), exactement comme elles le sont dans les approches des « arithméticiens ». L'adhésion de Russell et de Whitehead à l'*Application Constraint* ne remet pas en question l'idée que les propriétés purement mathématiques de  $\mathbb{Q}$  et de  $\mathbb{R}$  sont dérivables de façon purement logique.

Rappelons que cette indépendance des propriétés numériques par rapport aux propriétés quantitatives n'était pas de mise chez Burali-Forti<sup>1</sup>. Comme nous l'avons vu dans notre premier chapitre<sup>2</sup>, le mathématicien italien s'opposait frontalement au programme d'arithmétisation de l'analyse, et cherchait à déduire les propriétés des réels, définis comme rapports entre grandeurs, de celles des quantités. La propriété de complétude de  $\mathbb{R}$  dépendait ainsi de la complétude du domaine de grandeurs auquel les nombres étaient appliqués. Si Russell et Whitehead se démarquent explicitement du projet d'arithmétisation, ils ne vont pas jusqu'à faire dépendre les propriétés arithmétiques des nombres de la structure d'un champ quantitatif : toutes les caractéristiques standard des rationnels et des réels sont chez eux garanties par la logique, sans qu'aucune référence ne soit faite à quelque domaine de grandeur que ce soit. Nous pouvons ainsi schématiser la situation comme suit :



<sup>1</sup> Nous le verrons dans le prochain chapitre, elle ne l'est pas non plus dans les constructions néo-fregéennes qui mettent en œuvre l'*Application Constraint*.

<sup>2</sup> Voir chap 1, p. 14.

Bien que les définitions trouvent leurs raisons d'être et leurs justifications ultimes dans le contenu développé dans la case de droite (*Application Constraint*), la colonne de gauche jouit, dans le schéma, d'une autonomie complète par rapport à la colonne de droite (les propriétés arithmétiques des nombres sont déduites sans qu'aucune référence ne soit faite aux sections C et D). La combinaison de ces deux traits va jouer un rôle fondamental dans la suite, et notamment dans notre prochain chapitre.

## II- La théorie des familles de vecteurs

Comme venons de le voir, aucune hypothèse sur les termes (relationnels) des nombres rationnels ou réels n'est posée dans la section A de la partie VI des *Principia*. Les rationnels et les réels sont définis comme des relations de relations, sans que ces dernières ne fassent l'objet d'aucune restriction (à part, bien évidemment, des restrictions typologiques). Les entités auxquelles les nombres (qui sont des relations) s'appliquent n'ont pas, en particulier, à appartenir à une quelconque structure « distance » (comme en 1900b). En revanche, Russell et Whitehead répètent tout au long de la section que, pour que les nombres puissent être utilisés comme mesures, certaines conditions supplémentaires doivent être posées. Quelles conditions exactement ?

Chaque fois que la question de l'application a été soulevée, ma stratégie a été jusqu'ici de faire référence à 1900b : la structure très riche de groupe archimédien complet imposée sur l'ensemble des relations auxquelles on applique les nombres permet de simplifier les problèmes. Dans les *Principia*, cependant, les auteurs adoptent une démarche différente : au lieu de définir d'emblée, axiomatiquement, une structure très forte, Russell et Whitehead partent d'un cadre très faible, les « familles de vecteurs », qu'ils enrichissent progressivement. Je vais, dans cette seconde partie, présenter la théorie des familles de vecteurs exposées dans *Principia* VI, B. Dans les deux premières sections de ce chapitre, je me concentrerai sur les grandes lignes de la théorie des familles de vecteurs. Dans les deux dernières, je discuterai des rapports entre cette théorie et celle des *Principles*.

### II-1. La notion de famille de vecteurs

La section B commence par la définition (\*330. 01) d'une « correspondance » sur un ensemble  $\alpha$ , notée «  $cr'\alpha$  ». Dans le langage mathématique contemporain, une correspondance sur  $\alpha$  est le « semi-groupe complet des transformations de  $\alpha$  ». Rappelons qu'un semi-groupe  $\langle S, . \rangle$  est un ensemble («  $S$  ») muni d'une loi interne («  $.$  ») associative ; lorsqu'un des éléments de  $S$  est le neutre, alors  $S$  est un monoïde<sup>1</sup>. L'ensemble des transformations  $cr'\alpha$  sur  $\alpha$  (i.e. l'ensemble des applications injectives  $\alpha \rightarrow \alpha$ , ou comme le dit les *Principia*, des relations un-un de domaine  $\alpha$  et de codomaine inclus dans  $\alpha$ ) muni de l'opération composition (ou produit relationnel) forme un semi-groupe (et même un monoïde)  $\langle cr'\alpha, | \rangle$  appelé le semi-groupe complet des transformations de  $\alpha$ <sup>2</sup>. Notons que  $\langle cr'\alpha, | \rangle$  joue un rôle particulier dans la théorie des semi-groupes, qui est l'exact équivalent du rôle que joue le groupe symétrique des permutations dans la théorie des groupes. On démontre en effet que tout semi-groupe abstrait peut être représenté comme un sous-semi-groupe de  $\langle cr'\alpha, | \rangle$ <sup>3</sup>.

Russell et Whitehead définissent (\*330.03) une famille de vecteurs  $\kappa$  sur  $\alpha$  comme suit (1913, 350) :

<sup>1</sup> Un semi-groupe n'est pas un groupe : il ne contient pas nécessairement un neutre (il n'est pas nécessairement un monoïde) et ses éléments ne sont pas nécessairement inversibles.

<sup>2</sup> Rappelons que le produit relationnel de  $R$  et de  $S$  est noté  $R | S$  dans les *Principia*.

<sup>3</sup> Voir Howie 1995, 6.

Nous définissons une « famille de vecteurs de  $\alpha$  » comme une classe abélienne existante de correspondances de  $\alpha$ , où une classe abélienne de relations est définie comme une classe dans laquelle le produit relatif de deux membres quelconques est commutatif.

Trois conditions caractérisent donc  $\kappa$ :

- 1)  $\kappa \subseteq cr \, ' \alpha$ ,
- 2)  $\kappa \neq \emptyset$ ,
- 3)  $\forall R, S \in \kappa, R \mid S = S \mid R$ .

Une famille de vecteurs de  $\alpha$  est une classe non nulle (« existante ») de relations un-un de  $\alpha$  dans  $\alpha$ , commutative pour le produit relationnel. C'est de cette structure que Russell et Whitehead disent qu'elle « peut être considérée comme un genre de grandeur » (1913, 340).

Comparé au concept de distance développé en 1900b, la notion de famille de vecteurs est extrêmement pauvre. Elle n'est pas une structure ordinale : aucune relation d'ordre ne relie en effet les éléments de  $\kappa$ . Elle a perdu, de plus, pratiquement toutes ses propriétés algébriques. Le produit relationnel n'est plus une loi interne de  $\kappa$ , ce qui signifie que si  $R$  et  $S$  appartiennent à  $\kappa$ , leur produit relationnel n'appartient pas nécessairement à  $\kappa$ . La relation d'identité sur  $\alpha$  n'appartient pas non plus nécessairement à  $\kappa$ , et bien entendu, la loi des inverses n'est plus satisfaite dans  $\kappa$ . La seule propriété algébrique qui survit au naufrage est, curieusement, celle de commutativité (sur la commutativité, voir *infra*). Le concept famille de vecteurs est donc beaucoup plus faible et plus général que celui de distance.

Sous un aspect, les deux notions restent malgré tout comparables : les distances comme les familles de vecteurs désignent des structures relationnelles opérant sur des ensembles. On retrouve, en effet, en 1913 le schéma à trois niveaux mis en place en 1900 :

Niveau supérieur = relations définies sur  $\kappa$

Niveau intermédiaire = ensemble  $\kappa$  de relations injectives (vecteurs)  $R : \alpha \rightarrow \alpha$

Niveau inférieur = ensemble  $\alpha$  d'individus.

Au lieu de parler de relations bijectives sur  $\alpha$ , Russell et Whitehead parlent en 1913 de relations injectives ; et au lieu de postuler une structure relationnelle très riche entre les membres  $\kappa$ , ils réduisent le niveau supérieur au minimum, en exigeant seulement que le produit relatif soit commutatif. Ces changements, aussi importants qu'ils soient, s'effectuent dans un contexte qui reste, lui, inchangé : celui d'une structure relationnelle opérant sur un ensemble. Russell et Whitehead reprennent notamment l'idée (fondamentale) consistant à représenter l'additivité entre grandeurs par le produit relationnel (l'opération de composition entre applications injectives).

Le noyau théorique mise en place dans Russell 1900b n'est donc pas délaissé dans les *Principia*. Tout se passe au contraire comme si la nouvelle théorie résultait de la volonté de généraliser et de recentrer le vieux concept de distance autour du seul produit relationnel. Toutes les contraintes additionnelles, de nature algébriques ou ordinales, qui pesaient en 1900 sur le produit sont ainsi abandonnées en 1913. Il y a donc un lien très profond entre la notion de distance et celle de famille de vecteurs : la seconde n'est qu'une généralisation de la

première<sup>1</sup>. Le changement s'accompagne d'une modification de stratégie. Au lieu de se donner d'emblée un concept de distance très restrictif, Russell et de Whitehead partent en 1913 d'une définition très large et lâche de la quantité, qu'ils enrichissent ensuite progressivement. La notion de famille de vecteurs est ainsi la matrice commune à un ensemble de structures plus riches, qui se diversifient et se ramifient dans différentes directions. Avant d'étudier les principales espèces et sous-espèces de famille vectorielle, deux mots sur l'usage très singulier qui est fait de la commutativité.

Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, la commutativité est habituellement une condition qui se surajoute à d'autres conçues comme plus fondamentales. Par exemple, lorsque Hilbert, dans les *Grundlagen*, introduit son calcul des segments dans le plan euclidien, il montre d'abord que son algèbre a la structure de corps, puis que l'admission du théorème de Pascal équivaut à l'admission de la commutativité du produit<sup>2</sup>. La commutativité est, pourrait-on dire, la cerise sur le gâteau : elle est une condition très élaborée, que l'on introduit une fois seulement que toute la structure algébrique est en place – c'est-à-dire, en l'occurrence, lorsque une multiplication, comme loi interne, associative avec l'addition (autre loi interne), a été définie. Cette façon d'employer la commutativité n'est pas propre à Hilbert ; elle est, semble-t-il, la manière la plus courante dont les algébristes utilisent alors la notion. Whitehead et Russell adoptent une approche diamétralement opposée, puisque, selon eux, la commutativité est la condition sur laquelle tout repose. La commutativité est, dans les *Principia*, fondamentale, tellement fondamentale qu'elle précède même les règles relatives à la clôture de l'opération produit. Ainsi, Russell et Whitehead prouvent, en \*331. 33, que, s'il existe un point de  $\alpha$  à partir duquel tous les points de  $\alpha$  peuvent être atteint par une relation appartenant à  $\kappa$  ou par sa réciproque (i.e. si  $\kappa$  est une famille « connectée », voir *infra*.), alors le produit de deux éléments de  $\kappa$  est soit un élément de  $\kappa$ , soit le réciproque d'un élément de  $\kappa$ . La démonstration de ce résultat portant sur la clôture de  $\langle \kappa, | \rangle$  fait un usage absolument essentiel de la commutativité<sup>3</sup>.

La commutativité joue ainsi, sur le plan technique, un rôle absolument décisif dans les *Principia*. Mais comment, d'un point de vue philosophique, justifier l'emphasis mise sur la commutativité ? Rien dans le concept même de grandeur ne paraît imposer cette condition. Certes, l'addition de grandeurs extensives est ordinairement considérée comme commutative ; mais elle est aussi généralement considérée comme close<sup>4</sup>. Pourquoi la première contrainte

<sup>1</sup> L'idée que la notion de famille de vecteurs provient d'un affaiblissement des conditions définissant les distances semble confirmer par la lettre du 28/1/1913 (dont nous avons cité le début *supra*.): « Concernant la préface – les recherches sur les « grandeurs » ont commencé par une étude des articles de Burali-Forti dans la *Rivista* et visèrent initialement à obtenir les mêmes résultats. (...) Ainsi nos antécédents sont Euclide et Burali-Forti ; mais il faut mentionner que (1) par l'introduction des « relations » et (2) par le maintien de l'idée de groupe à l'arrière-plan et (3) par le traitement séparé du rapport et (4) par l'évitement du nombre et (5) par l'introduction des groupes cycliques, le sujet a été entièrement modifié. Je pense que ces points doivent être mentionnés quelque part, non pas pour revendiquer une quelconque nouveauté, mais pour montrer aux gens ce qu'il faut regarder. » La stratégie évoquée paraît bien être la suivante : Burali-Forti (la notion de distance) comme point de départ ; un travail de d'épuration et d'affaiblissement pour aboutir à un concept plus général, ensuite. Le point (2) suggère notamment que Whitehead a consciemment cherché à définir une structure dans laquelle l'opération produit relationnel n'était pas une loi interne (NB : Whitehead, comme beaucoup de ses contemporains, définit le groupe par l'existence d'une loi interne).

<sup>2</sup> Voir Hilbert 1899, chap. 5 et 6 ; voir également Artin 1957, 70-75.

<sup>3</sup> Résumons la preuve de \*331. 33. Soit  $a$  le point à partir duquel tous les points de  $\alpha$  peuvent être atteints par une relation appartenant à  $\kappa$  ou à sa réciproque. Si  $R, S$  appartiennent à  $\kappa$ ,  $R'S'a$  appartient à  $\alpha$ , donc il existe un  $T$  dans  $\kappa$  tel que  $T'a = R'S'a$  ou  $T^{-1}a = R'S'a$ . Admettons que la première alternative ait lieu. Soit maintenant  $y$  un point quelconque de  $\alpha$  ; alors il existe un  $L$  appartenant à  $\kappa$  telle que  $y = L'a \vee L^{-1}a$ . Admettons dans un premier temps que  $y = L'a$  ; alors, comme  $\kappa$  est commutative,  $R'S'y = R'S'L'a = L'R'S'a = L'T'a = T'L'a = T'y$ . Si maintenant  $y = L^{-1}a$ , la commutativité ne peut pas être directement utilisée, puisque  $L^{-1}$  n'appartient pas nécessairement à  $\kappa$  ; mais Russell et Whitehead parviennent à contourner l'obstacle et à montrer que  $R'S = T$ . Le même raisonnement peut être reconduit dans le cas où  $T^{-1}a = RS'a$ . Le point essentiel est de réaliser que sans la commutativité, ce théorème comme toutes les propositions élémentaires de la théorie des familles de vecteurs, ne pourrait pas être prouvé.

<sup>4</sup> Narens 1985 élabore une théorie des systèmes extensifs (des systèmes dans lesquels les quantités peuvent s'ajouter les unes aux autres) non commutatifs.

résisterait-elle mieux que la seconde à l'effort de généralisation poursuivi par Russell et Whitehead ? Il me semble que ce choix est lié à l'importance que Whitehead attache à la loi du parallélogramme. Dans le chapitre 4 de *Introduction to Mathematics*, Whitehead explique que le diagramme de la composition des forces, dans lequel la commutativité est essentielle, « est le principal pont par lequel les résultats des mathématiques pures s'appliquent aux faits de la nature ». Demander à ce que les familles vectorielles soient abéliennes permet de retrouver facilement cette loi. Mais cette réponse ne fait, au mieux, que déplacer le problème – il faudrait en effet expliquer pourquoi Whitehead attache une si grande importance à la loi du parallélogramme. Je confesse n'avoir aucune réponse à apporter à cette question<sup>1</sup>. Peut-être les logicistes ont-ils simplement constaté qu'ils pouvaient se passer de tout le reste, et prouver ce dont ils avaient besoin en se restreignant à la commutativité ?

Quoi qu'il en soit, cette place accordée à la commutativité n'a certainement pas favorisé la réception de *Principia* VI par la communauté mathématique. Le type d'investigation mené par Whitehead et Russell n'est pas en lui-même, absurde. Vouloir élaborer une théorie de l'action de structures algébriques plus faibles que celle des groupes est un projet en soi intéressant, qui sera développé dans la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle parallèlement à la définition abstraite des structures de semi-groupes, monoïdes, groupoïdes, etc...<sup>2</sup> Mais la façon dont les logicistes affaiblissent les structures est déroutante. Privilégier la commutativité sur les propriétés de clôture a sans doute contribué à isoler leurs travaux des recherches algébriques contemporaines<sup>3</sup>.

## II-2. Les principales sortes de familles de vecteurs

Après avoir défini le concept général, Russell et Whitehead distinguent divers types de familles vectorielles. Je ne suivrai pas les auteurs dans tous les détails de leurs constructions. Mon but est simplement d'introduire à la lecture de la section B, en distinguant les principales espèces de familles de vecteurs et en précisant quelles sont les relations entre elles.

Le premier concept développé, le plus fondamental aussi, est celui de famille connectée. Un élément de  $\alpha$  d'une famille  $\kappa$  est connecté si et seulement si on peut atteindre à partir de lui n'importe quel point de  $\alpha$  par un vecteur de  $\kappa$  ou par un vecteur converse (\*331.01 définit l'ensemble des points connectés d'une famille). Une famille connectée est une famille qui

<sup>1</sup> Voir, cependant, pour un développement sur le rôle que joue l'application des mathématiques chez Whitehead, l'appendice au chapitre 5.

<sup>2</sup> La définition de structures plus générales que celle de groupe s'effectue relativement tôt, dès le début du vingtième siècle, sous l'impulsion de l'école axiomatique américaine (Dickson, Moore, Wedderburn...). L'effort se poursuit dans les années vingt avec les travaux de Krull et de Brandt, notamment, pour développer une théorie générale des anneaux et des idéaux. Mais c'est surtout à partir des années trente que ces structures vont faire l'objet d'une étude systématique. Concernant plus particulièrement les semi-groupes, il semble que le premier à utiliser le terme soit le mathématicien français De Séguier dans sa *Théorie des groupes finis* (1904, 8-9). Il ne semble pas cependant que sa définition coïncide avec celle aujourd'hui en usage. Les premiers résultats non triviaux furent découverts par A. Suschkewitsch, dans son 1928 ; le mathématicien parvint à déterminer la structure des semi-groupes finis simples. A partir des années cinquante, la notion de semi-groupe est devenue centrale dans la théorie des automates. Pour plus sur cette période, voir Howie 1995.

<sup>3</sup> Soulignons que la notion de semi-groupe semble particulièrement adaptée au cadre relationnel mis en place dans les *Principia*. Il est facile, en effet, de montrer qu'une classe de relations binaires quelconques, définies sur un ensemble  $X$ , munies de l'opération produit relationnel, forment un semi-groupe. Ce lien entre semi-groupes et produit relationnel entre relations quelconques fait que la structure intervient souvent, de façon non explicite, dans les *Principia*. Donnons juste un exemple. Dans \*96 (Russell 1910), les auteurs affirment que la postérité d'un élément  $x$  par une relation  $R$  (l'ensemble des éléments obtenus par itération de  $R$  à  $x$ , i.e.  $\{R'x, R'R'x, R'R'R'x, \dots\}$ ) peut prendre deux formes : soit celle d'un ensemble infini isomorphe à  $\mathbb{N}$  ; soit celle d'un ensemble fini ayant « la forme d'un  $Q$  » (Russell 1910, 637-638), c'est-à-dire tel que, après les  $m$  premiers termes, les  $n$  suivants forment un groupe cyclique. Ce théorème trouve son pendant dans la théorie des sous-semi-groupes monogènes (engendré par un seul élément) d'un semi-groupe quelconque. À ces semi-groupes, sont en effet associés un index  $m$  (donnant le nombre de termes de la « queue » du  $Q$ ) et une période  $n$  (donnant le nombre de termes du « cycle » du  $Q$ ). Voir pour plus à ce sujet, Howie 1995, 8-13. Il pourrait se révéler fructueux d'étudier, de façon systématique, la possibilité de retraduire certains théorèmes des *Principia* dans la théorie des semi-groupes.



contient au moins un point connecté (\*331.02). Lorsque tous les points de  $\alpha$  sont connectés, la famille est dite avoir de la connexité (\*334.27).

Les familles connectées présentent plusieurs propriétés intéressantes. Nous avons déjà vu que, dans une famille connectée, la composition de deux vecteurs de la famille soit appartient à la famille, soit est telle que sa réciproque lui appartient. Russell et Whitehead montrent d'autre part que, dans une famille connectée,  $\kappa$  agit librement sur  $\alpha$ , i.e.  $x$  étant un point quelconque de  $\alpha$ ,  $R$  et  $S$  deux vecteurs de  $\kappa$ , on a :

$$R'x = S'x \text{ si et seulement si } R = S \text{ (*331.42).}$$

Enfin, si  $n$  est un entier quelconque, et  $R$  un élément quelconque de  $\kappa$ , alors  $R^n$ , ou sa réciproque, appartient à  $\kappa$  (\*331.54). Autrement dit, si on ajoute à une famille connectée, les réciproques de ses éléments, alors l'ensemble obtenu est clos pour la relation produit relationnel.

En lien avec les familles connectées, Russell et Whitehead étudient les propriétés d'une classe dérivée de  $\kappa$ , notée  $\kappa_i - \kappa_i$  est définie (\*330.05) comme étant l'ensemble de « toutes les relations de forme  $R^{-1}S$ , où  $R, S \in \kappa$  » (342)<sup>1</sup>. Cette classe présente des propriétés de régularité dont les familles de vecteurs sont dépourvues. Ainsi, lorsque  $\kappa$  est connecté, les auteurs montrent (\*331.43) qu'il y a exactement un élément de  $\kappa_i$  qui relie deux termes quelconques de  $\alpha$ , ce qui peut aussi s'exprimer en disant que  $\kappa_i$  agit régulièrement sur  $\alpha$  (son action est libre et transitive). Autre propriété importante (\*331.56) : si  $R$  appartient à  $\kappa_i$ , et si  $S$  est une puissance entière de  $R$ , alors il y a au plus un élément  $H$  de  $\kappa_i$  tel que  $S \subseteq H$ . La relation  $H$  est appelé le représentant de  $S$  dans  $\kappa$  et noté  $rep_{\kappa}S$ . L'importance de la théorie des représentants provient de la définition des ratios. Comme Russell l'explique,  $m$  et  $n$  étant premiers entre eux,  $L(m/n)M$  signifie que l'intersection de  $L^n$  et de  $M^m$  n'est pas vide. Dans une famille connectée, si  $L^n$  et de  $M^m$  ont chacun un représentant, cette dernière condition équivaut à affirmer que  $rep_{\kappa}L^n = rep_{\kappa}M^m$ . Étant donnée son importance, les propriétés de la notion de représentant sont minutieusement analysées.

Après avoir étudié les principales propriétés des familles connectées, Russell et Whitehead introduisent une autre notion, celle de famille ouverte.  $Id$  désignant l'application identité, une famille  $\kappa$  est ouverte si et seulement si (\*333.02) :

$$\forall x \in \alpha, \forall n \in \mathbb{N}, \forall S \in \kappa, S \neq Id \Rightarrow S^n'x \neq x$$

Les auteurs remarquent immédiatement que l'existence d'une famille ouverte implique l'axiome de l'infini (\*333.19). Le concept de famille ouverte s'oppose dans les *Principia* à celui de famille cyclique. La définition, plus compliquée, de cette dernière notion est donnée dans la section D, en \*370.01 :  $\kappa$  est cyclique si et seulement si 1)  $\kappa$  est connectée et possède plus de deux éléments ; 2)  $\kappa$  possède un élément  $S \neq Id$  tel que  $S = S^{-1}$  ; 3) la relation  $U_{\kappa}$  est sérielle (voir *infra*. pour la définition de  $U_{\kappa}$ ). Bien entendu, une famille qui n'est pas ouverte n'est pas nécessairement cyclique, et une famille qui n'est pas cyclique n'est pas nécessairement ouverte. La distinction qui guide Russell et Whitehead est en fait celle entre la série des distances sur la droite et la série des angles sur le cercle (voir 1913, 344-346, 457-458). Je vais ici me concentrer seulement sur les familles ouvertes (pour de brèves indications sur les familles cycliques, voir *infra*., section III-4).

<sup>1</sup> Comme l'explique les auteurs, « l'opération  $R^{-1} | S$  consiste en une avancée d'un pas  $S$  suivi d'un recul d'un pas  $R$  ; ceci veut dire que si  $R^{-1}S'a$  existe, il est obtenu par un déplacement en avant d'une distance  $S$  à partir de  $a$ , et ensuite d'un déplacement en arrière d'une distance  $R$  à partir de  $S'a$  vers  $R^{-1}S'a$ . »

Dans la section \*333.41, les auteurs prouvent un important théorème (\*333.41), qui dit que, si  $\kappa$  est ouverte et connectée, et si  $L, M \in \kappa_i$  ( $L \neq Id$  et  $M \neq Id$ ) et  $n$  est un entier non nul, alors :

$$rep_{\kappa} L^n = rep_{\kappa} M^n \Leftrightarrow L = M.$$

De cette proposition, il suit (\*333.53) que, dans une famille connectée ouverte, si  $L$  et  $M$  (toutes deux différentes de l'application  $Id$ ) ont entre elles les deux rapports  $m/n$  et  $p/q$  (c'est-à-dire si l'intersection de  $L^n$  et  $M^m$  d'une part, celle de  $L^q$  et  $M^p$  de l'autre, sont non vides), alors  $m/n = p/q$ . Ce résultat est bien entendu fondamental pour la théorie de la mesure, puisqu'il interdit à un couple donné de relations d'être reliées par des rationnels différents.

Russell et Whitehead définissent ensuite le concept de famille sérielle (\*334). Soient  $x$  et  $y$  des éléments de  $\alpha$ , définissons la relation  $s'\kappa$  de la façon suivante :  $x(s'\kappa)y$  ssi il y a au moins une relation  $R \in \kappa$  ( $\neq Id$ ) telle que  $xRy$ . La famille  $\kappa$  est dite sérielle lorsque  $s'\kappa$  est une relation d'ordre, c-à-d une relation asymétrique, transitive et connectée<sup>1</sup>. Les auteurs cherchent ensuite à caractériser les familles sérielles. Un des concepts clés est celui de point transitif. Un point  $a \in \alpha$  est transitif ssi « n'importe quel point qui peut être atteint en partant de  $a$  par deux pas successifs non nuls peut aussi être atteint par un pas non nul » (1913, 383), c-à-d si  $\forall R, S \in \kappa, \exists T \in \kappa, R'S'a = T'a$ . Russell et Whitehead montrent que :

- 1) dans une famille connectée, l'existence de points transitifs équivaut à la transitivité de la relation  $s'\kappa$  (\*334.14) ;
- 2) dans une famille connectée et transitive (c-à-d, d'après \*334.02, qui contient au moins un point transitif),  $s'\kappa$  est toujours asymétrique (cela résulte de \*334.09 et de la transitivité de  $s'\kappa$ ) ;
- 3) si tous les points de  $\alpha$  sont connectés (ou de manière équivalente, si  $\kappa$  a de la connexité), alors  $s'\kappa$  est connexe (\*334.26).

Pour résumer, dans une famille transitive qui a de la connexité, la relation  $s'\kappa$ , c'est-à-dire aussi la famille  $\kappa$  elle-même, est sérielle (\*334.03). Notons que les logiciens insistent sur autre propriété importante : dire que  $\kappa$  est une famille transitive connectée est équivalent à dire que l'opération produit relationnel est close sur  $\kappa$  (\*333.11 et 1913, 383-384).

Dans une famille sérielle, un ordre est défini sur l'ensemble  $\alpha$  et non directement sur  $\kappa$ . C'est seulement dans la section \*336 que les deux logiciens introduisent un ordre sur  $\kappa$ . Ils commencent par définir (\*336.01)  $V_{\kappa}$  comme la relation qu'ont deux éléments  $R$  et  $S$  de  $\kappa_i$  lorsqu'il existe un point  $x$  de  $\alpha$  tel que  $(R'x)(s'\kappa)(S'x)$  – la restriction de  $V_{\kappa}$  à  $\kappa$  constituant la relation  $U_{\kappa}$ . Russell et Whitehead cherchent à définir les cas où  $V_{\kappa}$  et  $U_{\kappa}$  sont ordinalement similaires à  $s'\kappa$ . Ils montrent d'abord que, lorsque  $\kappa$  est connecté,  $V_{\kappa}$  et  $s'\kappa$  sont similaires (c'est une conséquence immédiate de \*336.2) ; si  $\kappa$  est sériel,  $V_{\kappa}$  est alors une relation d'ordre sur  $\kappa_i$ . Le cas de  $U_{\kappa}$  est plus compliqué. Les auteurs fixent un point  $a$  de  $\alpha$  (une origine), et considèrent les transformés de  $a$  par les vecteurs de  $\kappa$  (nous reviendrons bientôt sur cette très importante technique). Ils montrent alors que, si  $\kappa$  est connecté, «  $U_{\kappa}$  est ordinalement similaire à  $s'\kappa$  avec son champ confiné aux points qui peuvent être atteints de  $a$  par des vecteurs qui sont membres de  $\alpha$  » (1913, 394). On atteint la propriété plus forte d'une similarité entre  $U_{\kappa}$  et  $s'\kappa$  seulement en posant qu'un des points connectés de  $\kappa$  est « initial » (c'est-à-dire seulement en posant qu'il existe un point connecté qui n'est le point d'arrivée

<sup>1</sup> Ne pas confondre famille connectée avec relation connectée. Une relation est connectée lorsque que deux éléments quelconque de son champ sont reliés par elle ou par sa converse (1912, 516).

d'aucun vecteur non nul, voir \*335). Dans ce cas, si  $\kappa$  est sériel,  $U_\kappa$  est une relation d'ordre sur  $\kappa$

Russell et Whitehead prouvent que si  $\kappa$  est connecté,  $U_\kappa$  est la relation qu'ont deux vecteur  $R$  et  $S$  lorsque il existe un troisième vecteur  $T$  tel que  $R = S \mid T$  (\*335.41). Lorsque  $U_\kappa$  est un ordre, ce résultat garantit une forme de compatibilité entre l'ordre et le produit relationnel. Toujours concernant la compatibilité, il est prouvé que, si  $\kappa$  est sériel :

- 1)  $PU_\kappa Q \Rightarrow \forall R \in \kappa, (P \mid R)U_\kappa(Q \mid R)$  (\*336.411)
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N}, PU_\kappa Q \Rightarrow P^n U_\kappa Q^n$  (\*336.511)
- 3)  $M, N \in \kappa_l \Rightarrow (MV_\kappa N \Leftrightarrow N^{-1}V_\kappa M^{-1})$  (\*336.53).

Enfin, dernier type distingué, les familles sous-multipliables. Une famille  $\kappa$  est sous-multipliable (\*351.01) lorsqu'elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall R \in \kappa, \forall n \in \mathbb{N}, \exists S \in \kappa, R = S^n$$

En \*337, où l'axiome d'Archimède est également discuté, Whitehead et Russell montrent que la condition de sous-multiplabilité suit de certaines hypothèses posées sur la converse de la relation  $s'\kappa$ . Si  $s'\kappa$  est sérielle, compact (dense) et semi-dedekindien<sup>1</sup>, alors  $\kappa$  est sous-multipliable.

Résumons le cheminement des deux logiciens. Le concept central, on y reviendra bientôt, est celui de famille connectée. Partant de cette notion, Russell et Whitehead introduisent une distinction entre les familles ouvertes et les familles cycliques, et concentrent l'essentiel de leur effort à l'examen des familles ouvertes. Ils montrent, grâce à la théorie des représentants, que deux relations quelconques appartenant à des familles connectées ouvertes ne peuvent avoir au plus qu'un rationnel. Les auteurs s'intéressent ensuite aux relations d'ordre. Ils prouvent d'abord que si une famille est transitive et a de la connexité, alors  $s'\kappa$  ordonne  $\alpha$ ; puis que, si  $\kappa$  est sérielle et initiale, un ordre peut être induit sur la famille  $\kappa$  elle-même. La compatibilité entre l'ordre ainsi défini et le produit relationnel est démontrée. Enfin, la notion de famille sous-multipliable est formulée. Les logiciens montrent que cette propriété suit de certaines hypothèses concernant l'ordre dans  $\kappa$ .

Ce rapide panorama ne laisse pas de doute sur les intentions qui dirigent les développements, complexes dans le détail, de Russell et Whitehead : c'est la notion de distance qui les guide. Au lieu d'en faire un point de départ, les *Principia* en font un point d'arrivée, atteint au bout d'un processus progressif de complexification d'un concept initialement très pauvre. Russell et Whitehead partent de la notion de famille vectorielle, i.e. d'une structure relationnelle commutative pour le produit relationnel. Ils reprennent ensuite la distinction faite en 1900b entre distance et angle, et dotent les familles ouvertes d'un ordre compatible avec la relation produit. Enrichissant le concept initial, ils retrouvent donc la conjonction entre structure additive et ordinale, caractéristique de la quantité. Pour rendre possible la mesure, c'est-à-dire pour permettre ce qui correspond en 1900 à la définition des exposants rationnels et réels, ils posent alors des contraintes supplémentaires sur l'ordre afin de retrouver une situation presque identique à celle de la distance (famille sous-multipliable). La principale difficulté provient du fait que l'opération produit relationnel n'est pas d'emblée caractérisée comme

<sup>1</sup> Rappelons qu'une série est dedekindienne lorsque chaque sous-ensemble (non pas chaque sous-ensemble borné supérieurement) de son champ a soit un maximum, soit une plus petite borne supérieure.  $\langle \mathbb{R}, < \rangle$  n'est donc pas dedekindien, car une partie non bornée n'admet ni maximum, ni plus petite borne supérieure. Pour retomber sur leurs pieds, Russell et Whitehead définissent une relation semi-dedekindienne comme une relation qui « devient dedekindienne par addition d'un terme à la fin » (1912, 660, \*215.02). Ainsi,  $\langle \mathbb{R}, < \rangle$  est semi-dedekindien.

close. Pour contourner l'obstacle, Russell et Whitehead étendent l'étude à la structure  $\kappa$ , développent la théorie des représentants, puis définissent la notion de famille transitive. Mais cette difficulté montre, paradoxalement, que le but est d'en arriver à une structure qui « ressemble » à celle décrite axiomatiquement en 1900b et reprise dans les *Principles*. Malgré la complexité apparente de cette section, le but poursuivi par Russell et Whitehead est simple : retrouver *in fine* le point de départ de Russell 1900b. La question est alors de comprendre pourquoi les logiciens estiment nécessaire en 1913 de généraliser et d'affaiblir leur ancien concept de distance. Cette question engage plus fondamentalement celle du rapport entre la nouvelle théorie de la quantité et la doctrine présentée dans les *Principles*. C'est vers ce problème que je vais maintenant me tourner, en me concentrant sur les deux principales différences entre la nouvelle doctrine et l'approche de 1900b : le devenir de la distinction quantité et grandeur, d'une part, la généralisation de la doctrine des grandeurs relations, d'autre part.

### II-3. *Principia*, VI versus *Principles*, III : une position relativiste ?

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, Russell adoptait en 1903 un point de vue absolutiste. Dans le cadre relationnel mis en place en 1900b, cela signifiait que les relations appartenant à la structure distance ne se réduisaient pas à des ensembles de couples de points de  $\alpha^1$ . Sur ce point, rien ne change en 1913 : les familles vectorielles ont pour éléments des relations et les vecteurs ne sont pas dérivés à partir d'une relation d'équivalence définie sur  $\alpha \times \alpha$ . Certes, les relations sont, dans les *Principia*, données en extension, et non pas en intension, comme c'était le cas dans les *Principles*<sup>2</sup>. Mais cela ne veut pas dire que Russell envisage en 1910 de réduire les relations à la notion de couple (ou à la notion de relation instanciée des *Principles*) ; au contraire, le couple  $(x, y)$  n'est définie en \*55 que comme une relation, à savoir la relation qu'ont les éléments du singleton  $\{x\}$  et les éléments du singleton  $\{y\}$ <sup>3</sup>. L'idée que les relations sont des entités logiquement séparables des termes qu'elles lient demeure inchangée. La thèse absolutiste semble donc reprise : les grandeurs (les relations de  $\kappa$ ) ne se réduiraient pas, en 1913, à des classes de quantités égales (à des classes d'équivalence sur  $\alpha \times \alpha$ ).

Le point de vue extrêmement général dans lequel se placent les auteurs rend en réalité la situation plus compliquée. La structure distance était très riche, puisque  $\langle \kappa, | \rangle$  était défini comme un groupe complet archimédien. Cette richesse garantissait, on l'a vu, la régularité de l'action de  $\langle \kappa, | \rangle$  sur  $\alpha$  : tout couple de points était relié par une et une seule distance, de sorte que les relations de  $\kappa$  partitionnaient  $\alpha \times \alpha$ , et il était donc possible, soit de considérer la grandeur commune à un ensemble de couples comme antérieure à la relation d'égalité (conception absolutiste), soit de dériver l'existence de cette grandeur de la relation d'égalité entre quantités (conception relativiste). Pour les raisons que l'on a vu, Russell choisit la première solution. Dans les *Principia*, la situation n'est plus la même. Parce que la structure qui agit sur  $\alpha$  est beaucoup plus faible que la notion de distance, rien ne garantit plus que relation entre les couples de  $\alpha \times \alpha$  et les vecteurs de  $\kappa$  soient *many-one* (\*331.43), c-à-d rien ne permet d'affirmer que si un premier couple instancie le même vecteur qu'un second couple, qui instancie lui-même le même vecteur qu'un troisième, alors le premier couple instancierait le même vecteur que le troisième. « Instancier le même vecteur » n'est plus une relation transitive, donc plus une relation d'équivalence sur  $\alpha \times \alpha$ .

<sup>1</sup> Je reprends ici la notation des *Principia*, et non pas celle de 1900b.

<sup>2</sup> Voir Russell et Whitehead 1910, 200. Dans les *Principia*, les relations en extension sont des symboles incomplets définies à partir des fonctions propositionnelles à deux variables (voir \*21).

<sup>3</sup> Russell et Whitehead notent le couple  $(x, y)$  ainsi :  $x \downarrow y$  ; et ils posent :  $x \downarrow y = \iota'x \uparrow \iota'y$ , où le signe «  $\uparrow$  » a le sens de produit cartésien. Un couple est donc une relation, comme l'indique \*55.13 :  $z(x \downarrow y)w \Leftrightarrow (z=x \wedge w=y)$ .

Ceci a une conséquence décisive : l'alternative philosophique entre approche absolutiste et approche relativiste n'est plus formulable en 1913. La question de savoir si ce qu'ont en commun des quantités égales dérive, ou non, d'une relation d'égalité présuppose en effet qu'il y ait une chose et une seule que les quantités égales possèdent en commun. Or, dans le nouveau cadre, il n'y a pas au plus un vecteur auquel les couples de points « égaux » sont reliés, mais possiblement plusieurs. L'arrière-plan mathématique permettant de poser l'alternative métaphysique « relativisme » *versus* « absolutisme » n'existe tout simplement plus. Quel sens donné à ce changement ? Les auteurs des *Principia* adhèrent-ils toujours à une approche absolutiste, ou bien militent-ils à présent pour une conception relativiste de la grandeur ? La question a-t-elle même encore un sens ?

Dans la section \*336, les logicistes définissent le « corrélateur  $A_a$  » de  $\kappa$  par l'égalité  $A_a'R = R'a$ . Autrement dit, la relation  $A_a$  corréle le couple  $(a, R'a)$  au vecteur  $R$ , et si  $a$  est prise comme origine, alors  $A_a$  « est analogue à la relation d'un point à sa coordonnée » (1913, 393) – la coordonnée d'un point étant ici le vecteur qui, de l'origine, conduit à ce point. Le problème est que dans le cas général, rien ne garantit que : 1) tout point de  $\alpha$  ait une coordonnée vectorielle (il peut y avoir des points qui ne soient pas « atteignable » à partir de l'origine) ; 2) tout point de  $\alpha$  ait au plus une coordonnée vectorielle (il se peut qu'il y ait des points atteignables par plusieurs « trajets » à partir de  $a$ ). Nous avons vu cependant que, quand  $\kappa$  est connecté, il y a exactement un élément de  $\kappa_i$ , et au plus un élément de  $\kappa$ , qui relie deux termes quelconques de  $\alpha$  (\*331. 43), ce qui veut dire que, « si  $\kappa$  est une famille connectée, et  $a$  un point quelconque de son champ, (la restriction de  $A_a$  à  $\kappa_i$ ) est une relation un-un » (1913, 394). Quand la famille est connectée, tous les points de  $\alpha$  peuvent être associés à un et un seul vecteur de  $\kappa_i$  d'origine  $a$ , et seulement à au plus un élément de  $\kappa$  (et ce, pour n'importe quel point  $a$  de  $\alpha$  servant d'origine). L'origine étant choisie, il est donc formellement indifférent de parler des points de  $\alpha$  ou des vecteurs de  $\kappa_i$ , ce qui revient à dire que dans le cas où une famille est connectée (et dans ce cas seulement), il est possible de poser la question du relativisme (les vecteurs de  $\kappa_i$  sont-ils des entités séparées, ou bien au contraire faut-il les assimiler à des classes d'équivalence entre couples d'éléments de  $\alpha$  ?) dans les termes qui sont proches de ceux des *Principles*. Dans les *Principia*, la position de l'alternative « absolutisme » / « relativisme » n'est donc pas première – elle découle d'une condition (dont on voit à quel point elle est cruciale) concernant l'existence de points connectés. Le poids donné à cette condition infléchit, semble-t-il, la position de Russell et Whitehead vers une forme de relativisme. Voyons pourquoi.

Reprenant la distinction élaborée par Torretti<sup>1</sup> pour commenter Poincaré, il est possible de considérer la structure algébrique  $\langle \kappa, | \rangle$  comme une « forme » pouvant être appliquée à plusieurs « matières » différentes, i.e. à plusieurs ensembles  $\alpha$  différents. Or la condition « être connecté » ne caractérise pas seulement la « forme »  $\langle \kappa, | \rangle$  (la condition n'est ainsi pas du même type que les propriétés de clôture, ou d'ordre sur  $\kappa$ ), elle caractérise l'interaction d'une « forme » avec une « matière », c'est-à-dire l'action de  $\langle \kappa, | \rangle$  sur  $\alpha$ . Une même forme, non connectée quand elle est appliquée à un certain ensemble, peut le devenir, lorsqu'elle est appliquée à un champ plus restreint. La notion de famille connectée, centrale dans le nouveau dispositif, est donc un concept indissociablement « matériel » et « formel », qui interdit toute distinction a priori entre un domaine qui serait celui des grandeurs abstraites, et un autre qui serait constituée des quantités concrètes. La possibilité d'associer à chaque couple une et une seule grandeur (ou encore, de situer chaque élément de  $\alpha$  par rapport à un élément origine en donnant sa distance par rapport au premier) dépend de la structure de l'interaction entre les quantités de  $\alpha \times \alpha$  et les grandeurs de  $\kappa$ . Il y a donc une forme d'« aristotélisme » (la forme

<sup>1</sup> Torretti 1978, 336-338, et voir notre chapitre 3.

n'est pas dissociable de la matière) dans la nouvelle théorie des *Principia*, qui ferme la voie à l'absolutisme des *Principles* et pointe vers un renouveau du relativisme.

Bien entendu, dans la section B, rien n'est dit sur cette question ; le parti pris de neutralité (sur ce point, voir *supra*.) empêche les auteurs d'aborder directement le problème. Cependant, de nombreux éléments montrent que Whitehead, à l'époque où il rédige la partie VI, a rompu avec l'absolutisme. Comme il est bien connu, dès *On Mathematical Concepts of the Material World* (1906), Whitehead ne cache pas sa préférence pour les conceptions relativistes de l'espace. Ce trait s'accroît dans les années qui suivent – une lettre, datée du 3 septembre 1909, atteste ainsi que la théorie de la géométrie sur laquelle l'ami de Russell travaillait était « relationnelle » (i.e. « relativiste », au sens des *Principles*) :

La nuit dernière ... l'idée que le TEMPS pourrait être traité exactement de la même manière que j'ai maintenant traité l'espace a illuminé mon esprit. (...) Le résultat est une théorie relationnelle du temps, exactement similaire à celle de l'espace.

Il est vrai que Whitehead parle ici de l'espace et du temps, non directement de la grandeur. Mais l'attrait qu'il éprouve pour les approches relativistes déborde ce cadre<sup>1</sup>. À partir de 1913-1914, Russell suivra le mouvement : il construit l'espace comme système de perspectives dans 1914a, l'instant comme classe d'événements dans 1914b. D'autre part, un texte, écrit par Whitehead en 1911 semble fournir un cadre d'interprétation « opérationnaliste » et relativiste aux constructions de la section B de *Principia* VI. Il s'agit de la conclusion du chapitre de *Introduction to Mathematics* consacré à la géométrie analytique (1911, 125-126). Whitehead discute l'idée de système de coordonnées :

Du point de vue abstrait des mathématiques, l'idée d'une origine arbitraire peut apparaître artificielle et maladroite, et la chose vaut également pour les axes de coordonnées (...) Mais en relation à l'application des mathématiques aux événements de l'univers, nous symbolisons ici avec une simplicité directe le fait le plus fondamental concernant la perspective sur le monde fournie par nos sens. Nous référons nos perceptions sensibles des choses à une origine que nous appelons « ici » : notre position dans une partie particulière de l'espace autour duquel nous rassemblons la totalité de l'univers est le fait essentiel de notre existence corporelle. (...) Il est vrai qu'en constituant un stock commun de connaissances avec nos semblables, nous devons en rabattre sur l'égoïsme strict de notre « ici » individuel. Nous substituons « près d'ici » à « ici » ; ainsi, nous mesurons les miles à partir de la mairie de la ville la plus proche, ou à partir de la capitale du pays. En mesurant la Terre, les hommes de science mettront à l'origine le centre de la Terre ; les astronomes poussent même à son extrême l'altruisme en plaçant l'origine à l'intérieur du soleil. Mais, aussi loin que cette origine soit, (...) il reste cependant vrai que (...) notre première procédure dans l'exploration de l'univers est de choisir une origine « près d'ici ».

La première phrase du texte reprend brièvement la raison pour laquelle, dans la perspective de la géométrie synthétique à la Von Staudt (qui était aussi celle des *Principles*), la géométrie analytique était considérée comme inférieure. Mais, au lieu d'en rester à ce constat, Whitehead se livre à une véritable réhabilitation de l'idée de coordonnées : c'est un fait fondamental, explique l'auteur, que l'espace nous est toujours donné à partir d'un « ici », l'origine de notre repère – la « totalité de l'univers » est toujours, pour nous, rassemblée autour de « notre position dans une partie particulière de l'espace ». Or dans *Principia* VI, c'est l'idée de point connectée qui traduit cette intuition. Rappelons notamment le rôle que joue le corrélateur  $A_a$  : lorsque la famille est connectée, un point peut « s'identifier » au trajet que l'on fait à partir de l'origine pour l'atteindre. Quand  $\kappa$  est connectée, tous les points peuvent être rassemblés autour d'un « ici ». La condition de connexion traduit donc l'idée, exprimée dans le passage cité, selon laquelle l'univers nous est toujours donné en perspective à partir d'un point. Le choix de faire jouer, dans la section B, à la notion de famille connectée

---

<sup>1</sup> Voir Whitehead 1920, chap. 2, et la critique de la « *bifurcation of nature into two systems* ».

un rôle aussi déterminant trouverait ici une explication (la notion exprimerait le fait « fondamental » selon lequel « nous référons nos perceptions sensibles des choses à une origine que nous appelons « ici » ») et serait ainsi liée à une réflexion sur la façon dont nous explorons et mesurons notre environnement. Comme chez Helmholtz, la mesure et la grandeur sont conçues par Whitehead comme le résultat d'une procédure empirique et concrète. La structure grandeur (comme la structure espace) ne serait pas une donnée ; elle serait engendrée à partir de conditions posées sur des structures plus faibles – conditions qui correspondraient à des opérations qu'un sujet effectue sur son environnement.

Si donc il y a, d'un point de vue formel, de nombreux points communs entre la première théorie des distances et la doctrine mature des familles de vecteurs, les deux démarches ne s'inscriraient pas dans le même contexte philosophique. La première s'insérerait dans un contexte absolutiste, alors que la seconde se grefferait à une approche plutôt relativiste. Il ne faut pas, néanmoins, aller trop loin dans cette direction. Comme nous l'avons indiqué plus haut, les relations de  $\kappa$  sont considérées en 1913 comme des entités données, et non comme des constructions à partir des éléments de  $\alpha \times \alpha$  – de ce point de vue, rien a changé par rapport aux *Principles*. Il serait donc excessif de parler de rupture avec l'approche absolutiste antérieure. Tout au plus peut-on noter de nouveaux éléments, qui pointent, en 1913, vers un renouveau du relativisme et du constructionnalisme – sans que cette dimension soit complètement dégagée et affirmée pour elle-même. Comme nous le verrons au chapitre 6, il appartient au grand mathématicien N. Wiener, alors élève de Russell, de poursuivre cette voie, et de considérer explicitement la notion de grandeur comme une construction logique à partir des quantités.

#### II-4. *Principia*, VI versus *Principles*, III : une théorie générale des grandeurs ?

Dans les *Principles*, Russell divisait les grandeurs en différents genres (*kinds*) très hétérogènes entre eux. Le plaisir, l'aire, la masse, la vitesse, le moment, la ressemblance, la divisibilité, etc... étaient tous considérés comme des *kinds of magnitude*. Parmi ces genres, deux étaient plus spécifiquement liés à la mesure : les divisibilités et les distances. C'était dans le cadre, relativement étroit donc, de l'analyse d'un des deux genres de grandeurs mesurables que Russell élaborait la théorie relationnelle de la distance qui sert de base aux développements de la partie VI des *Principia*. En 1903, la théorie relationnelle de la grandeur, loin d'être considérée comme une théorie générale, ne portait ainsi que sur un genre bien particulier de quantités. Est-ce toujours le cas dix ans après ? La question est délicate. On ne trouve, dans les *Principia*, aucune discussion générale sur le sens et l'extension du concept de grandeur, c'est-à-dire aucun équivalent des chapitres XIX (« *The meaning of magnitude* ») et XX (« *The range of quantity* ») des *Principles*. Russell et Whitehead présentent la théorie des familles de vecteurs, sans délimiter la place qu'elle est supposée occuper à l'intérieur d'une doctrine générale de la quantité. À une exception près, sur laquelle je vais bientôt revenir, les auteurs ne soulèvent pas la question de savoir si tous les genres de grandeur sont à considérer comme des familles de vecteurs, ou si, au contraire, certaines sortes de grandeurs échappent à cette caractérisation (à cet égard, la situation dans les *Principia* se rapproche de celle de Russell 1900b, où une théorie formelle, dont la portée philosophique n'était pas délimitée, était présentée).

A cette première difficulté s'en ajoute une autre. La partie VI des *Principia* était destinée à servir de préliminaire au volume 4, consacré à la géométrie, qui, on le sait, n'a jamais vu le jour<sup>1</sup>. Nous ignorons à peu près tout de la théorie que Whitehead était en train d'élaborer<sup>1</sup> et

---

<sup>1</sup> Ce lien entre théorie de la grandeur et géométrie est attesté par un passage de la lettre du 14/09/1909 citée en introduction : « En bref, les vieilles algèbres démodées qui parlaient de « quantités » auraient été dans le vrai, si seulement elles avaient su

nous ne pouvons nous y appuyer pour mieux pénétrer le sens des thèses développées dans la *Principia* VI. Le fait que bien des traits de la théorie de la quantité seraient devenus plus intelligibles si l'on avait pu prendre en compte son application à la géométrie (et nous insisterons sur l'importance de ce contexte géométrique dans la prochaine section, consacrée à l'analyse de la section C) ne signifie cependant pas pour autant que l'on doive réduire la théorie des *Principia* à une doctrine de la grandeur géométrique. Russell et Whitehead parlent de masses ou de nombres au moins autant que de longueurs<sup>2</sup>. Et Whitehead, dans une lettre à Russell datée du 18/06/1908, souligne même que la généralité du propos n'est pas sans avantage :

Note que (en accord avec le sens commun) un rapport (*ratio*) entre deux longueurs est le MEME que le rapport (*ratio*) correspondant entre deux masses ou deux nombres.

Les rationnels, comme les réels, ne s'appliquent pas qu'aux longueurs ; ils s'appliquent aussi, et exactement au même sens, aux masses et aux nombres. Ce n'est donc pas par hasard si les exemples pris par Russell et Whitehead sont aussi divers – la doctrine de la grandeur ne doit pas dans leur esprit se réduire à une théorie de la métrique.

Mais ce qui atteste l'idée que les logicistes développent une théorie générale, et non pas simplement régionale, de la quantité, est l'importante introduction de l'alinéa \*303. Russell et Whitehead y défendent l'idée qu'une grandeur, quel que soit son type, peut toujours être conçue comme un vecteur. Après avoir remarqué que « nous pensons habituellement que les rapports (*ratios*) s'appliquent à des grandeurs qui ne sont pas des relations », ils écrivent (1913, 260-261) :

En appliquant notre théorie au rapport (*ratio*) de deux masses (disons), il faut noter que l'idée de quantité (de masse) dépend, quel que soit son usage, de la comparaison entre différentes quantités. La « quantité vectorielle »  $R$ , qui relie une quantité  $m_1$  à une quantité  $m_2$ , est la relation provenant de l'existence d'une certaine procédure physique par laquelle un corps de masse  $m_1$  sera transformé en un autre corps de masse  $m_2$ . Ainsi  $\sigma$  de ces pas (*steps*), symbolisés par  $R^\sigma$ , représente l'addition de la masse  $\sigma(m_2 - m_1)$ . (...)

Ainsi, dire qu'une entité possède  $\mu$  unités de quantité signifie que, en prenant  $U$  pour représenter la quantité vecteur unité,  $U^\mu$  relie le zéro de quantité – quelle que soit sa signification en référence au genre de quantité considéré – avec la quantité possédée par cette entité.

En faveur de cette méthode pour symboliser les idées de quantité, on peut faire valoir ( $\alpha$ ) que c'est toujours une procédure possible, quelle que soit la valeur qu'on lui accorde eu égard à sa capacité à représenter les principes premiers, et ( $\beta$ ) qu'elle représente directement le principe « aucune *quantité* de quel que genre que ce soit sans une comparaison de différentes quantités de ce genre. »

Pour penser les masses comme des vecteurs<sup>3</sup>, il faut concevoir les masses comme des transformations, et non comme des propriétés. Plus précisément, dans le dispositif mis en place par Russell et Whitehead, les corps correspondent aux éléments de l'ensemble de base  $\alpha$ , et les masses aux vecteurs de la structure  $\kappa$  qui agit sur  $\alpha$  (qui transforment les éléments de

---

ce que ces « quantités » étaient – ce qui n'était pas le cas. La connexion avec l'analyse de la géométrie métrique est immédiate – il s'agit en réalité de la même chose ». Voir également la lettre du 12/10/1909.

<sup>1</sup> Sur la géométrie dans les *Principia*, voir Harrell 1988. Notons en passant que le fait de vouloir fonder la géométrie métrique sur la théorie de la distance est déjà en soi un résultat intéressant. Rappelons que, dans les *Principles*, la géométrie métrique, en tant que science mathématique, était définie comme une théorie de la *distance* relationnelle, alors que la géométrie métrique, en tant que science empirique, était conçue comme une théorie de la divisibilité du *stretch*. Dans les *Principia*, la seconde est, semble-t-il, abandonnée, au profit de la première.

<sup>2</sup> 1913, 407-408.

<sup>3</sup> Dans le cas des longueurs, qui sont des relations, l'application de la théorie ne pose aucun problème – voir Russell, 1913, 233 : « Dans les cas comme celui de la distance spatiale, la façon d'appliquer cette conception est évidente ; dans le cas des masses, la conception devient applicable en considérant p. ex. un gramme comme +1 gramme, c-à-d comme la relation d'une masse  $m$  à une masse  $m'$  quand  $m$  excède  $m'$  d'un gramme. Ce qui est communément appelé un gramme sera la masse qui aura la relation +1 gramme au zéro du genre masse. » Comme nous le verrons au chapitre 6, Russell et Whitehead accordent une place fondamentale à ce que les théoriciens du *measurement* appellent les systèmes d'intervalle.



$\alpha$  en d'autres éléments de  $\alpha$ ). Ce sont initialement les vecteurs qui ont une masse, et non les éléments de  $\alpha$ . Maintenant, lorsqu'un corps correspondant au zéro de masse, a été choisi, les autres membres de  $\alpha$  ont, en un sens dérivé, une masse : si un corps  $b$  est tel que,  $a$  étant le zéro de masse,  $aRb$ , alors Russell et Whitehead expliquent que l'on pourra attribuer à  $b$  la masse (le vecteur)  $R$ . Le vecteur (+1) gramme, appliqué au zéro de masse, « engendre » un corps de 1 gramme.

Cette procédure semble au premier regard compliquée. Mais elle correspond en réalité très exactement à une démarche déjà développée dans les *Principles* et esquissée dès *On the Relations of Numbers and Quantity*. Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 2, à plusieurs reprises dans les années 1897-1903, Russell envisage d'adopter ce que J. Bigelow et R. Pargetter appellent la stratégie Platon-Berkeley, consistant à penser toutes les sortes de grandeurs sur le modèle de la plus ou moins grande ressemblance entre des termes et un paradigme arbitrairement choisi<sup>1</sup>. On peut ainsi considérer les différents degrés de rouge, affirme l'auteur des *Principles*, comme autant de « distances » par rapport à un échantillon standard donné<sup>2</sup>. En 1903, Russell ne franchit cependant jamais le Rubicon, et maintient toujours que les grandeurs relations ne sont qu'un genre de quantités parmi d'autres – que de nombreuses sortes de grandeurs, dont la masse, ne peuvent se représenter en termes de relations de proximité avec un paradigme. Mais dans l'introduction à \*303, Russell et Whitehead semblent désormais adopter la stratégie « Platon-Berkeley ». La « méthode (vectorielle) », avancent-ils, « est *toujours* une procédure possible » pour « symboliser les idées de quantité ». Certes, prudence oblige, Russell et Whitehead insistent sur le caractère technique et opératoire de cette réduction. Si elle est toujours possible, une telle conception pourrait ne pas représenter fidèlement les « principes premiers ». Notons cependant que Russell et Whitehead font un pas important vers un engagement plus affirmé en soutenant que leur doctrine se justifie, sur le plan philosophique, par « le principe « aucune *quantité* de quel que genre que ce soit sans une comparaison de différentes quantités de ce genre ». » On ne peut s'y méprendre : la formulation adoptée renvoie directement aux conclusions auxquelles Russell était parvenu en 1897, dans sa critique du texte de Couturat. Rappelons-les une fois de plus :

Dans *une* quantité, considérée en isolation, il est impossible de découvrir [...] une quelconque propriété de la quantité. *Une* quantité est à vrai dire une expression aussi impropre pour des choses qui peuvent être quantitativement comparées qu'*une ressemblance* l'est pour une photographie.

Il est très étonnant de trouver, au cœur des *Principia*, la reprise d'un « principe » qui date du tout début de la carrière philosophique russellienne – ceci atteste qu'il y a un fil continu, bien que tortueux, qui court des premières discussions sur la théorie hégélienne de la quantité jusqu'aux constructions complexes et réticulées des *Principia*. Ce texte semble en tout cas indiquer que Russell et Whitehead renouent, en 1913, avec la stratégie « Platon-Berkely » abandonnée dans les *Principles*.

## II. 5 : Conclusion

La notion de famille de vecteurs provient de la généralisation et de l'affaiblissement de la structure distance, présentée en 1900b. Comme les distances, les familles vectorielles comportent trois niveaux : un ensemble de base (niveau 1) sur lequel agit une classe de transformations (niveau 2) – la loi de composition entre les éléments de cette classe étant soumise à certaines conditions (niveau 3). En 1900, les contraintes posées à ce dernier étage

<sup>1</sup> Bigelow & Pargetter 1988, 289. Voir chap. 5 pour plus sur Bigelow et Pargetter.

<sup>2</sup> Russell 1903, §§ 159-160.

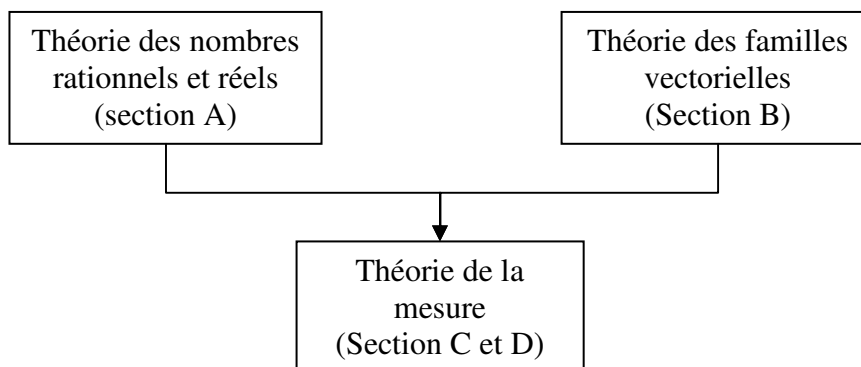
étaient très lourdes (le produit relationnel était une loi interne commutative inversible, qui devrait être, de plus, compatible avec une relation d'ordre, elle-même extrêmement riche). En 1913, la seule condition posée est la commutativité – rien d'autre n'est conservée. Cet appauvrissement rend bien entendu tous les raisonnements beaucoup plus compliqué. Russell et Whitehead, à partir de la notion mère, diversifient très rapidement des ensembles de familles vectorielles caractérisés par une certaine forme de régularité. Le concept clé est, à cet égard, celui de famille connectée – dans une famille connectée  $\kappa$ ,  $\kappa_i$  agit régulièrement sur  $\alpha$ , ce qui signifie qu'à chaque couple d'éléments de l'ensemble  $\alpha$  correspond une et une seule « distance » dans  $\kappa_i$ . On retrouve là une situation familière dans laquelle à des quantités égales correspondent une unique grandeur – cette configuration est toutefois dérivée, et non plus postulée axiomatiquement, comme c'était le cas en 1900b.

L'adoption du nouveau cadre est accompagnée de deux changements. Le premier concerne la place de la doctrine relationnelle des quantités au sein de la théorie des grandeurs. Dans les *Principles*, les grandeurs relations étaient un *kind of magnitude* parmi d'autres. Dans les *Principia*, il semble que Russell et Whitehead assimilent tous les types de grandeur à des familles de vecteurs, et qu'il n'y ait plus, pour eux, de grandeurs non relationnelles. On pourrait croire que cette disparition n'est due qu'à un effet d'optique – les *Principia* ne s'intéressant qu'aux mathématiques, et la théorie de la quantité étant avant tout destinée à fournir la base d'une doctrine de la métrique, il est normal que Russell et Whitehead développent simplement une théorie relationnelle des grandeurs. Mais nous avons vu qu'une telle interprétation ne tenait pas et que le projet était plus ambitieux. Même si Russell et Whitehead ne développent pas leur intuition, il s'agit bien pour eux d'élaborer une théorie générale de la quantité, et donc d'intégrer dans un même canevas relationnel l'ensemble des genres de grandeurs. Nous chercherons dans le chapitre 5 à donner à l'idée des logicistes l'ampleur qu'elle mérite.

La seconde conséquence concerne l'alternative entre approches absolutiste et relativiste de la grandeur. Dans les *Principles*, Russell optait pour la première. Dans les *Principia*, les auteurs semblent infléchir leur position vers une conception relativiste. Plus précisément, nous avons vu que le cadre mathématique très général mis en place dans la partie VI interdit de poser le problème du relativisme et de l'absolutisme comme il était posé dans les *Principles* : si la famille n'est pas connectée, les vecteurs ne partitionnent pas  $\alpha \times \alpha$ . La situation familière dans laquelle les grandeurs correspondent à des classes de quantités mutuellement exclusives apparaît alors comme le résultat d'un processus de construction à partir de données à la fois plus pauvre et plus concrète. L'hypothèse clé de l'existence de points connectés semble être en particulier liée, au moins chez Whitehead, à une réflexion sur la façon dont l'espace nous est donné toujours en relation à un « ici » à partir duquel nous l'explorons. La notion de grandeur apparaît donc en 1913 comme le résultat d'un processus d'élaboration complexe, qui s'exerce sur notre expérience perceptive. Elle n'est pas, comme en 1903, considérée comme une donnée brute de l'analyse. Je reviendrai dans le chapitre 6, en examinant la « nouvelle théorie de la mesure » de N. Wiener, sur le rapport entre théorie de la grandeur et méthode des constructions.

### III- Les familles mesurables

Les deux dernières sections de la partie VI des *Principia* sont consacrées à la théorie de la mesure (*measurement*). Mesurer, c'est, de manière minimale, assigner des nombres à des grandeurs, i.e., dans les termes de Russell et Whitehead, appliquer des nombres réels ou rationnels à des éléments d'une famille vectorielle. Les sections C et D réunissent donc ce qui a été traité dans la section A et la section B de manière séparée. On a ainsi le schéma :



La théorie de la mesure (au sens des *Principia*) se présente comme une synthèse entre deux théories indépendantes l'une de l'autre, la théorie de l'extension des nombres (section A) et la théorie des familles de vecteurs (section B).

Cette situation est complètement nouvelle par rapport à ce qui prévalait dans les *Principles*. La structure distance de *On the Logic of Relations*, était isomorphe à  $\langle \mathbb{R}, +, < \rangle$ , et était donc, par définition, une structure mesurable. L'unité étant choisie, les nombres s'appliquaient « naturellement » aux distances : la mesure du produit relatif de deux relations était l'addition de leurs mesures et l'ordre entre les distances était reflété par celui de leurs mesures. On retrouve le même genre de raisonnement dans les *Principles*. S'il distingue bien entre *magnitude* et *measurable magnitude*, Russell confond les notions de grandeurs extensives (grandeurs de divisibilité et distance) et grandeurs mesurables. Il ne prend notamment pas soin de distinguer entre additivité et mesurabilité : en 1903, toutes les grandeurs additives sont mesurables. Dans les *Principia*, à l'inverse, il y a des familles de vecteurs qui ne sont pas mesurables. L'appauvrissement de la structure « distance » a ainsi pour corrélat immédiat le détricotage du lien entre grandeurs relationnelles et nombres. Rien ne permet plus d'associer des nombres aux vecteurs.

La nouvelle question est donc la suivante : quelles conditions faut-il imposer aux familles de vecteurs pour les rendre mesurable ? Cette interrogation en appelle immédiatement une autre, plus fondamentale : comment définir la propriété de mesurabilité ? Que veut-on dire lorsqu'on dit qu'une famille de vecteurs est mesurable et qu'est-on en droit d'attendre d'une telle structure ? Russell et Whitehead donnent une première définition des familles mesurables, dans l'introduction de la section C, qu'ils complètent par une nouvelle caractérisation dans la section D. En effet, la première définition ne vaut que pour les familles ouvertes ; or, Russell et Whitehead notent que certaines familles non ouvertes, comme les angles ou les longueurs sur la droite elliptique, sont « mesurables » ; ils ajoutent donc une seconde définition développée dans la section D, qui rend compte de ces cas là. La manœuvre est intéressante, en ce qu'elle indique, nous le verrons, qu'il n'est pas possible de définir ce qu'est une grandeur mesurable sans prendre en considération les propriétés des grandeurs que l'on examine.

Dans un premier temps, j'exposerai et commenterai la définition que Russell et Whitehead donnent de la mesure au début de la partie C. Je me concentrerai dans un second temps sur la seule partie D (consacrée à la mesure dans les familles cycliques). Je reviendrai ensuite sur les développements de la théorie de la mesure dans les familles ouvertes.

### III-1. La mesure dans une famille ouverte

Les auteurs des *Principia*, au début de la section C, énumèrent quatre conditions qu'une famille doit satisfaire pour être mesurable. Un point d'explication avant de citer le texte : par « *pure ratio* » (que je traduirais par « rapport pur ») les auteurs entendent les rationnels définis dans la section A comme relations de relations ; par « *applied ratio* » (« rapport appliqué »), ils entendent ces mêmes relations, restreintes à une famille vectorielle donnée. Le passage est le suivant (1913, 407-408) :

- (1) Aucun couple d'éléments d'une famille (*No two members of a family*) ne doit avoir deux rationnels différents. (...)  
 (2) Tous les rationnels exceptés 0 et  $\infty$  doivent être des relations un-un lorsque limités à une famille unique. (...)  
 (3) Le produit relatif de deux rapports appliqués doit être égal au produit arithmétique des rapports purs avec leur champ limité, i.e. si  $X, Y$  sont des rationnels (*ratios*), nous devons avoir :

$$X \uparrow \kappa \mid Y \downarrow \kappa = (X \times Y) \downarrow \kappa$$

ou  $X \uparrow \kappa_i \mid Y \downarrow \kappa_i = (X \times Y) \downarrow \kappa_i$ .

Ce qui revient à demander que deux tiers de la moitié d'une livre de fromage corresponde à  $(2/3 \times 1/2)$  d'une pound de fromage ; et similairement dans n'importe quel autre cas. (...)

- (4) Si  $X, Y$  sont des rationnels (*ratios*), et  $T$  est un membre de la famille  $\kappa$ , nous devons avoir

$$(X \uparrow \kappa' T) \mid (Y \downarrow \kappa' T) = (X + Y) \downarrow \kappa' T,$$

c'est-à-dire deux tiers d'un pound de fromage pris avec la moitié d'une pound de fromage doivent correspondre à  $(2/3 + 1/2)$  d'une livre de fromage, et similairement dans n'importe quel autre cas (...).<sup>1</sup>

Les deux premières conditions visent à garantir l'existence d'une bijection entre une partie de  $\kappa$  et  $\mathbb{Q}^{+*}$  ; les deux dernières garantissent la compatibilité entre les opérations arithmétiques et le produit relationnel.

Considérons d'abord les deux premières conditions. Comme je l'ai noté *supra.*, rien, au niveau des définitions, n'interdit que deux rationnels  $p$  et  $q$  soient tels que,  $R$  et  $S$  étant des relations (et même des vecteurs d'une même famille)<sup>2</sup>,  $RpS$  et  $RqS$ . La condition (1) interdit que ce soit le cas ; elle demande que, à un couple quelconque de vecteurs, soit associé au plus un rationnel. Dit autrement,  $S$  étant fixée, si  $R$  est une relation qui a un rapport rationnel à  $S$ , alors ce nombre est unique, et peut être noté, en réutilisant la notation liée au corrélateur<sup>3</sup>,  $A_S(R)$ . La condition (1) établit donc que la relation  $A_S$  de mesure des vecteurs de  $\kappa$  selon l'unité  $S$ , dont le domaine est une partie de  $\kappa$  et le codomaine est une partie  $\mathbb{Q}^{+*}$ , est *many-one*. La clause (2) revient à dire que, dans une famille mesurable, la relation  $A_S$  (quelle que soit  $S$ ) est une application injective (une relation un-un) et que son codomaine est  $\mathbb{Q}^{+*}$  tout entier<sup>4</sup>. Cette condition est très forte : elle implique que tout multiple rationnel du vecteur  $S$  existe, mais elle implique également qu'un tel multiple est unique : si  $A_S(R) = p$  et  $A_S(T) = p$ , c'est que  $R=T$ .

Les conditions (1) et (2) prises ensemble entraînent que, quel que soit le vecteur unité  $S$  choisi, la relation  $A_S$ , définie sur une partie de  $\kappa$  vers  $\mathbb{Q}^{+*}$ , est bijective. L'unité étant choisie, il y a donc un et un seul élément de  $\kappa$  qui correspond à chaque rationnel positif non nul. En liant ainsi le concept de mesure au choix d'une unité vectorielle, Russell et Whitehead placent la mesure des grandeurs extensives, unique à un facteur multiplicatif près, au centre de leur *theory of measurement*. Comme nous le verrons dans le chapitre 6, cette limitation restreint

<sup>1</sup> La barre verticale «  $\mid$  » dénote le produit relationnel.  $X \uparrow \kappa$  est la restriction de la relation  $X$  à  $\kappa$  ;  $X \uparrow \kappa' T$  doit se lire comme l'application de  $X \uparrow \kappa$  à  $T$ , c'est-à-dire  $X \uparrow \kappa' T$  est une relation  $R$  de  $\kappa$  telle que  $RXT$ . Dit autrement, la condition (4) peut se lire de cette manière :  $RXT \wedge SYT \Leftrightarrow (R \mid S)(X+Y)T$ . Par rationnel, il faut ici entendre rationnel positif.

<sup>2</sup> Il est sous-entendu que ni  $R$  ni  $S$  n'est égal au vecteur identité.

<sup>3</sup> Attention : le « corrélateur » était plus haut appliqué à l'ensemble de base  $\alpha$  et il avait pour valeur des vecteurs de  $\kappa$  ; il prend maintenant pour argument des vecteurs  $\kappa$  et a pour valeur des rationnels. Mais la définition du corrélateur  $A_\alpha$  donné en \*336.02 s'applique aux deux cas, et les auteurs mentionnent, en introduisant la notation en \*336 (393-394) que le concept sera utilisé de cette seconde manière.

<sup>4</sup> Le point concernant le codomaine est immédiat : si tous les rationnels sont des relations un-un, alors quelque soit  $p$  appartenant à  $\mathbb{Q}^{+*}$ , il existe une relation  $R$  de  $\kappa$  telle que  $RpS$ , ou encore telle que  $A_S(R) = p$ .

d'emblée la portée de leur analyse – de nombreux systèmes de mesure échappent aujourd'hui à ce schéma. Cette option est toutefois cohérente avec le but immédiat de leur développement : développer une théorie de la distance (au sens de Russell 1900b) applicable aux grandeurs géométriques. De plus, elle n'est que provisoire, puisque dans la section D, une autre définition de la mesure sera proposée.

Un point mérite une mention particulière. Russell et Whitehead prennent le soin d'exiger que  $A_S$  soit bijective (*one-one*), et non pas seulement injective (*many-one*). Ils excluent donc le cas où plusieurs vecteurs, plusieurs grandeurs, possèdent la même mesure. Ceci doit être lié à la distinction entre quantités et grandeurs ; plusieurs quantités (ici plusieurs couples d'éléments de  $\alpha$ ) peuvent avoir la même grandeur (être lié par le même vecteur), et avoir, de ce fait, la même mesure ; mais, pour Russell et Whitehead, la mesure s'applique directement aux grandeurs (aux vecteurs), non aux quantités (aux couples d'éléments de  $\alpha$ ) ;  $A_S$  ne peut donc pas pour eux être *many-one*, elle est nécessairement *one-one*. Ce canevas, dans la mesure où il dépend de la possibilité de partitionner  $\alpha \times \alpha$  en classes d'équivalence (en classe de « quantités égales »), fait toutefois difficulté. Nous avons montré en effet que lorsqu'une famille n'est pas connectée, le rapport entre éléments de  $\alpha \times \alpha$  et vecteurs de  $\kappa$  ne permet pas l'usage de la distinction quantité / grandeur des *Principles* ; que se passe-t-il alors au niveau de la relation de mesure lorsque tel est le cas ? En réalité, la question ne se pose pas dans les *Principia*. Russell et Whitehead montrent, en \*350.44 et \*350.5, que, lorsque les familles sont connectées et ouvertes, alors les deux premières conditions (1) et (2) sont satisfaites ; dans la suite du texte, ils limitent leurs remarques à ce genre de cas. Russell et Whitehead se placent donc d'emblée dans une situation (celle des familles ouvertes connectées) où à la fois le réquisit concernant la possibilité d'user le couple de notions quantité / grandeur et celui concernant la bijectivité de la relation  $A_S$  sont satisfaits<sup>1</sup>.

Les deux premières conditions ne suffisent cependant pas à définir une mesure ; d'autres contraintes, ayant trait à la compatibilité entre les opérations arithmétiques et le produit relationnel, doivent être posées. La demande (3) a trait au changement d'unité. On peut l'énoncer de cette manière,  $R$ ,  $S$  et  $T$  étant des vecteurs de  $\kappa$  non égaux à l'identité :

$$(3) \quad A_T(R) = A_S(R) \times A_T(S)$$

En français : la mesure de  $R$  selon l'unité  $T$  doit être égale au produit de la mesure de  $R$  selon l'unité  $S$  par la mesure de  $S$  selon l'unité  $T$ . Cette stipulation explicite le rôle que doit jouer l'unité dans un système extensif – il rend notamment visible le fait qu'un changement d'unité (ici de l'unité  $S$  par l'unité  $T$ ) se traduit par la multiplication des mesures par un facteur commun (ici :  $A_T(S)$ ). La dernière condition est plus intéressante : elle demande que la relation  $A_S$  soit un isomorphisme entre une partie de  $\langle \kappa, | \rangle$ , et  $\langle \mathbb{Q}^{+*}, + \rangle$ . En effet (traduit dans la terminologie plus lisible de la fonction de mesure selon l'unité  $S$ ), (4) revient à exiger que la mesure de la composition de deux vecteurs soit l'addition de leur mesure :

$$(4) \quad A_S(T|R) = A_S(T) + A_S(R).$$

L'opération d'addition entre les mesures doit « refléter » au niveau arithmétique l'opération de produit relationnel.

Résumons. La mesure n'est pas ici seulement conçue comme une assignation univoque de nombres rationnels à des vecteurs, mais comme un morphisme, c'est-à-dire comme une association entre des nombres et des grandeurs qui préserve certaines propriétés algébriques

<sup>1</sup> Il n'est toutefois pas certain que l'on ne puisse pas trouver une famille non connectée qui satisfasse les conditions (1) et (2). Dans un tel cas, la signification de la relation de mesure selon l'unité  $S$  «  $A_S$  » deviendrait plus compliquée à interpréter.

des structures examinées. Comme on le verra (voir chapitre 6), on peut comparer les conditions posées ici avec les théorèmes de représentation mis au centre de la *theory of measurement* par Suppes et ses collaborateurs. Les conditions (1) et (2) des *Principia* demandent qu'il existe une bijection entre une partie de  $\kappa$  des grandeurs et  $\mathbb{Q}^{+*}$  et (ce qui est plus que ce qui est demandé par les théoriciens du *measurement*) ; la condition (4) revient à exiger l'existence d'un isomorphisme entre une partie de  $\kappa$  munie de l'opération produit et le modèle numérique  $\langle \mathbb{Q}^{+*}, + \rangle$ . Reste la condition (3), que l'on peut interpréter comme l'imposition de contrainte sur le type « d'unicité » que cet isomorphisme doit posséder : si deux isomorphismes de ce genre sont donnés, alors la mesure des vecteurs qui appartiennent aux domaines de l'un et de l'autre ne doivent différer qu'à un facteur multiplicatif près. Les quatre conditions posées par Russell et Whitehead correspondent ainsi à des réquisits définissant chez Suppes et *alii* une échelle de mesure extensive.

En \*351.31, Russell et Whitehead montrent que la condition (3) est satisfaite par les familles ouvertes connectées sous-multipliables, et ils prouvent, en \*351.43, que les familles ouvertes connectées sous-multipliables qui contiennent toutes les puissances de leurs membres satisfont la condition (4). Bien entendu, la réciproque n'est pas vraie : une famille mesurable (au sens où elle remplit les 4 conditions énumérées) n'est pas nécessairement ouvertes, connectées, sous-multipliables et telles qu'elle contient toutes les puissances de ses membres. Malgré tout, seule une famille ouverte peut satisfaire la demande (2), et donc la propriété de mesurabilité telle qu'énoncée au début de la section C. Cela pose immédiatement le problème de la mesure « des angles en un point, ou de la ligne droite elliptique » (457) – comme Russell l'avait déjà noté en 1900b et en 1903, ces sortes de grandeurs, même si elles ne forment pas de série ouverte, sont mesurables. Les auteurs des *Principia*, pour compléter leur première définition, doivent donc esquisser une nouvelle « théorie de la mesure applicable à des familles qui ne sont pas ouvertes » (*Ibid.*). C'est tout l'objet de la section D.

### III-2. Angles et familles closes

En 1900 et 1903, Russell définissait les « séries » closes comme des relations entre relations asymétriques – relations qui correspondaient à l'orientation des demi-droites affines d'un faisceau ponctuel (voir chapitre 1). La formalisation mise en place en 1913 est complètement différente : les éléments de la famille vectorielle correspondant à un faisceau de droites sont des angles, c'est-à-dire les relations entre les demi-droites. Dans les *Principia*, l'ensemble de base  $\alpha$  est constitué des droites orientées du faisceau, et les vecteurs de  $\kappa$  sont les relations (les angles) entre ces demi-droites. Un vecteur (un angle) quelconque  $\theta$  est donc ici identique à tous les vecteurs que l'on obtient en le composant avec une quelconque puissance entière du vecteur dont la mesure est  $2\pi$ . Deux vecteurs auront donc nécessairement plusieurs rapports. Russell et Whitehead prennent l'exemple des vecteurs  $\pi/2$  et  $\pi$ , dont le rapport est n'importe quel nombre de la forme  $(4n+1)/(4m+1)$ ,  $n$  et  $m$  appartenant à  $\mathbb{N}^1$ . De plus, un même rapport ne sera jamais une relation un-un sur  $\kappa$ . Si le rationnel  $1/2$  relie  $\pi/2$  et  $\pi$ , il relie également  $\pi/2$  à  $3\pi$ , par exemple. Les angles fournissent donc l'exemple d'une grandeur pour laquelle les conditions (1) et (2) de la liste établie au début de la section C ne sont pas satisfaites. Pour contourner la difficulté, les logiciens vont introduire une nouvelle définition des nombres rationnels.

Bien entendu, Russell et Whitehead ne prennent pas directement pour objet le cas des angles. Comme pour les longueurs, ils généralisent la structure, et étendent leur construction à toutes les familles dites « cycliques ». Trois propriétés<sup>2</sup> définissent une famille cyclique  $\kappa$  :

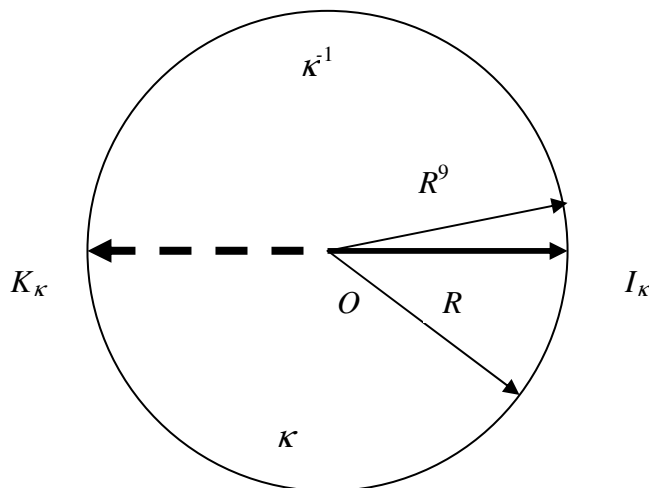
<sup>1</sup> Voir 1913, 457. Il y a, semble-t-il, une erreur dans le texte.

<sup>2</sup> Pour éviter des exceptions triviales, les auteurs ajoutent une quatrième contrainte portant sur la cardinalité de  $\kappa$

- 1)  $\kappa$  doit être connecté ;
- 2)  $\kappa$  doit contenir un membre non nul identique à sa réciproque (ce qui correspond au cas du vecteur  $\pi$  pour les angles principaux), nommé  $K_\kappa$  ;
- 3) la relation  $U_\kappa^1$  doit être transitive.

Une famille cyclique  $\kappa$  est la généralisation du demi-cercle  $[0, \pi]$ , et la relation  $U_\kappa$  de la relation « être strictement plus grand que » sur  $]0, \pi]$ . Russell et Whitehead remarquent que l'on peut facilement, à partir de la relation  $U_\kappa$ , introduire un ordre  $W_\kappa$  sur  $\kappa_l = \kappa \cup \kappa^1$  – qui correspond, en revenant à l'interprétation attendue de la structure, à celle d'être « strictement plus grand que » sur le cercle  $]0, 2\pi]$ .

Pour retrouver un substitut aux conditions (1) et (2) de la section C, les auteurs s'attachent à définir ce qui correspond aux « racines  $n^{\text{ème}}$  de l'unité ». L'idée clé est de s'appuyer sur la relation d'ordre  $W_\kappa$ . Russell et Whitehead commencent (\*372) par définir la classe des vecteurs dont la  $n^{\text{ème}}$  puissance ( $n$  entier, supérieur à 1) ne fait pas plus d'une révolution complète. Soit  $R$  un vecteur non nul ;  $R^{n+1}$  effectue plus d'une révolution complète la première fois que  $R^n WR^{n+1}$ , c'est-à-dire la première fois que  $R^n$  appartient au demi-cercle supérieur, et que  $R^{n+1}$  appartient au demi-cercle inférieur (voir fig. 1). La classe des relations  $R$  telle que  $R^n$  n'est pas plus grande qu'une révolution est désignée par  $n_\kappa$  – j'ai représenté sur la figure le cas où  $R \in 9_\kappa$ , mais où  $R \notin 10_\kappa$ .



La relation  $W_\kappa$  ordonne les angles du cercle  $O$  dans le sens indirect.  $R$  est un élément (angle) de  $\kappa$ ; on voit que  $R$  appartient à  $9_\kappa$  mais pas à  $10_\kappa$ .

Russell et Whitehead montrent que si  $P, Q \in n_\kappa$ , alors  $P^n = Q^n \Leftrightarrow P = Q$ . Ils prouvent ensuite (\*373) que, si  $\kappa$  est cyclique et sous-multipliable, alors, quelque soit  $n \geq 2$ , il existe un vecteur  $V$  dans  $\kappa$  non nul (non identique à  $I_\kappa$ ) tel que  $V^n = I_\kappa$ . L'ensemble des racines  $n^{\text{ème}}$  racines de l'unité est désigné par  $(I_\kappa, n)$ , et les auteurs montrent que la cardinalité de  $(I_\kappa, n)$  est  $n$ . La plus petite racine, i.e. le plus petit élément de  $(I_\kappa, n)$ , est nommée racine principale ; il est démontré que cette racine est la seule qui appartienne à  $n_\kappa$ . Russell et Whitehead étendent alors (\*374) leurs résultats aux racines  $n^{\text{ème}}$  d'un vecteur quelconque  $R$  de  $\kappa \cup \kappa^1$  en prouvant qu'« il y a un unique membre de  $n_\kappa$  dont la  $n^{\text{ème}}$  puissance est  $R$  » (461). Cet élément est le «  $n^{\text{ème}}$  sous-

<sup>1</sup> Je rappelle que la relation  $U_\kappa$  est définie comme la relation qu'ont deux éléments  $R$  et  $S$  de  $\kappa$  s'il existe un point  $x$  de  $\alpha$  tel que  $(R \cdot x)(S \cdot x)$  (ou encore, tel qu'il existe un vecteur de  $\kappa$  non égal à l'identité, pouvant nous mener de  $R \cdot x$  à  $S \cdot x$ ).

multiple principal de  $R$  ». Enfin (\*375), les auteurs définissent le « *principal ratio* » entre deux relations  $R$  et  $S$  :  $R$  et  $S$  sont liés par le rapport principal  $m/n$  si et seulement si il existe un vecteur  $T$  appartenant à  $m_\kappa \cap n_\kappa$  tel que  $R=T^n$  et  $S=T^m$ , c'est-à-dire s'il existe un  $n^{\text{ème}}$  sous-multiple principal de  $R$  qui soit aussi un  $m^{\text{ème}}$  sous-multiple principal de  $S$ . Russell et Whitehead désignent le « *principal ratio* » correspondant au « *ratio* »  $m/n$  par  $(m/n)_\kappa$  et montrent que les rapports principaux sont à la fois mutuellement exclusifs (i.e. que deux relations ne peuvent avoir plusieurs rapports principaux) et des applications injectives sur  $\kappa$  – bref, que les conditions (1) et (2) de la section B s'appliquent à ce nouveau genre de *ratios*. Il aurait fallu vérifier que les rapports principaux satisfont les conditions de compatibilité (3) et (4). C'est bien le cas, affirment les auteurs, qui ne prennent toutefois pas la peine de le montrer, car « à partir de ce point, tout procède comme dans le cas des familles ouvertes » (461).

La stratégie globale de cette section est donc claire. Pour restaurer l'univocité nécessaire à la mesure dans le cas des structures cycliques comme les angles (i.e. pour restaurer les conditions (1) et (2)), il est nécessaire de définir le concept de sous-multiple principal d'un vecteur, et de reformuler complètement le concept de *ratio*. Ces manœuvres ne sont pas en elles-mêmes d'un grand intérêt mathématique. Il s'agit seulement de constituer une théorie des rapports pour les angles, conçus comme grandeurs<sup>1</sup>. L'importance de la section vient en réalité d'ailleurs – du fait que, pour restaurer les conditions (1) et (2), les auteurs n'hésitent pas à revenir sur des concepts définis antérieurement. La notion de sous-multiple, définie dans la section C, est ainsi remplacée par le concept de sous-multiple principal. Plus surprenant, les nombres rationnels de la section D ne correspondent pas aux rationnels définis dans l'alinéa \*303 de la section A. En effet, dans la section D, deux relations ont le rapport  $m/n$ , non pas quand (pour faire vite) il existe un vecteur à la fois  $n^{\text{ème}}$  multiple de la première et  $m^{\text{ème}}$  multiple de la seconde, mais quand il existe un vecteur à la fois  $m^{\text{ème}}$  sous-multiple principal de la première et  $n^{\text{ème}}$  sous-multiple principal de la seconde. L'ampleur de ce changement est considérable<sup>2</sup> : pour ajuster la théorie de la mesure au cas cyclique, Russell et Whitehead vont jusqu'à modifier leur théorie des nombres rationnels !

Ce point démontre de façon spectaculaire qu'il ne faut pas trop rigidifier les différentes composantes de *Principia* VI. Certes, officiellement, la théorie du *measurement* n'est qu'une application des conceptions développées dans les sections A et B (voir le schéma plus haut). Mais en réalité, l'architecture de la partie VI est plus subtile. Les théories des nombres rationnels et réels ainsi que celles des familles de vecteurs (des grandeurs) sont très bien adaptés au développement de la section C (la doctrine de la mesure dans les familles ouvertes). Lorsque l'on considère d'autres types de grandeurs, et donc d'autres types de mesures, alors il n'est pas interdit de modifier certains développements de ces deux blocs théoriques. Ainsi, si on voulait suivre Russell et Whitehead jusqu'au bout, il faudrait sans doute soutenir qu'il y a différentes sortes de rationnels ; certes, les rationnels définis en termes de multiples (section A), comme ceux définis en termes de sous-multiples (section D), ont les mêmes propriétés arithmétiques (ordinales et algébriques)<sup>3</sup> – ils n'en demeurerent pas moins « ontologiquement » différents, et cette différence se révèle dans leurs aptitudes plus ou moins grandes à être appliqués dans tel ou tel contexte. Il y a ainsi une très grande souplesse dans le dispositif mis en place dans cette partie VI. Officiellement, la théorie des nombres rationnels et réels précède celle de la mesure des grandeurs – et je montrerai dans le chapitre 5 à quel

<sup>1</sup> On trouve dans les lettres que Whitehead envoie à Russell beaucoup de remarques qui suggèrent que Whitehead projetait d'inclure dans cette partie sur la quantité une théorie des complexes. Même s'il ne dit rien de sa construction, il est naturel de supposer que Whitehead pensait associer au module d'un complexe un vecteur d'une famille ouverte, et à l'argument, un vecteur d'une famille cyclique. Les sections C et D auraient ainsi été les deux piliers de la théorie des complexes.

<sup>2</sup> Le point est important aussi d'un point de vue historique : N. Wiener reprend dans ses travaux cette définition des rationnels. Voir *infra*, chap. 6.

<sup>3</sup> Il faudrait le prouver, ce que Russell et Whitehead ne font pas.



point cette idée est forte et importante. Mais en même temps, cette priorité logique n'interdit pas la possibilité de réviser nos concepts numériques pour expliquer leur rôle dans la mesure d'une structure de grandeur particulière. Je reviendrai rapidement sur ce point dans le chapitre 6, en grande partie consacrée à une comparaison entre l'approche des *Principia* et celle de la *Theory of Measurement*.

### III-3. Les réseaux rationnels

Revenons à la section C. Les conditions (1)-(4) n'évoquent que la mesure des vecteurs par des rationnels. Comment Russell et Whitehead étendent-ils leur approche au cas réel ? Pour le comprendre, il faut entrer dans le détail du développement de la section C.

Russell et Whitehead commencent (\*352) par définir les multiples rationnels d'un vecteur donné  $T$  non nul appartenant à une famille  $\kappa$  ouverte et connectée. L'ensemble de ces vecteurs est immédiatement ordonné par leurs mesures, et l'ensemble ordonné des vecteurs de  $\kappa$  multiples rationnels de  $T$  est noté  $T_\kappa$ .  $T_\kappa$  est donc une série, non pas seulement un ensemble. Lorsque  $\kappa$  est sériel, alors  $T_\kappa$  est la réciproque de la restriction de  $U_\kappa$  à la classe des multiples de  $T$  dans  $\kappa$  (\*352.72) – ce résultat est très important car il intervient de façon cruciale dans la définition de la mesure réelle. Autre point notable : si  $S$  est un  $\kappa$ -multiple rationnel de  $T$ , alors  $T_\kappa = S_\kappa$  : l'ensemble des  $\kappa$ -multiples rationnels et l'ordre induit sur lui par les mesures est invariant par changement d'unité (lorsque les unités considérées appartiennent aux dits ensembles). Les auteurs se penchent ensuite sur la notion de famille rationnelle (\*353) : une famille est rationnelle lorsque tous ses éléments sont des multiples positifs rationnels d'un de ses membres. Si la famille  $\kappa$ , rationnelle, est connectée, alors elle est close pour l'opération produit relationnel, et elle est transitive. Si, de plus,  $\kappa$  est sériel et sous-multipliable,  $U_\kappa$  est isomorphe à  $\langle \mathbb{Q}^{+*}, > \rangle$ .

Russell et Whitehead en viennent alors (\*354) au concept de « *rational nets* », i.e. de réseaux rationnel, qu'ils lient explicitement au problème de l'introduction des coordonnées en géométrie. Rapidement dit, « un réseau rationnel est obtenu à partir d'une famille donnée (...) en sélectionnant les vecteurs (de cette famille) qui sont les multiples rationnels d'un vecteur donné, et en limitant ensuite leurs champs aux points qui peuvent être atteints par leur moyen à partir d'un point donné » (1913, 409). Autrement dit, pour définir un réseau rationnel, il faut commencer par construire  $T_\kappa$  à partir d'un vecteur  $T$  d'une famille  $\kappa$ . La famille que constitue le champ de  $T_\kappa$  (noté  $C'T_\kappa$ )<sup>1</sup> n'est généralement pas connectée ; en effet, dans le cas général, quel que soit le point de  $\alpha$  pris pour origine, certains points de  $\alpha$  ne sont pas accessibles par des vecteurs de  $C'T_\kappa$  ou par les converses de ses vecteurs. Prenons comme exemple la droite euclidienne d'origine arbitraire  $a$ , et considérons toutes les transformations qui sont les multiples rationnels (positifs et négatifs) d'une translation unité arbitraire  $I$  ; seuls les points de coordonnées rationnelles seront atteints par les transformations du point  $a$  ; aucun point de coordonnée irrationnelle ne sera accessible par ce dispositif. Russell et Whitehead définissent alors  $A_a \text{ `` } (C'T_\kappa)_i$  comme l'ensemble des points accessibles de  $a$ , soit par un vecteurs de  $T_\kappa$ , soit par l'inverse d'un de ces vecteurs (l'ensemble des points rationnels relativement à l'unité  $T$  et l'origine  $a$ )<sup>2</sup>. Pour extraire une famille de multiples rationnels connectée, il faut restreindre le champ des vecteurs de  $C'T_\kappa$  à  $A_a \text{ `` } (C'T_\kappa)_i$ . Le réseau rationnel est la structure qui résulte de ce double mouvement : définition des  $\kappa$ -multiples d'un vecteur, restriction de leurs champs. Noté  $cx_a \text{ `` } C'T_\kappa$ , le réseau rationnel dépend bien entendu de  $\kappa$  ; mais aussi de  $T$ , son unité, et de  $a$  (son origine). Il est facile de voir que si  $b \in A_a \text{ `` } (C'T_\kappa)_i$ , alors  $cx_a \text{ `` } C'T_\kappa =$

<sup>1</sup> Rappelons que  $T_\kappa$  n'est pas une famille, mais une relation d'ordre.

<sup>2</sup> La double apostrophe inversée  $R \text{ `` } \alpha$  désigne l'ensemble des images par  $R$  de  $\alpha$ . Le iota final indique que non seulement les vecteurs de  $T_\kappa$ , mais aussi leurs inverses, sont considérés.

$cx_b'C'T_\kappa$ . Dans le reste de la section (\*354), Russell et Whitehead mettent en relation les propriétés des familles vectorielles et celles des réseaux rationnels extraits, c'est-à-dire esquissent une théorie des relations entre  $\kappa$  et  $cx_a'C'T_\kappa$ . Ils montrent ainsi que si  $\kappa$  est ouverte, connectée et close pour l'opération produit relationnel, et si  $a$  est un point connecté, alors  $cx_a'C'T_\kappa$  est une famille très « régulière » : rationnelle (par définition), ouverte, connectée (avec  $a$  comme point connecté), close, transitive et asymétrique.

Il est important de mesurer l'abstraction (et la difficulté) de la question :  $\kappa$  peut être ici n'importe quelle famille et  $T_\kappa$  n'importe quelle famille rationnelle extraite de  $\kappa$ . Malgré cette abstraction, le contexte d'origine de ces développements est clair : Russell et Whitehead sont ici en train de généraliser la question, centrale à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, de l'introduction des coordonnées. Comme on a eu déjà l'occasion de le noter, les procédures utilisées pour résoudre le problème étaient en effet, toujours les mêmes : recouvrir l'axe choisi d'une échelle de points de plus en plus denses, puis définir les coordonnées des points « restants » par des procédures de passages à la limite – l'étape clé étant toujours celle qui correspond, dans les *Principia*, à la définition d'un réseau rationnel. Dans le paragraphe \*354, la question est cependant reformulée sans qu'aucune hypothèse sur le cadre géométrique sous-jacent ne soit explicitée. Tous les concepts géométriques sont ici retraduits dans le cadre de la théorie des familles de vecteurs : l'ensemble  $\alpha$  généralise la droite à coordonner, la famille  $\kappa$  généralise la classe des transformations définies sur la droite,  $T_\kappa$  celle des transformations utilisées pour élaborer le réseau,  $A_a'(C'T_\kappa)_i$  les points du réseau engendrés par l'application des précédentes transformations à un point  $a$ , enfin la famille  $cx_a'C'T_\kappa$  est une généralisation du réseau lui-même. La construction élaborée dans les *Principia* apparaît donc comme une généralisation extrême de la théorie classique de l'introduction des coordonnées dans un espace.

Une fois le concept de réseau rationnel défini, Russell et Whitehead passent (\*356) au cas de la mesure par un réel. L'idée est la suivante : « si un ensemble donné de vecteurs, tous multiples rationnels d'un vecteur donné  $R$ , a une limite relativement à  $U_\kappa$ , et si leurs mesures déterminent un segment (de  $\mathbb{Q}^{+*}$ ), alors nous considérons le nombre réel représenté par ce segment comme la mesure de la limite de l'ensemble donné de vecteurs. » (1913, 442). Ainsi, soit  $\kappa$  une famille sérielle,  $X$  un réel relationnel (c'est-à-dire l'union d'un segment de rationnels – voir section 1 *supra*. pages 120 *sq.*) ; l'ensemble des  $\kappa$ -multiples de  $T$  qui sont contenus dans  $X$  sera une famille rationnelle (j'appelle cette classe, l'ensemble des  $X$ -multiples de  $T$ ) ; le vecteur de coordonnée réelle  $X$  dans la famille  $\kappa$  ( $T$  étant l'unité) sera défini comme étant la plus grande borne inférieure de l'ensemble des  $X$ -multiples de  $T$  lorsque cet ensemble est ordonné par la relation  $U_\kappa$ . Ici, le point décisif est que lorsque  $\kappa$  est sériel, l'ordre induit par les mesures sur la classe des multiples rationnels est identique à l'inverse de la restriction de  $U_\kappa$  à cette famille. Lorsque le segment correspondant au réel  $X$  n'a pas de maximum, la plus grande limite de la classe des  $X$  multiples de  $T$ , ordonnée par les mesures, des vecteurs n'existe pas (puisque  $X$  correspond, dans ce cas, à un irrationnel). Mais il peut arriver<sup>1</sup>, notamment si  $\kappa$  est semi-dedekindien, que cette limite existe dans  $U_\kappa^{-1}$  ; la limite sera alors le vecteur de mesure irrationnelle  $X$ .

Russell et Whitehead prouvent ensuite que, lorsque  $\kappa$  est sériel, sous-multipliable et semi-dedekindien, les quatre propriétés essentielles du *measurement*, répertoriées au début de la section C, sont satisfaites par les mesures réelles – notamment, si  $X_\kappa$  et  $Y_\kappa$  sont deux rapports réels appliqués à la même famille, on a  $X_\kappa | Y_\kappa = (X \times Y)_\kappa$  et  $(X_\kappa R) | (Y_\kappa R) = (X + Y)_\kappa R$ . Ils prouvent également que l'extension donnée à la mesure est « conservative », au sens où, lorsque la mesure d'un vecteur de  $\kappa$  est égale à un rationnel  $p$ , alors la nouvelle définition de

<sup>1</sup> Les auteurs insistent sur le fait que « c'est l'existence d'une série indépendante  $U_\kappa$ , non engendrée par l'opération de mesure, qui rend possible l'application des irrationnels comme mesures. » (1913, 442).

la mesure (\*356) donne, comme mesure du même vecteur, le réel correspondant à  $p$ . Russell et Whitehead « excusent » ainsi la confusion constante entre un rationnel et le réel correspondant, dénoncée avec force dans les *Principles* : « bien que le nombre réel « pur » (somme du segment déterminé par le rationnel  $X$ ) ne soit pas identique au rationnel « pur »  $X$ , le nombre réel « appliqué » (correspondant au précédent nombre réel « pur ») *est* identique au rationnel « appliqué »  $X \uparrow \kappa$  » ; c'est pour cela, ajoutent-ils, que la « confusion habituelle entre un rationnel et un nombre réel rationnel n'a pas été plus désastreuse. » (1913, 445).

Si j'ai cru bon d'entrer dans le détail de l'organisation de la section C, c'est parce qu'elle donne certaines clés pour comprendre l'ensemble de la partie VI. On l'a vu, Russell et Whitehead, lorsqu'ils ont à donner les raisons d'être de tels ou tels développements, renvoient en effet systématiquement à cette section. Or, que trouve-t-on dans la section C ? Une définition de la mesure articulée à une théorie des réseaux rationnels. Le paragraphe \*354 occupe de ce point de vue une place centrale : il fait le lien entre la doctrine de la grandeur et la problématique mathématique de l'introduction des coordonnées. La section \*354 permet donc de réinterpréter la totalité des constructions russelliano-whiteheadiennes comme le résultat d'une volonté de généraliser les procédures de coordination (procédures, qui, on l'a déjà dit, occupent une place centrale chez Russell dès l'*Essay* et dans toute la réflexion autour de la quantité à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle), de les abstraire de leurs contextes géométriques particuliers. La section A redéfinirait ainsi les nombres de façon à faciliter leur introduction en tant que coordonnées (comme exposants de relations) ; la section B généraliserait le cadre géométrique hérité de la théorie projective (la terminologie même des « familles de vecteurs » manifeste la prégnance du modèle géométrique) ; enfin, les premiers alinéas de la section C définiraient ce qu'il faut entendre par « introduction de coordonnées » (ici « *measurement* ») en termes de morphismes, et la suite de la section C montrerait comment les coordonnées rationnelles puis réelles peuvent être introduites dans ce cadre général<sup>1</sup>. La section \*354 constituerait donc à la fois l'apex et la clé de voûte de toute la partie VI<sup>2</sup>.

## Conclusion

Il n'est sans doute pas inutile de résumer les grands traits de la théorie, très articulée, mise en place dans la partie VI des *Principia*. Quatre points peuvent être distingués :

1) Si les nombres rationnels comme les nombres réels sont définis en termes de relations entre relations, c'est-à-dire en termes de rapports, leurs propriétés arithmétiques (i.e. algébriques et ordinales) sont complètement indépendantes de la structure des termes (relationnels) auxquels ils sont appliqués. Ce point, on le verra dans le prochain chapitre, est philosophiquement crucial ; il signifie que la définition « euclidienne » adoptée ici garantit le caractère logique, non empirique, de la théorie des rationnels et des réels.

2) La théorie des grandeurs développée dans la section B, si elle conserve la distinction entre trois niveaux (ensemble de base  $\alpha$ , ensemble  $\kappa$  de relations, propriétés de  $\kappa$ ), est très générale. Elle n'est plus, comme c'était le cas en 1900b, un simple décalque des propriétés des distances linéaires. Dans le nouveau dispositif, les contraintes posées sur les relations et le

<sup>1</sup> Certes, lorsque l'on se penche en détail sur leurs développements, Russell et Whitehead se restreignent bien souvent aux cas les plus simples en faisant des hypothèses très fortes sur les familles vectorielles qu'ils manipulent. Mais il n'en demeure pas moins que leur cadre reste extrêmement abstrait : il est purement relationnel, et les concepts directeurs ne sont plus tirés d'un paradigme algébrique (théorie des groupes) ou géométrique (continuité) préexistants ailleurs.

<sup>2</sup> D'un point de vue mathématique, l'idée de faire une théorie générale de l'introduction des coordonnées sera, en un sens, développée par Veblen & Young 1910, 141-168. Mais à la fois les méthodes utilisés et les buts poursuivis sont, ici et là, très différents. Sur Veblen & Young, 1910, voir Nabonnand 2008, 239-240.

produit relationnel de la famille  $\kappa$  joue le rôle structurant. En parallèle, plus aucune référence n'est faite à des grandeurs qui ne seraient pas relationnelles – Russell et Whitehead évoquent même la possibilité de concevoir tous les types de grandeurs comme des familles vectorielles.

3) Cette généralité accrue conduit à poser en nouveaux termes la question de la mesure des quantités. En 1900b, les distances étaient des grandeurs mesurables ; en 1913, seules certaines familles vectorielles, très particulières, le sont. La théorie de la mesure s'autonomise donc par rapport à la théorie des grandeurs relations. Elle reste cependant seconde et dérivée par rapport à la première : il est nécessaire, avant de définir le concept de mesure, de savoir quel type de grandeur on cherche à mesurer. On le verra, ce trait éloigne la doctrine des *Principia* de la théorie du *measurement* aujourd'hui standard.

4) Malgré la généralité du propos, l'effort de Russell et de Whitehead reste sous-tendu par le paradigme géométrique de l'introduction de coordonnées sur la droite projective, comme le montre les développements finaux de la section C.

Les trois premiers points, surtout, sont philosophiquement très riches. Mais Russell et Whitehead, dans les *Principia*, restent extrêmement prudents, et n'exploitent pas les belles intuitions qui sous-tendent leurs constructions. Dans les deux prochains chapitres, je vais tenter de donner corps à ce qui est resté en germe dans cette partie des *Principia*. Je vais d'abord m'intéresser, dans le chapitre 5, à l'articulation, extrêmement fine, entre nombres et grandeurs. Je soutiendrai que le dispositif mis en place par Russell et Whitehead permet d'enrichir et de complexifier les discussions autour de l'« *Application Constraint* », suscitées récemment par l'extension du programme néo-logiciste aux nombres réels. Je me pencherai ensuite, dans le chapitre 6, sur la théorie de la grandeur et de la mesure. Je me servirai de la théorie de Russell et Whitehead pour critiquer l'approche développée par P. Suppes et ses collaborateurs. Cela me fournira l'occasion de parler des prolongements donnés par le mathématicien N. Wiener à la doctrine des *Principia*.

## Chapitre 5

### Grandeurs et relations : une défense de l'*Application Constraint*.

#### Introduction

Dans les *Principia*, Russell et Whitehead ne se départissent pas d'une certaine prudence métaphysique, consistant à afficher une indépendance et une neutralité vis-à-vis de toute conception philosophique ou métaphysique. Ainsi, la notion d'individu est laissée sans détermination pour ne pas avoir à trancher entre platonisme et rationalisme critique<sup>1</sup> – ainsi, également l'axiome de l'infini n'est utilisé qu'avec parcimonie, afin de ménager la possibilité du monisme<sup>2</sup>. Cette neutralité, qui se justifie pleinement eu égard au projet, purement technique, de dériver l'ensemble des mathématiques à partir de principes logiques, empêche néanmoins Russell et Whitehead de dégager le potentiel philosophique de leurs constructions. C'est particulièrement le cas dans *Principia* VI : la doctrine du nombre et de la grandeur, qui se présente également comme une théorie de la mesure, croise en effet des questions encore aujourd'hui fort discutées comme l'articulation entre mathématiques et physique, la nature de la quantité, etc..., et se prête particulièrement bien à des développements plus franchement métaphysiques ou ontologiques. Le but des deux prochains chapitres est de montrer que les idées exprimées par Russell et Whitehead en 1913 ont encore aujourd'hui une certaine forme d'actualité philosophique.

Les développements qui suivent ne seront donc plus centrés sur les *Principia* ; ils confronteront les thèses logicistes à certaines discussions contemporaines en philosophie « analytique ». Dans le chapitre 5, je vais surtout m'attacher à l'idée selon laquelle les grandeurs doivent être conçues comme des relations. Cette thèse n'a pas été complètement oubliée au XX<sup>ème</sup> siècle. Elle a été reprise à la fin des années 80s par J. Bigelow et R. Pargetter pour défendre une des nombreuses variantes de la conception réaliste, post-armstrongienne, des universaux. Je vais dans un premier moment examiner la théorie de Bigelow et Pargetter. Je me tournerai ensuite vers la tentative récente (datant des années

---

<sup>1</sup> La lettre de Whitehead à Russell du 16/06/1907 exprime particulièrement bien ce souci. Je vais en citer un long extrait (le déchiffrement est difficile et je préfère laisser le texte en anglais) : "But the keystone of the theory is that there is a definite determinate class of individuals and that all other entities are emanated from them. This may be true – but in view of the fate of all metaphysical doctrines in the past, I also observe that it may not be true. (...) But it is not possible that there is no such a thing as a determinate class of individuals at all? Then individuals would go the way of all other entities, and would be phantasms arising from the complex whole of being as the result of a special procedure of thought – different procedures giving different individuals – also all thought requiring at least potential inchoate preliminary determination of individuals, merely for the purpose of that procedure of thought. Thus it seems to me possible that all formal logic should require (1) a determination of individuals, special to that particular procedure of thought; and that then your whole scheme comes in as the logical scheme – or form of thought – relatively to that determination. (...)

Given an initial determination of individuals, the entities of higher type have only a derivative being, and (b) is necessarily true of them – for they are not entities except in relation to this proper specific use of them. But another determination of individuals may put them all on the same level again (...).

The above represents a bad lapse into a sort of pseudo-Kantianism, a revolt against the ultimate idea of 'things and relation between them' – namely an endeavour to run the idea that the concept of 'things and relations between them' represents a form imposed by thought on a complex whole.

I do not think that any of the doubts above would make any difference in the technique as suggested by you which seems to me to be nearly perfect. But I want the explanation to be as non-committal as possible and to point out its adaptability to widely divergent lines of thought. For after all philosophy finds formal logic as a going concern, and different philosophies only differ in giving different explanations of one and the same formal procedure. Anyhow now it is the time for us to emphasize our doubts, or feeling other possibilities. Don't bother to confute me in detail – the above is only a written to stir you up – not to waste your time."

<sup>2</sup> Russell & Whitehead 1910, 216-217.

2000) d'étendre le programme néo-fregéen à la construction des réels. Hale s'est inspiré de Frege pour proposer une définition des réels qui satisfait l'*Application Constraint*. Cette approche a été discutée, à la fois à l'extérieur du courant néo-fregéen, par S. Shapiro et V. Batitsky, et « en interne », par C. Wright. J'exposerai, dans la seconde section, à la fois le raisonnement de Hale et les critiques qui lui ont été adressées. Enfin, dans un dernier temps, je montrerai en quoi *Principia* VI permet de répondre à ces critiques et de donner un nouveau sens à l'*Application Constraint*.

## **I. Le réalisme relationnaliste australien.**

Les travaux de J. Bigelow et R. Pargetter s'inscrivent dans le sillage du réalisme scientifique de D. Armstrong. Bigelow et Pargetter partagent avec ce dernier à la fois le rejet du nominalisme conçu comme refus des universaux, et le souci (nominaliste, mais en un autre sens) de se débarrasser de toutes les entités abstraites, non spatio-temporelles. Ils reprennent également à leur compte l'idée que l'enquête métaphysique ne doit pas précéder, mais suivre l'analyse scientifique. Ce qui distingue Bigelow et Pargetter est toutefois la place qu'ils accordent aux relations. Alors que, chez Armstrong, l'emphasis est mise sur les propriétés, Bigelow et Pargetter élaborent une doctrine relationnelle des quantités, sur lesquelles ils fondent une théorie du nombre et des mathématiques comme science des universaux de second degré. C'est ce tour relationnel de leur construction qui les a conduits à utiliser la partie VI des *Principia*. Je vais d'abord présenter rapidement le contenu de « Quantities » (1988), repris dans le chapitre 2 de Bigelow & Pargetter 1991, et le comparer à *Principia* VI. Je vais ensuite me pencher sur *The Reality of Numbers* (1988), écrit par Bigelow, et repris dans le chapitre 8 de Bigelow & Pargetter 1991. Dans une troisième section, conclusive, j'évaluerai brièvement l'usage « physicaliste » que les deux philosophes font de la théorie russellienne.

### **I-1. La quantité selon Bigelow et Pargetter**

Au début de Bigelow & Pargetter 1988, les auteurs expliquent que le besoin d'une théorie des universaux provient du désir de comprendre « que deux choses distinctes peuvent être à la fois « les mêmes » et « différentes » au même moment » (288). Ce conflit disparaît, avancement, dès que l'on admet que les choses qui sont les mêmes eu égard à certains aspects (certains universaux) peuvent différer eu égard à d'autres. Dans ce cadre, les quantités posent une difficulté particulière : deux grandeurs peuvent être différentes, eu égard au même aspect. Ainsi, « deux choses peuvent être les mêmes en ce qu'elles *ont* toutes les deux de la masse ; elles pourraient cependant différer, en ce que l'une a *plus* de masse que l'autre » (*Ibid.*). Bigelow et Pargetter distinguent alors, je l'ai déjà évoqué, deux stratégies de résolution du problème, la stratégie Platon-Berkeley, d'une part, la stratégie des *determinables* et *determinates*, d'autre part. La première consiste à penser la variation quantitative comme une variation dans la ressemblance entre une quantité particulière et un paradigme – ainsi, un degré de rouge peut être conçu comme un degré de ressemblance entre un rouge particulier et un échantillon paradigme. Dans un tel schéma, il n'y a qu'un seul genre de variation quantitative, celle affectant la relation de ressemblance. La seconde stratégie consiste au contraire à poser qu'il y a des genres de grandeur mutuellement exclusifs, et que les degrés sont des déterminations à l'intérieur de ces genres – ainsi, un degré de rouge serait un *determinate* particulier au sein du *determinable* (du genre) rouge. Selon cette seconde perspective, il y a une diversité dans les genres de grandeurs (il n'y a pas qu'un seul type de

variation quantitative) et les *determinates* sont tous sur le même plan (il n'y a pas de paradigme).

La problématique présentée au début de Bigelow & Pargetter 1988, ainsi que la distinction qui y est faite entre deux stratégies de réponse, sont convaincantes. Elles s'intègrent notamment parfaitement aux considérations post-hégéliennes de Bosanquet et du jeune Russell (que j'ai rappelées dans le chapitre 1)<sup>1</sup> ; elles recourent également très exactement une forme d'hésitation et d'ambivalence de Russell dans les *Principles*<sup>2</sup>. Le reste de l'article « Quantities » pose toutefois plus de difficulté, comme nous allons maintenant le voir.

Bigelow et Pargetter commencent par affirmer que les deux stratégies ont chacune leur point faible : si l'approche Platon-Berkeley explique bien ce que différentes intensités ont en commun (elles ressemblent tous au même paradigme), elle échoue à rendre compte de leur diversité ; inversement, si la théorie des *determinables* explique bien la différence entre les degrés (ce sont tous des propriétés différentes), elle ne permet pas de comprendre ce qui les réunit. Les auteurs, après avoir raffiné la doctrine de Johnson<sup>3</sup>, proposent donc de combiner les deux approches – contre la conception Platon-Berkeley, ils admettent l'existence d'une pluralité de genres différents ; mais en même temps, contre la doctrine des *determinates*, ils soutiennent que « avoir une propriété particulière déterminée, c'est, pour un individu, se tenir dans une relation particulière par rapport à d'autres individus » (296). C'est donc, selon eux, par la détermination d'une relation qu'un objet acquiert une quantité déterminée. Ainsi, pour reprendre l'exemple de la masse que Bigelow et Pargetter affectionnent, un objet pèsera quatre kilogrammes, parce qu'il entretiendra la relation « plus lourd de trois unités » avec un autre objet ayant une masse de un kilogramme. Le schéma est donc le suivant : un ensemble d'objets de base entretiennent des relations quantitatives particulières (de masses, de longueurs, etc ...) entre eux ; lorsqu'une unité est fixée, ces relations permettent d'attribuer à ces objets une propriété « quantitative » (une masse, une longueur...) ; tous les objets qui se trouvent avoir ces relations avec d'autres ont la propriété d'appartenir à un certain genre (être des masses, être des longueurs...).

Parvenu à ce stade, Bigelow et Pargetter rajoutent alors un troisième étage à leur construction (298-302). Ils affirment que les quantités (qui sont elles-mêmes des relations) entretiennent entre elles des relations de proportion. Ainsi, la relation « plus lourd de une unité » entretient avec la relation « plus lourd de trois unités » la proportion ou rapport 1/3. Ces proportions relient des relations appartenant à un même genre ; une relation de masse n'est ainsi en proportion avec aucune relation de longueur. Cependant, la notion de proportion elle-même n'est pas restreinte à un genre particulier : la proportion entre « plus lourd d'une unité » et « plus lourd de trois unités » est la même que celle entre « plus long d'une unité » et « plus long de trois unités ». Ce point joue un rôle décisif dans la définition que donne Bigelow et Pargetter des nombres, nous y reviendrons. Les auteurs soulignent également que cette prise en compte des propositions permet de comparer et de distinguer différents systèmes quantitatifs ; ainsi, si certains genres de quantités, comme la masse, manifestent une très grande richesse dans les proportions que les relations quantitatives ont les unes avec les autres, il est probable que d'autres types de grandeur manifesteront des structures moins riches et moins « discriminantes » (301). Les auteurs mentionnent à ce propos les différentes sortes d'échelle distinguées dans la théorie représentationnelle de la mesure (voir prochain chapitre), suggérant que ces différences peuvent toutes être intégrées dans le cadre relationnel proposé.

<sup>1</sup> Rappelons que pour les néo-hégéliens, la notion de quantité est contradictoire parce qu'elle se présente comme une différence au sein de ce qui est essentiellement une identité (une qualité, un « universel »).

<sup>2</sup> L'auteur des *Principles* attache alors une très grande importance à la théorie relationnaliste de la grandeur, mais renonce à en faire la matrice d'une conception générale de la quantité, et l'insère dans un cadre où les grandeurs sont divisées en genres.

<sup>3</sup> Bigelow et Pargetter critiquent l'idée (qu'ils attribuent à Johnson) selon laquelle un *determinable* serait, comme un *determinate*, la propriété d'un objet (1988, 291-294).

Dans « Quantities », Russell et Whitehead ne sont mentionnés, avec Frege, que dans une note. Mais, dans *The Reality of Numbers* (73-75), qui reprend et développe la théorie de la proportion, Bigelow se montre plus disserte. Le commentateur cite les *Principia* de façon précise : \*303, sur la définition des rationnels, puis \*310 et \*314, sur la définition des réels. Quand on regarde plus en détail, on s'aperçoit cependant que Bigelow se contente de suivre Quine 1941, qui lui-même délaissait les sections B, C et D et se concentrait sur la seule section A, dédiée à la généralisation des nombres. On ne retrouve rien, chez Bigelow, sur les familles de vecteurs, sur la question de la mesure, etc, ..., c'est-à-dire sur ce qui constitue le fond et l'originalité de la théorie de Russell et Whitehead. Cet étrange oubli n'est pas sans conséquence. En effet, on reconnaît dans « Quantities » le schéma à trois étages que l'on avait dans *Principia* VI : sur un ensemble d'objets  $\alpha$ , est définie une classe de relations  $\kappa$ , qui constituera le domaine d'une nouvelle classe de relations, les « ratio », appelés « proportions » par Pargetter et Bigelow. L'intérêt de la théorie des logicistes résidait toutefois dans la manière dont ils ajustaient les uns aux autres ces différents niveaux. Et de ce point de vue, la version offerte par les deux philosophes australiens est une caricature.

Commençons par le second étage, celui des relations quantitatives du type « plus lourd de trois unités ». Dans les *Principia*, ces relations pouvaient soit être considérées comme tout à fait quelconques (dans la section A) soit être vues comme des éléments d'une structure particulière, les familles vectorielles (dans les sections B, C et D). Qu'en est-il dans « Quantities » ? On ne sait pas, car les auteurs ne précisent jamais ce qu'ils entendent par relations quantitatives. Ils donnent des exemples, et, à les lire, on a l'impression que ces relations sont extrêmement particulières, déjà mesurées même, puisque un nombre apparaît toujours en elles (ainsi dans « plus lourd de trois unités »). En même temps, Bigelow et Pargetter semblent vouloir maintenir une exigence de généralité : ils affirment ainsi que ces systèmes de relations sont très variables dans leur forme, et que la question de savoir quel système adopté est empirique. Au final, les relations quantitatives ne sont jamais définies. D'autre part, aucune théorie du produit relationnel n'est proposée. Sans doute parce qu'ils insèrent toujours des nombres au niveau de leurs relations, les auteurs paraissent considérer qu'il n'est pas nécessaire pas de préciser le rapport entre produit relationnel et addition<sup>1</sup>. Cela est bien évidemment faux, comme le montre les développements de la section B de *Principia* VI. On retrouve ici le même problème que précédemment : aucune définition n'est donnée des relations de second niveau.

Le même flou règne lorsque nous passons au dernier étage de la construction, celui des rapports ou proportions. Rappelons que, dans les *Principia*, une distinction est faite entre les ratios purs et les ratios appliqués. Pour garantir l'existence des « proportions », aucune hypothèse supplémentaire sur le champ des relations nombres n'est nécessaire ; en revanche, pour garantir la possibilité de la mesure, il faut poser des contraintes sur ce à quoi on applique les nombres : construire une théorie des familles de vecteurs (section B), puis développer une doctrine des familles mesurables (section C et D). Comment Bigelow et Pargetter conçoivent-ils la distinction entre proportions pures et proportions appliquées ? Se placent-ils dans le cadre très général de la section A ou restreignent-ils le type des familles  $\kappa$  auxquelles ils appliquent les proportions ? Aucune réponse n'est donnée par les auteurs. On a parfois l'impression que la structure relationnelle à laquelle les philosophes australiens appliquent leurs proportions est très particulière (l'ensemble des segments d'une droite euclidienne). Mais, en d'autres endroits, ils appliquent leurs proportions à des relations plus « exotiques » (généalogique par exemple).

---

<sup>1</sup> Dans *The Reality of Numbers*, Bigelow développe un peu plus cet aspect. Mais, comme on le verra, il ne travaille encore que sur des exemples particuliers (celui des relations généalogiques ou des situations géométriques), ce qui rend extrêmement difficile l'identification des hypothèses posées sur le produit relationnel.



Le plus grave est Bigelow et Pargetter ne paraissent pas même être conscients des difficultés que la généralité de leur thèse engendre. C'est ainsi D. Armstrong (1988, 309) qui remarque que rien n'interdit que deux masses aient plusieurs proportions, ou que l'ordre entre les proportions n'induisse pas un ordre entre les relations<sup>1</sup>. Ces points ne sont évidemment pas des détails, et le fait qu'aucune analyse ne leur soit consacrée ôte beaucoup d'intérêt à la théorie de Bigelow et Pargetter<sup>2</sup>. Cette impression de flottement généralisé ne se dissipe hélas lorsque l'on examine la théorie physicaliste des nombres proposée par Bigelow dans son 1988.

## I-2. La réalité des nombres selon Bigelow

Je ne vais pas passer beaucoup de temps sur les développements, dans l'ensemble décevant, de *The Reality of Numbers*. Le projet d'une philosophie physicaliste des mathématiques, lui aussi développé à partir des années 80s, mérite en revanche plus d'attention<sup>3</sup>. Il tire ses racines du célèbre dilemme proposé par P. Benacerraf dans son article séminal « Mathematical Truth » de (1973, 661) :

Deux genres différents de préoccupations conduisent séparément aux conceptions relatives à la nature de la vérité mathématique : (1) le souci d'avoir une théorie sémantique homogène dans laquelle les propositions des mathématiques s'ajustent à la sémantique des autres parties du langage, et (2) le souci d'avoir une conception de la vérité mathématique qui concorde avec une épistémologie raisonnable (...). Presque toutes les approches du concept de vérité mathématique peuvent être considérées comme servant un de ces maîtres au détriment de l'autre.

L'attitude vis-à-vis du point (1) distingue les approches nominalistes des approches réalistes, la difficulté étant pour les secondes de fournir une réponse à (2) : si les nombres, par exemple, sont considérés comme des objets, comment, étant donné leur absence de pouvoir causal, expliquer que l'on puisse les connaître ? Dans un article paru la même année que celui de Benacerraf, M. Steiner exprime la difficulté ainsi (1973, 58) :

L'objection (à l'idée que les objets mathématiques existent en dehors de l'espace et du temps) est que, si les entités mathématiques existent réellement, elles sont inconnaissables – et donc, par conséquent, les vérités mathématiques sont inconnaissables. Il ne peut y avoir de science traitant d'objets qui ne produisent aucune impression causale sur les affaires courantes (...). Puisque les nombres, *et al.*, sont en dehors de toutes chaînes causales, sont en dehors de l'espace et du temps, ils sont inscrutables. Le mathématicien est ainsi confronté à un dilemme : soit ses axiomes ne sont pas vrais (en supposant que les entités mathématiques n'existent pas), soit elles sont inconnaissables.

La théorie physicaliste des mathématiques a l'ambition de fournir une réponse à ce problème. Les physicalistes sont réalistes. Ils souscrivent à ce que Steiner appelle le platonisme ontologique, c-à-d à l'idée que « les vérités des mathématiques décrivent des objets mathématiques réels » (57). Ils refusent cependant de doter l'esprit humain d'une capacité intuitive permettant d'entrer en contact avec des entités causalement inertes. Les objets mathématiques, les nombres, les ensembles, les fonctions, etc... doivent être conçus comme des objets de même nature que les corps physiques. En cela, les partisans du physicalisme en mathématique se rapprochent des nominalistes. S'ils souscrivent à une interprétation réaliste des énoncés mathématiques, ils exigent que les entités mathématiques soient « concrètes » (qu'elles aient une position spatio-temporelle et puissent agir causalement sur notre esprit),

---

<sup>1</sup> Russell et Whitehead avaient non seulement vu, mais insisté sur ces possibilités – elles manifestaient selon eux la différence entre deux tâches : construire une théorie des ratios purs (qui ne présuppose aucune contrainte sur les relations que lient les ratios) et élaborer une théorie de la mesure (qui elle nécessite de restreindre les familles auxquelles on applique les proportions).

<sup>2</sup> Par exemple, lorsque Pargetter et Bigelow affirment que leur théorie des proportions est « transgenre », i.e. qu'une proportion entre deux masses peut être identique à une proportion entre deux longueurs, ils supposent en réalité une identité de structure entre les deux domaines quantitatifs – pour utiliser la terminologie russellienne, ils supposent que les deux familles vectorielles ont les mêmes propriétés.

<sup>3</sup> Je suis ici la présentation de Irvine 1990.

même si cela doit conduire à un léger aménagement de la sémantique des termes mathématiques. Bien entendu, cette position a beaucoup d'attrait pour les partisans du réalisme scientifique de Armstrong<sup>1</sup>.

La difficulté majeure à laquelle ces tentatives se heurtent porte sur l'écart entre les structures mathématiques abstraites et les données de l'expérience. Prenons un exemple. On pourrait être tenté d'associer la densité de  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$  à la perception du continu physique et/ou à la mesure des grandeurs physiques. Grossièrement énoncée, l'idée serait de soutenir que la densité exprime le fait que les instruments de mesure permettent toujours la détection de nouveaux points entre deux points considérés initialement comme « voisins »<sup>2</sup>. Il est cependant extrêmement difficile de mettre en relation, sur le même modèle, la complétude de  $\mathbb{R}$  avec quelque procédure empirique que ce soit. Étant donné que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , jamais aucune opération de mesure ne nécessitera de « créer » des irrationnels<sup>3</sup>. Comment alors soutenir que la continuité (au sens de la complétude) est une propriété exhibée par certains objets physiques ? Le problème est ici celui du divorce entre les données de l'expérience et les conditions qui président à la définition des concepts mathématiques : le monde physique est sans doute tout simplement trop pauvre pour fournir un socle aux très riches structures mathématiques. La question même de l'infinité des objets physiques fait difficulté – or, comment retrouver les mathématiques standards sans l'infini ? Pour combler le fossé entre la réalité physique et les demandes des mathématiques, le physicalisme est inévitablement conduit vers alternative dont aucune branche n'est satisfaisante : il peut soit « mathématiser » sa description du monde physique (introduire artificiellement dans cette réalité les corrélats des objets ou de propriétés mathématiques dont il a besoin), soit sacrifier une partie des mathématiques (renoncer aux mathématiques qui ne peuvent être fondées sur des bases strictement physicalistes<sup>4</sup>).

Venons-en à la construction de Bigelow<sup>5</sup>. Le philosophe cherche à montrer que tous les objets mathématiques (les nombres, les ensembles, les fonctions, etc.) sont des entités « physiques » ; je ne parlerai ici que de sa conception des nombres. L'auteur expose sa théorie des rationnels aux chapitres 10 et 11 de son livre (66-75). Il reprend l'idée selon laquelle les nombres sont des proportions et utilise, sans les définir, des exposants relationnels. Bigelow pose que  $n/m$  est la relation qu'ont deux relations  $R$  et  $S$  lorsque  $R^m = S^n$ . Bien évidemment, comme l'on ne sait pas ce que signifie une relation suivie d'un exposant, le sens de cette égalité demeure vague<sup>6</sup>. D'autre part, aucune définition de l'addition, de la multiplication, de

<sup>1</sup> Remarquons toutefois que la plus connue et la plus aboutie des tentatives de « physicaliser » les mathématiques, celle de Maddy 1980, est complètement indépendante de l'œuvre du philosophe australien

<sup>2</sup> C'était semble-t-il le projet de Klein (1898) et de Poincaré (1902). Ce dernier n'était toutefois pas physicaliste : si l'expérience nous suggère l'idée d'ordre dense, c'est l'entendement qui la crée. Cf. notre chap. 1, section 1-2 et notre chap. 3.

<sup>3</sup> Ni Poincaré ni Klein ne relie la complétude (ou continu du second ordre) aux procédures de mesure. Voir par exemple Klein 1898, 47 : « Comme exemples de théories mathématiques étendues qui n'ont aucune coexistence avec les sciences appliquées, je puis citer la distinction entre le commensurable et l'incommensurable, les recherches sur la convergence des séries de Fourier, la théorie de fonctions non analytiques, etc. (...) Nous n'avons à notre disposition aucun moyen pour reconnaître si deux grandeurs astronomiques sont incommensurables entre elles ou non ; nous pouvons seulement nous demander si leur rapport peut être exprimé approximativement au moyen de deux petits nombres entiers. L'opinion émise quelquefois qu'il n'existe dans la nature que des fonctions analytiques est, à mon avis, absurde. Tout ce que l'on peut dire, c'est que l'on s'en tient aux fonctions analytiques, et même aux fonctions analytiques simples, par la raison qu'elles fournissent un degré suffisant d'approximation. »

<sup>4</sup> Ainsi en va-t-il des différentes formes de contraintes finitistes introduites en arithmétique. Pour un exemple de position physicaliste « précoce » en géométrie, voir les travaux de Pasch, étudiés dans Gandon 2005b.

<sup>5</sup> Ainsi (Bigelow 1988, 2, 7) : « Platon avait raison de croire que la véritable connaissance concerne les choses étudiées en math. Et Aristote avait raison de croire que la véritable connaissance concerne le monde physique autour de nous. Mais ils avaient tous les deux tort en faisant comme si les choses étudiées en math étaient trop pures et parfaites pour être placées dans le monde physique que nous ressentons et sentons autour de nous. (...) Les nombres sont des choses physiques. Les mathématiques pures diffèrent donc des autres sciences seulement en degré, non en genre ».

<sup>6</sup> En particulier on ne sait pas si  $R^m = S^n$  signifie, comme chez Russell et Whitehead, qu'il existe un couple d'objet  $x, y$  tel que  $xR^m y = xS^n y$  ou si cela signifie que quel que soit  $x$  et  $y$ ,  $xR^m y = xS^n y$ . Apparemment (voir 92-93), c'est la seconde option que choisit Bigelow. Mais il n'a pas l'air de comprendre qu'il y a là deux sens très distincts.

l'ordre sur les rationnels n'est donnée. Enfin, Bigelow ne dit rien sur le domaine des relations  $R$ ,  $S$ , etc., dont il considère le rapport. Bigelow est encore plus flou sur les réels, abordés au chapitre 12. Il se contente de caractériser  $\sqrt{2}$  comme limite d'une procédure d'approximation très particulière (77-80), et de suggérer que la méthode employée se généralise à tous les réels. On ne voit absolument pas comment<sup>1</sup>. Là encore, rien sur les opérations algébriques et sur les relations d'ordre ; rien non plus sur le domaine des relations « quantitatives »  $R$  et  $S$  dont on considère les rapports. Tous ces développements laissent à désirer. Le manque de précision est tel que la question de savoir exactement quelle partie de la théorie des rationnels et des réels est couverte par l'approche de Bigelow ne trouve pas de réponse.

L'auteur est plus disert sur un autre point : le statut des universaux. Bigelow (considère qu'il) a défini les nombres comme des relations entre relations, donc comme des universaux (de second degré). Cette thèse ne suffit toutefois pas à établir la réalité physique des nombres. Ainsi, Russell et Whitehead définissent eux aussi les rationnels et les réels comme des relations entre relations ; mais les relations dont il est question dans les *Principia* ne sont pas des entités physiques ; ce sont des êtres logiques, des « relations en extension » (i.e. des classes de couples)<sup>2</sup>. Pour établir que les nombres sont des entités « concrètes », Bigelow distingue alors deux façons de concevoir les universaux (1988, 27, 121-128). La première relie les universaux à l'usage d'un langage. Dans cette perspective, les universaux sont les « ombres portées » de nos systèmes expressifs sur le monde – nous postulons leur existence seulement pour rendre compte de la vérité de certains énoncés. Les universaux ainsi conçus sont des « *truthmakers* » qui n'ont pas de véritable consistance. La seconde façon d'approcher les universaux, plus conforme au réalisme revendiqué par Bigelow, est de les concevoir comme des « *recurrences* ». Pour Bigelow, les particuliers ne peuvent pas occuper plusieurs positions simultanément ; or, certaines « choses », les universaux au sens de « *recurrences* » précisément, le peuvent. Ainsi, l'universel rouge est au même moment à toutes les places où il y a du rouge. Les « *recurrences* » sont des êtres spatio-temporels, elles sont donc des entités physiques. Leur existence, explique Bigelow, peut être attestée par l'expérience : nous constaterions, après une enquête qui pourrait d'ailleurs s'avérer difficile, qu'il y a dans le monde certaines entités récurrentes, un peu comme nous constatons qu'il y a, en Australie, des échidnés (174-175). Les universaux, entendus au sens de « *recurrences* », ont une réelle consistance ontologique, et Bigelow soutient que ce seraient d'eux dont nous parleraient les mathématiques.

Bigelow reconnaît que sa conception des universaux comme « *recurrence* » pose de nombreux problèmes. D'une part, le principe selon lequel les particuliers ne peuvent pas occuper plusieurs positions simultanément est battu en brèche par la physique contemporaine (24-26), ce qui constitue un grave problème pour un réaliste scientifique comme Bigelow. D'autre part, l'idée que les universaux authentiques (ceux sur lesquels portent les mathématiques) sont localisés amène à soutenir des thèses pour le moins étranges – par exemple, à attribuer une position au nombre 3, ou à la relation d'ordre. J'insisterai toutefois sur un autre aspect. On vient de le dire, pour Bigelow, « les *truthmakers* (...) ne sont pas le sujet d'étude des mathématiques » (122) ; les universaux relationnels qui interviennent en mathématiques sont des « *recurrences* », dont on « constate » l'existence dans le monde. Mais si c'est le cas, rien ne garantit *a priori* que ces universaux récurrents coïncident avec les *truthmakers* des propositions mathématiques. Précisons le problème. Bigelow et Pargetter

<sup>1</sup> Le procédé est d'ailleurs en lui-même très intéressant, ancré dans la pratique grecque de manipulation des jetons dans un carré, et fondé sur le rapport entre nombres « diagonaux ». Mais précisément, rien ne permet d'affirmer qu'une telle procédure, si particulière, se généralise à tous les réels.

<sup>2</sup> Il y aurait beaucoup à dire sur le statut des relations en extension, et plus généralement des classes, dans les *Principia*. Officiellement, les classes sont des symboles incomplets et non des objets logiques. Cela ne va toutefois pas à l'encontre du point que je suis en train de souligner : quel que soit leur statut, les classes comme les relations ne sont pas conçues dans les *Principia* comme des objets physiques.

semblent suggérer que l'universel masse a une structure telle qu'il existe une bijection entre les proportions entre les masses et l'ensemble des réels positifs (Bigelow & Pargetter 1988, 301). Sur quel type d'enquête se fondent-ils pour affirmer cela ? Nous l'avons vu, aucune mesure, si précise soit-elle, ne peut nous donner une telle information. Comment dès lors savoir si la structure ordinale des masses est complète ? Attribuer la propriété topologique de complétude à certaines structures permet de valider certains énoncés ; la complétude est ainsi, dans la terminologie de Bigelow, d'abord un *truthmaker* ; qu'est-ce qui justifie d'en faire une *recurrence* ?

Nous retrouvons donc, au niveau de cette distinction entre universaux-*recurrence* et universaux-*truthmakers*, la difficulté commune à toutes les tentatives visant à physicaliser les mathématiques. Comme les postulats à la base des structures mathématiques standard ne sont trivialement vérifiés par aucun système physique, le programme physicaliste nous conduit à choisir entre deux stratégies : soit abandonner les propositions mathématiques qui n'ont pas de correspondant physique attesté (abandonner les *truthmakers* au profit des seules *recurrences*), soit mathématiser la description que l'on fait du monde physique (abandonner les *recurrences* au profit des *truthmakers*). Le philosophe australien ne semble pas prendre la mesure du problème. Une discussion plus serrée et rigoureuse de la nature des nombres l'y aurait certainement aidé.

### I-3. Conclusion

Pourquoi adopter une conception relationnelle plutôt que prédicative des quantités ? La réponse de Bigelow et Pargetter semble être : parce que la structure relationnelle s'ajuste mieux aux spécificités des universaux quantitatifs. Le problème est Bigelow et Pargetter, à la différence de Russell et Whitehead, ne précisent jamais ce qu'ils entendent par quantité. Les philosophes australiens soulignent également l'existence d'un lien définitionnel entre nombres et grandeurs. Mais là encore, faute d'avoir su décrire de façon précise la structure des relations quantitatives, leur analyse ne tient pas ses promesses. Les théories de Bigelow et Pargetter ne sont tout simplement pas assez précises pour donner lieu à une véritable discussion critique. Si je les ai évoquées, ce n'est malgré tout pas seulement parce qu'elles constituent le seul exemple (à ma connaissance) de travaux récents qui se réfèrent à *Principia* VI. Comme je l'ai dit plus haut, la mise en place problématique de la question de la grandeur dans « Quantities » est éclairante : elle fournit notamment un premier cadre permettant de se repérer efficacement dans l'œuvre complexe de Russell. J'ai utilisé le début de « Quantities » dans les chapitres précédents, il était nécessaire d'en restituer le contexte. On ne peut cependant qu'être déçu par le flou des réponses que Bigelow et Pargetter apportent aux questions qu'ils soulèvent. Ce n'est pas dans leurs travaux qu'il faut chercher un développement digne de *Principia* VI.

Plus généralement, la stratégie consistant à utiliser la théorie des logicistes dans le cadre d'une approche physicaliste des mathématiques a de quoi surprendre. Le programme physicaliste est finalement, dans ses grandes lignes, très proche des conceptions empiristes d'un John Stuart Mill, qui soutenait que les vérités arithmétiques étaient de nature inductive. Frege (1884, 132-135), on le sait, s'est très fortement opposé à une conception qui ne rendait pas compte du caractère nécessaire et général des mathématiques<sup>1</sup> – Russell et Whitehead étaient sur la même ligne. De plus, le problème, fondamental dans le physicalisme, de savoir comment rendre compte de l'interaction entre notre esprit et les entités mathématiques, ne se pose tout

---

<sup>1</sup> Citons un passage de Frege 1884, assez représentatif : « D'après Mill, (le fait affirmé dans la définition du nombre trois) consiste en ce que des groupements d'objets faisant cette impression \* \* \* sur la sensibilité, peuvent être séparés en deux parties comme : \* \* \*. Quel bonheur que tout au monde ne soit pas cousu ou noué ; car on ne pourrait pas opérer cette séparation et 2+1 ne feraient pas 3 ! » (132)

simplement pas au Russell des *Principles*, prompt à admettre une accointance avec les constantes logiques et les entités abstraites. Cette question est sans doute plus présente à l'époque des *Principia*, où, comme l'a souligné P. Hylton (1990), des contraintes plus fortes sont posées sur la relation d'*acquaintance*. Mais Russell ne se gêne pas pour admettre, encore en 1912 et 1913, une intuition des formes logiques<sup>1</sup>. L'idée que les mathématiques jouissent, au sein de la connaissance scientifique, d'un statut particulier qui les singularise par rapport à la connaissance empirique, semble consubstantiellement liée au logicisme – et ce, quelle que soit la manière dont on conçoive la différence logique / empirique<sup>2</sup>. Il paraît dès lors étrange de convoquer Russell et Whitehead, mais aussi Frege, pour défendre une philosophie des mathématiques à ce point opposée au logicisme.

La démarche des deux philosophes australiens n'est pas néanmoins dénuée de justification. Ce que Bigelow et Pargetter retiennent des *Grundgesetze* et des *Principia*, c'est finalement l'idée, bien présente dans les deux œuvres<sup>3</sup>, qu'un nombre réel (ou rationnel) doit être défini comme un rapport entre grandeurs (comme une relation entre relations) sur le modèle de ce que propose la tradition euclidienne. Nous avons vu dans le chapitre 1 que la théorie des distances de Russell 1900b était une « traduction » de l'axiomatisation de la théorie des grandeurs, développée par Burali-Forti en 1898. Or, rappelons ce qu'écrivait Burali-Forti dans l'introduction de son article :

Un autre résultat bien plus important (de notre méthode) est celui de pouvoir obtenir l'idée générale de nombre sous forme concrète en la déduisant de l'idée concrète, usuelle, de grandeur, qui est aussi indispensable pour les propriétés métriques de la géométrie.

Burali-Forti fonde la notion de nombre sur celle, plus « concrète », de grandeur. Il pose donc dans son article les bases d'une approche physicaliste des nombres, au sens que Bigelow et Pargetter donnent à ce mot. L'usage que ces derniers font des logicistes n'est ainsi pas si arbitraire qu'il peut paraître à première vue.

Les logicistes ne sont bien entendu pas physicalistes. Mais la question est de savoir pourquoi ils développent une théorie des nombres et de la grandeur qui semble l'être. Pourquoi Russell et Whitehead, comme Frege, n'ont-ils pas choisi de définir les réels en termes de coupures (Dedekind) ou de classes d'équivalence de suites fondamentales (Cantor) ? Burali-Forti veut montrer que les nombres dérivent des grandeurs. Frege, comme Russell et Whitehead, ne partagent pas cette philosophie. Mais alors pourquoi reprennent-ils à leur compte la stratégie du mathématicien italien ? C'est à cette dernière question que je vais m'attacher dans ce qui suit. Frege, comme Russell et Whitehead, adhèrent à un principe, appelé par C. Wright *Frege's constraint* mais que nous avons rebaptisé *Application Constraint*, qui stipule que la définition d'une entité mathématique doit rendre intelligible ses principales applications. Ce principe n'est pas un principe physicaliste : les termes dont la définition satisfait l'*Application Constraint* (notée à partir de maintenant *ApC*) ne désignent pas nécessairement des objets « concrets », localisables dans l'espace-temps. *ApC* conduit cependant, comme nous le verrons, à rompre avec la conception dedekindienne et cantorienne des réels. Dans le reste du chapitre, je vais présenter les discussions dont ce principe a récemment fait l'objet. Ma thèse sera la suivante : la structure complexe de *Principia* VI permet, bien mieux que les développements de Frege, de donner un sens raisonnable à *ApC*. C'est donc, selon moi, dans

<sup>1</sup> Voir Russell 1912b et Russell 1913.

<sup>2</sup> Concernant l'attitude de Russell envers les mathématiques, voir le célèbre passage du volume III de Russell 1969, 220 : « Je voulais la certitude de la manière dont les gens souhaitent la foi religieuse. Je pensais trouver la certitude (...) dans les mathématiques plutôt que n'importe où ailleurs. » Voir également la fin de Russell 1912a (184) : « L'esprit libre mettra la connaissance abstraite, universelle, pure de l'accidentel que comporte toute histoire personnelle, bien au-dessus de la connaissance tirée des sens ; car la connaissance sensible est nécessairement liée à un point de vue exclusif et privé, à un corps, à un appareil sensoriel qui déforme tout autant qu'il révèle. »

<sup>3</sup> Pour une analyse des conceptions de Frege, voir *infra*.

le contexte de la réflexion contemporaine sur l'*Application Constraint* que le potentiel philosophique de la construction de Russell et de Whitehead s'exprime le mieux. Bigelow et Pargetter assimilent constamment, dans leurs écrits, les *Grundgesetze* et les *Principia* – auxquels ils auraient probablement associé les travaux de Burali-Forti, s'ils les avaient connus. Ce n'est, au contraire, qu'en distinguant les trois théories que la fécondité conceptuelle de l'approche des *Principia* peut être dégagée.

## II- Les définitions néo-fregéennes des réels et la question de l'*application constraint*

Dans les *Grundgesetze*, Frege adopte une définition des réels qui partage beaucoup d'affinités avec celle présentée dans les *Principia*. Pratiquement oublié pendant près d'un siècle, la démarche fregéenne a récemment refait surface dans le sillage des discussions suscitées par le programme néo-logiciste. En 2000, B. Hale, cherchant à étendre au cas des réels les procédures d'abstraction permettant de construire  $\mathbb{N}$ , a repris les grandes lignes de l'approche de Frege, en mettant en avant la nécessité d'obéir au principe méthodologique de l'*application constraint* (ApC)<sup>1</sup>. La théorie de Hale a été attaquée sur deux fronts. Le premier, extérieur au courant néo-logiciste, provient de la théorie représentationnelle de la mesure : Batitsky a soutenu, en 2002, que ApC, tel que le défendait Hale, était incompatible avec la théorie du *measurement* aujourd'hui standard, et qu'elle devait, pour cette raison, être abandonnée. Une seconde sorte de critique a été adressée, de l'intérieur même du camp néo-logiciste, par C. Wright, qui a défendu l'idée que ApC n'est applicable qu'à certains concepts et théories mathématiques, dont ne fait pas partie les nombres réels et les concepts fondamentaux de l'analyse.

Cette section et la suivante visent à montrer que Hale a raison de maintenir, à la fois contre Batitsky et contre Wright, l'exigence de l'*Application Constraint* dans la définition des réels – mais que sa position souffre de la façon particulière dont il comprend et applique le principe. Je soutiendrai que la démarche suivie par Russell et Whitehead permet une défense plus efficace et convaincante. Mon but est donc de défendre la position de Hale, en substituant à la référence aux *Grundgesetze* la référence à *Principia* VI. Je présenterai ici la construction de Hale, sa discussion avec Batitsky, puis avec Wright – réservant à la section suivante l'examen du rapport entre la construction néo-fregéenne et celle de Russell et Whitehead.

### II-1. La définition des réels de B. Hale

Dans « *Reals by Abstraction* » (2000), Hale commence par rappeler les bases du logicisme néo-fregéen. Dans les *Grundgesetze* (mais c'était déjà le cas dans les *Grundlagen*), Frege se sert d'un axiome, la célèbre « loi fondamentale » V<sup>2</sup>, contradictoire. Comme l'ont montré C. Wright (1983), puis R. G. Heck (1993), Frege n'utilise cependant cet axiome que pour prouver l'équivalence suivante, dénommée par Boolos principe de Hume et notée (PH) dans la suite :

<sup>1</sup> Il semble que Heck (dans son 1998) ait été le premier à insister sur la différence qu'il y a, chez Frege, entre interpréter une théorie par une théorie logique (par exemple interpréter la géométrie euclidienne dans le cadre de l'analyse réelle), et montrer que la théorie cible est elle-même dérivable de la logique. Ainsi, il ne suffit pas, selon Heck, de dériver toutes les propriétés formelles des nombres entiers par le principe de Hume pour garantir que les entiers que nous connaissons et utilisons sont reconstruits logiquement. ApC joue ici un rôle épistémologique fondamental : il garantit que ce que nous dérivons est bien ce que nous voulons.

<sup>2</sup> *F* et *G* étant deux concepts, la loi V stipule que : l'extension de *F* = l'extension de *G* si et seulement si *F* et *G* sont coextensifs.

(PH)  $F$  et  $G$  étant deux concepts sortaux quelconques, le nombre de  $Fs$  = le nombre de  $Gs$  ssi les  $Fs$  et les  $Gs$  peuvent être bijectivement corrélés.

D'où l'idée de reprendre la démarche de Frege en partant de ce principe, et non plus de la loi fondamentale V. Suivant cette voie, Boolos (1990), puis Heck (1993), ont démontré le résultat suivant, nommé théorème de Frege : si (PH) est ajouté à la version standard de la logique du second ordre, le système résultant est suffisamment puissant pour dériver les axiomes de Peano (i.e. l'arithmétique). De plus, à la différence de la théorie fregéenne historique, le système obtenu est consistant (tout du moins aussi consistant que l'arithmétique de Peano développée dans le second ordre). Toute cette histoire est aujourd'hui bien connue, et je ne m'étendrai pas sur les nombreuses discussions qu'elle a suscitées<sup>1</sup>. Deux points méritent cependant d'être mentionnés.

Hale et Wright ont défendu l'idée que (PH), en tant que « principe d'abstraction », était une vérité analytique. Les principes d'abstraction au sens de Hale et Wright sont des schémas de ce genre (Hale 2000, 100) :

$$\forall \alpha \forall \beta (\$ \alpha = \$ \beta \Leftrightarrow \alpha \approx \beta),$$

où  $\approx$  est une relation d'équivalence entre des entités désignées par «  $\alpha$  » et «  $\beta$  », et où  $\$$  est un opérateur qui forme des termes singuliers lorsqu'il est appliqué à des expressions de même type que «  $\alpha$  » ou «  $\beta$  ». L'idée est que le contenu exprimé à droite du signe d'équivalence est identique à celui exprimé à gauche, alors même que la substitution du signe d'identité à la relation d'équivalence autorise l'extraction de nouvelles entités, désignées par «  $\$ \alpha$  » et «  $\$ \beta$  ». Wright insiste beaucoup sur le fait que c'est simplement par une réorganisation du contenu (« *recarving the content* ») apparaissant à droite du signe d'équivalence que les objets figurant dans l'égalité de gauche sont formés. La défense par les néo-logicistes des principes d'abstraction a suscité une très riche discussion que je laisserai de côté<sup>2</sup> ; ce que je veux souligner est seulement le caractère absolument central de ces principes d'abstraction.

La seconde remarque porte sur (PH). Russell, on le sait, objectait à la définition axiomatique des entiers proposée par Peano de ne pas expliquer comment les entiers s'appliquent aux objets ordinaires (Russell 1919, 47) :

Nous désirons que nos nombres ne se contentent pas de vérifier des formules mathématiques, mais s'appliquent comme il faut aux objets ordinaires. Nous voulons avoir en effet dix doigts, deux yeux, un nez. Un système où « 1 » désigne 100, « 2 » 101, et ainsi de suite, peut bien convenir pour les mathématiques pures, mais n'est pas adapté à la vie de tous les jours.

(PH) satisfait complètement la demande de Russell puisqu'il conduit à définir « 0 » comme le nombre d'objet  $x$  tel que  $x \neq x$ , 1 comme le nombre de  $x$  tel que  $x=1$ , 2 comme le nombre de  $x$  tels que  $x=0 \vee x=1$ , et ainsi de suite... (PH) ne permet donc pas seulement de prouver le « théorème de Frege » ; il conduit à élaborer des définitions qui satisfont *ApC*, et garantissent l'applicabilité des entiers à la mesure de la cardinalité des concepts sortaux.

Les néo-fregéens se sont d'abord concentrés sur l'arithmétique. Mais, en bons logicistes, ils ont cherché ensuite à étendre leur programme à l'analyse. Comment définir les réels sans déroger aux contraintes qui singularisent le néo-logicisme, en particulier sans introduire la

<sup>1</sup> Pour un panorama synthétique des questions ouvertes par les travaux de Wright, Hale, Boolos et Heck, voir Wright & Hale 2005.

<sup>2</sup> Là encore, je renvoie à Wright & Hale 2005.

théorie des ensembles de façon *ad hoc*<sup>1</sup>? Deux réponses ont, presque simultanément, été proposées en 2000, l'une due à Shapiro, l'autre à Hale.

Commençons par dire un mot de la première. Shapiro entend suivre la voie ouverte par Dedekind<sup>2</sup>. Il reconstruit d'abord, en utilisant un principe d'abstraction appliqué aux couples d'entiers, le corps des rationnels, puis formule le principe d'abstraction des coupures de la façon suivante (340) :

Soit  $P$  une propriété (des nombres rationnels) et  $r$  un nombre rationnel. On dit que  $r$  est une borne supérieure de  $P$ , et on note  $P \leq r$ , si, pour tout nombre rationnel  $s$ , si  $P s$ , alors  $s < r$  ou  $s = r$ . En d'autres mots,  $P \leq r$  si  $r$  est plus grand ou égal à n'importe quel nombre rationnel auquel  $P$  s'applique. Le principe d'abstraction des coupures est le suivant :

(CP)  $\forall P \forall Q (C(P) = C(Q) \Leftrightarrow \forall r (P \leq r \Leftrightarrow Q \leq r))$

En d'autres mots, la coupure de  $P$  est identique à la coupure de  $Q$  si et seulement si  $P$  et  $Q$  partagent toutes leurs bornes supérieures.

Si  $P$  est une propriété instanciée et bornée, alors  $C(P)$  définit un réel. Le philosophe démontre ensuite que, dans le cadre de la logique du second ordre standard, en utilisant (PH), (CP) et les définitions qu'il donne de l'ordre, de l'addition et de la multiplication sur les « coupures », on obtient sans difficulté toutes les propriétés algébriques et ordinales usuellement associées au corps des réels. On le voit, Shapiro reprend donc les grandes lignes de l'approche dedekindienne, sans toutefois introduire la machinerie ensembliste. L'essentiel de son travail vise en réalité à montrer que (CP) est un principe d'abstraction légitime, c-à-d non seulement non-contradictoire mais également apte à surmonter les diverses objections développées dans la littérature (celle dite de la « mauvaise compagnie » notamment). Selon Shapiro, dans la mesure où elle ne s'appuie que sur des principes d'abstraction légitimes, la définition de  $\mathbb{R}$  qu'il présente constitue une authentique extension du programme néo-logiciste. Dans la conclusion, le philosophe revient cependant sur *ApC* (361) :

La *Frege's Constraint* est complètement passée sous silence dans la présentation ici offerte. (...) Nous savons exactement quelle *structure* nous recherchions, et la présentation offerte livre exactement cette structure. Il serait assurément aisé d'ajouter une explication des applications – la mesure des quantités – de cette structure. Nous savons comment le faire pour n'importe quel corps ordonné complet. Mais pour Frege, cette explication de l'application vient trop tard. Elle aurait dû être intégrée dans la définition. (...) En tant que structuraliste, je ne sais pas quoi faire de la *Frege's Constraint*. La présentation de Hale et celle offerte ici nous livre la même structure (...). Avec Dedekind, je dirai que les deux nous donnent la structure des nombres réels.

L'abandon de *ApC* est très lucidement lié par Shapiro à son structuralisme<sup>3</sup>. Pour un structuraliste, ce qui compte est de montrer que la définition garantit les propriétés formelles, structurelles, du concept mathématique considéré – en l'occurrence, de montrer que (CP) permet de ressaisir la complétude de  $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ . Que la définition ne contienne pas en elle l'explicitation des applications possibles du concept n'entre pas en ligne de compte.

Tout autre est la démarche de Hale. Le néo-logiciste s'impose, lui, non seulement de n'utiliser que des principes d'abstraction légitimes, mais également de rester fidèle à *ApC*. En cela, il est plus fidèle à Frege que ne l'est Shapiro. Citons les *Grundgesetze* (1903, §159) :

<sup>1</sup> *Ad hoc*, c'est-à-dire sans reconstruction préalable de la théorie des ensembles à partir de principes d'abstraction « légitimes » – pour plus, sur ce genre de tentatives, voir Shapiro & Weir 1999.

<sup>2</sup> Shapiro 2000, 336 : « Mon but est de présenter de nouveaux principes d'abstraction (logiques) qui peuvent être employés pour développer une théorie des nombres réels qui ressemble beaucoup à la façon dont le principe de Hume engendre une théorie des nombres naturels. Le moment clé de la démarche – là où la terminologie des nombres réels est introduite – suit en gros le développement du célèbre *Stetigkeit und irrationale Zahlen* de Dedekind, mais je formule les principes d'existence pertinent comme des abstractions fregéennes plutôt que comme des principes de type structuraliste à la Dedekind. »

<sup>3</sup> Voir Shapiro 1997.



La voie suivie ici se trouve à mi-chemin entre la vieille façon de fonder la théorie des nombres irrationnels (celle pour laquelle les quantités géométriques étaient prédominantes) et la voie suivie plus récemment (Cantor et Dedekind). Nous retenons la première conception du nombre réel comme relation de quantités (...), mais dissociions (la quantité) de tous ses genres spécifiques, notamment géométriques, et rejoignons par là les efforts les plus récents. En même temps nous évitons, de l'autre côté, l'inconvénient présent dans les dernières approches, à savoir que toute relation à la mesure est ou bien complètement ignorée ou bien accolée de l'extérieur sans aucune connexion interne fondée dans la nature du nombre lui-même. (...) Notre espoir est ainsi de ne pas perdre la prise sur l'applicabilité de (l'analyse) aux domaines spécifiques de la connaissance, sans pour autant la contaminer par les objets, concepts et relations qui proviennent de ces domaines et ainsi menacer sa nature particulière et son indépendance. La manifestation des possibilités d'application est quelque chose que l'on est en droit d'attendre de (la définition des réels), bien que l'application ne soit pas en elle-même son objet.

La question posée par Frege et reprise par Hale est la suivante : comment rester fidèle à  $ApC$ , sans « contaminer » la pureté logique des réels par les notions empiriques de mesure et de quantité ?

Hale commence par distinguer les entités concrètes qui entretiennent des relations quantitatives les unes avec les autres (les corps qui ont des masses, par exemple), et les quantités elles-mêmes (les masses), définies par abstraction à partir des relations d'égalité quantitative<sup>1</sup>. Hale se concentre ensuite sur ce qu'il nomme les domaines quantitatifs, notés  $q$ -domaine, et composés des quantités abstraites. Son but est « de fournir une caractérisation axiomatique informelle de ces domaines, rendant possible l'introduction des nombres réels par le biais de principes d'abstraction appropriés » (106). Le philosophe définit d'abord les  $q$ -domaines minimaux comme les cônes positifs de groupes abéliens totalement ordonnés  $\langle Q, \triangleleft, \oplus \rangle$ <sup>2</sup>. Un  $q$ -domaine est normal lorsqu'il est, en plus d'être minimal, archimédien. Hale définit alors les rapports de quantité appartenant à deux  $q$ -domaines normaux  $Q$  et  $Q^*$  par le principe d'abstraction suivant :

$$(EM) \quad \forall a, b \in Q, \forall c, d \in Q^* (a : b = c : d \Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N} (ma \triangleleft = \triangleright nb \Leftrightarrow mc \triangleleft = \triangleright nd))$$

En français, (EM) dit que « les rapports  $a : b$  et  $c : d$  sont les mêmes seulement si les équi-multiples de leurs numérateurs ont les mêmes relations d'ordre avec les équi-multiples de leurs dénominateurs » (2000, 107). Hale reprend donc ici (presque) à la lettre la célèbre définition V, 5 des *Eléments* d'Euclide. Il introduit ensuite la notion de  $q$ -domaine plein, c'est-à-dire de  $q$ -domaine normal qui satisfait à la condition de la « quatrième proportionnelle » (i.e. qui est tel que  $\forall a, b, c \in Q, \exists d \in Q (a : b = d : c)$ ), puis le concept clé de  $q$ -domaine complet :

$Q$  est complet ssi  $Q$  est plein et si  $\forall S \subset Q$  supérieurement borné et non vide,  $S$  a une plus petite borne supérieure.

Un  $q$ -domaine complet est donc isomorphe au cône positif du groupe  $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ . Hale montre alors que (108) :

$Q$  étant un  $q$ -domaine complet quelconque, l'ensemble  $R^Q$  des rapports sur  $Q$  est ordinalement complet. (...) Ainsi, à condition qu'il existe au moins un  $q$ -domaine complet, nous pouvons introduire les nombres réels positifs, par abstraction, comme des rapports sur ce domaine.

L'extension de cette définition aux nombres négatifs ne pose aucun problème. Mais la définition reste, en l'état, conditionnelle : les réels peuvent être introduits comme rapports de

<sup>1</sup> Hale reprend ici la distinction entre quantités et grandeurs introduite par Russell dans les *Principles*.

<sup>2</sup> J'utilise des symboles particuliers pour la relation d'ordre et l'addition pour les distinguer de l'ordre et de l'addition sur les réels.

quantités seulement s'il existe un q-domaine complet. Comment démontrer que tel est bien le cas ?

L'idée est d'utiliser les entiers pour construire des q-domaines de plus en plus riches. Comme le note en effet Hale, même si « les quantités comme telles ne sont pas identifiées aux nombres, rien dans la caractérisation des q-domaines n'interdit que ces domaines soient composés de nombres » (111). Ainsi, il est facile de montrer que  $\langle \mathbb{N}^+, + \rangle$  forme un q-domaine minimal et normal, et que la collection des rapports sur  $\mathbb{N}^+$ , noté  $R^{\mathbb{N}^+}$ , forme un q-domaine plein. Pour réaliser le plus difficile, c'est-à-dire prouver l'existence d'un q-domaine complet, Hale reprend la démarche de Dedekind. Il introduit d'abord un ensemble de propriétés, les propriétés de coupure, définies sur  $R^{\mathbb{N}^+}$  :  $P$  est une propriété de coupure ssi elle est un segment (au sens russellien du terme) borné non vide de  $R^{\mathbb{N}^+}$  qui n'a pas de maximum. Le philosophe caractérise alors les coupures par le principe d'abstraction suivant (112) :

$$\#F = \#G \Leftrightarrow \forall a (Fa \Leftrightarrow Ga), \text{ où } F, G \text{ sont des propriétés de coupure sur } R^{\mathbb{N}^+}, \text{ et où } a \text{ parcourt } R^{\mathbb{N}^+}.$$

Il est alors facile d'ordonner et d'introduire une addition sur l'ensemble des coupures ainsi défini, puis de montrer que le q-domaine obtenu est plein, et qu'il satisfait la propriété de la plus petite borne supérieure, c'est-à-dire qu'il est complet. Il y a donc bien au moins un q-domaine complet, et la conditionalisation de la définition des réels en termes de rapports peut être levée.

On pourrait croire que le raisonnement de Hale est circulaire. Le philosophe définit les réels comme des rapports entre éléments d'une certaine structure quantitative décrite axiomatiquement, puis il prouve que ladite structure existe bien en construisant, à partir des entiers, les rationnels puis les réels (presque) exactement comme le fait Shapiro. N'aurait-il pas été plus simple, dès lors, de définir les réels directement comme des coupures ? Non, répond Hale, car, ce faisant, l'application des nombres aux quantités n'est pas expliquée et doit être donnée, après coup, indépendamment de la définition. Que, dans la preuve d'existence d'un q-domaine complet, Hale reprenne une manœuvre qui est dedekindienne n'efface donc pas l'écart conceptuel entre les deux approches. À la différence de celle proposée par Shapiro, la définition de Hale respecte *ApC* ; une unité étant choisie, un réel correspond en effet à un et un seul élément d'un q-domaine complet, il peut donc être conçu comme sa mesure. Mais l'importance de la preuve d'existence ne doit cependant pas être minorée. Si Hale ne l'avait pas fournie, alors le fait que les réels ont les propriétés qu'ils ont aurait dépendu de l'existence d'un q-domaine complet particulier. La demande, exprimée par Frege, de ne pas contaminer la nature des nombres par des éléments particuliers tenant à leur domaine d'application n'aurait pas été satisfaite. La preuve d'existence est fondamentalement ce qui distingue la position néo-fregéenne des thèses physicalistes, défendues par Burali-Forti ou, plus récemment, par Armstrong et ses disciples.

J'ai choisi, ici, de mettre entre parenthèses la question de savoir si la théorie de Hale est fidèle aux *Grundgesetze*. L'essentiel est pour nous, en effet que, si Hale s'écarte du Frege historique sur certains points<sup>1</sup>, sa démarche répond parfaitement aux deux exigences formulées dans le §159 des *Grundgesetze*. La définition qu'il propose respecte *ApC*, tout en préservant, grâce à la preuve d'existence, la nature logique des nombres.

## II-2. Les critiques de Batitsky et de Wright :

<sup>1</sup> Sur trois points essentiellement : 1) Frege ne définit pas les réels positifs puis les réels négatifs, il commence par définir les nombres négatifs et étend ensuite sa construction aux réels ; 2) les quantités ne sont pas définies implicitement par une axiomatique, ce sont des transformations ; 3) la preuve d'existence, également présente chez Frege, ne s'effectue pas tout à fait de la même façon. Je reviendrai sur le second point plus loin.

## II-2.1. La discussion avec Batitsky

En 2002, V. Batitsky, dont l'axe de recherche principal consiste à dégager les leçons épistémologiques de la théorie représentationnelle de la mesure (voir notamment son 1998), a publié dans *Philosophia Mathematica* un article visant à démontrer l'incompatibilité entre l'approche de Hale et la *theory of measurement*. Ce texte est suivi d'une réponse de Hale. Quelques mots très rapides, d'abord, sur la théorie représentationnelle de la mesure (pour plus à ce sujet, voir chap. 6). L'objet de la doctrine est de justifier, dans un contexte théorique donné, la possibilité d'une mesure. Pour expliquer, je vais prendre l'exemple des systèmes extensifs clos, qui sont les plus simples et qui sont également ceux que considère Hale. Un système extensif clos est une structure  $\langle X, \triangleleft, \oplus \rangle$ , où  $X$  est un domaine d'objets,  $\triangleleft$  une relation d'ordre total et archimédienne sur  $X$  et  $\oplus$  une opération de « concaténation » (d'addition) associative et close sur  $X$ , compatible avec  $\triangleleft$ <sup>1</sup>. Les q-domaines normaux, comme les q-domaines pleins ou complets de Hale, sont ainsi des systèmes extensifs<sup>2</sup>. Justifier qu'un système extensif est mesurable au sens de la *theory of measurement*, c'est montrer qu'il existe une application  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x$  et  $y$  appartenant à  $X$  :

- 1)  $x \triangleleft y \Rightarrow x < y$
- 2)  $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$
- 3)  $\forall g : X \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant 1) et 2),  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$  telle que  $g(x) = \alpha f(x)$ .

Démontrer l'existence d'une fonction satisfaisant 1) et 2) consiste à prouver un théorème de représentation pour le q-domaines  $\langle X, \triangleleft, \oplus \rangle$ . Dériver 3) équivaut à donner les conditions d'unicité de la représentation dont la possibilité est démontrée en 1) et 2). Si le q-domaine est complet, au sens de Hale, on peut même démontrer qu'il existe une fonction  $h$  bijective de  $X$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$  satisfaisant les trois conditions listées.

Comme le dit Batitsky, « les théorèmes de représentation justifient l'applicabilité des nombres réels en tant que mesures des quantités en nous apprenant que (une certaine partie) de la structure ordinaire et algébrique de la droite réelle constitue un 'miroir mathématique' de la structure ordinaire et algébrique de relations physiques et d'opérations sur les objets (...) qui ont ces quantités » (291). Les théorèmes d'unicité déterminent quelle latitude nous avons, étant donné ce que nous voulons représenter, dans le choix de notre fonction de mesure (notées  $f$  et  $g$  plus haut). Ainsi, dans les systèmes extensifs, les mesures sont les mêmes à un facteur multiplicatif près (qui correspond « au choix de l'unité »). Dans la perspective représentationnelle, la mesure se définit donc comme un morphisme (ici un isomorphisme) entre deux structures indépendantes : une structure « empirique », représentée, dans le cas considéré, par le système extensif  $\langle X, \triangleleft, \oplus \rangle$ , d'une part, et une structure numérique, ici  $\langle \mathbb{R}^{+*}, <, + \rangle$ , d'autre part. L'image du miroir, employée par Batitsky, est excellente : le fait qu'un miroir reflète ce qui est en face de lui présuppose une séparation entre la scène reflétée et ce qui la reflète, à savoir le miroir considéré dans sa matérialité propre. Ainsi, la théorie représentationnelle de la mesure présuppose une conception des nombres de type « dedekindien », qui ne relie pas la nature des nombres à la quantité. Cette identification de la mesure à un morphisme entre deux structures posées comme indépendantes l'une de l'autre est donc la raison pour laquelle un adepte du paradigme représentationnel ne peut que rejeter la construction de Hale et ApC. Tout l'effort de Hale consiste en effet à rejeter la

<sup>1</sup> Pour une liste exhaustive des axiomes que doit satisfaire un système extensif, voir chapitre 6 et Krantz 1971, 72-73 ; voir également Suppes 1951.

<sup>2</sup> Il y a une différence, mineure : les systèmes extensifs sont censés être des systèmes relationnels empiriques, dont le domaine est constitué d'entités « concrètes ». Les q-domaines sont des classes d'entités abstraites.

séparation entre réels et quantités, présente dans les définitions arithmétiques. Non amendée, l'approche néo-logiciste rend impossible la *theory of measurement*.

Dans son article, Batitsky adresse deux critiques plus spécifiques à la perspective néo-fregéenne : la première est dite « ontologique » ; la seconde, plus difficile à parer, est dite « épistémologique ». Un mot d'abord sur la première. Batitsky accuse Hale d'avoir confondu entités mathématiques et physiques (289) :

La nature des quantités, à la différence de celle des nombres, ne peut être comprise complètement indépendamment des faits concernant le monde physique, précisément parce que les quantités sont des abstractions de relations physiques et d'opérations sur des objets concrets. (...) Les quantités, n'en déplaise à Hale, sont des entités physiques (même si également hautement théoriques) et c'est une erreur de penser que leur statut d'« abstractions » justifie une stipulation *a priori* concernant leur structure logique.

Autrement dit, selon Batitsky, Hale n'aurait pas complètement échappé à la menace de « contamination » dont parlait Frege. Refusant de suivre Burali-Forti, Armstrong et ses disciples dans la voie consistant à physicaliser les nombres, il aurait néanmoins brouillé la différence entre connaissance *a priori* et *a posteriori* en assimilant la notion de quantité un concept logique. On l'a noté, la stratégie consistant à démontrer l'existence de q-domaines complets en construisant des modèles numériques paraît, à première vue, circulaire, puisque l'existence de ces domaines, outils indispensables pour définir les réels, est prouvée par l'engendrement de quantités qui ressemblent à s'y méprendre à des réels ! Mais, comme le souligne Hale dans la réponse qu'il fait à Batitsky<sup>1</sup>, cette « circularité » n'est absolument pas vicieuse. Elle est en réalité déjà présente dans le cas entier. Le principe de Hume stipule que, soient *F* et *G* deux concepts sortaux quelconques, le nombre de *F*s = le nombre de *G*s ssi les *F*s et les *G*s peuvent être bijectivement corrélés. Pour démontrer, à partir de ce principe, le théorème de Frege, les néo-logicistes considèrent le sortal «  $x=0 \vee x=1 \vee \dots \vee x=n$  », qui a, par construction,  $n+1$  instances. La restriction des sortaux à des prédicats physiques rendrait donc impossible la dérivation du théorème de Frege à partir de (PH). Selon Hale, la situation est pour les réels la même que pour les entiers. Dans « *Reals by Abstraction* », la notion de q-domaine est définie axiomatiquement ; elle est donc complètement générale ; rien n'interdit dès lors de considérer des entités abstraites, engendrées par des principes d'abstraction, comme des quantités. L'objection de Batitsky repose sur une pétition de principe (les quantités sont des objets physiques) que Hale rejette – avec raison, me semble-t-il<sup>2</sup>.

A cette première critique, Batitsky en ajoute une autre, plus forte. Comme nous l'avons vu, les q-domaines complets de Hale sont des systèmes extensifs (clos). Or, Batitsky souligne qu'il existe de très nombreux systèmes de mesure qui ne sont pas extensifs. Nous employons par exemple couramment les nombres pour mesurer la dureté des roches, ou la force des vents – les échelles que nous utilisons sont alors ordinales : seul l'ordre des nombres véhicule une information empirique, non leurs rapports. Dans d'autres circonstances, nous utilisons des dispositifs dans lesquels l'unité et le zéro doivent être fixés (échelle d'intervalle), ou encore des systèmes où nous apprécions un « équilibre » entre différentes composantes de certaines sortes de quantités (système additif conjoint)<sup>3</sup>. Hale noue de façon extrêmement étroite les nombres à la mesure des grandeurs extensives – est-ce à dire que l'application des nombres à

<sup>1</sup> Hale 2002, 319-320.

<sup>2</sup> Batitsky semble considérer que, étant donné son projet, Hale aurait dû être physicaliste. Il y a là une profonde incompréhension du projet néo-logiciste. Il est vrai que dilemme de Benacerraf constitue le point de départ à la fois des néo-fregéens (voir *infra*. pour plus sur ce point). Mais alors que la stratégie physicaliste consiste à rejeter l'idée que les objets mathématiques sont abstraits (à rejeter l'idée qu'ils n'interagissent pas avec notre esprit), les néo-logicistes visent au contraire à montrer comment les principes d'abstraction (légitimes) peuvent expliquer le fait que nous puissions connaître de tels objets. Pour Hale et Wright, c'est par un « *recarving of the content* », un remodelage du contenu du membre de droite des divers principes d'abstraction légitimes que les *abstracta* apparaissant dans le membre de gauche sont engendrés et connus.

<sup>3</sup> Pour une présentation de systèmes non extensifs, voir Batitsky 2002, 292-296 et notre chap. 6. Pour les systèmes conjoints, très important en économie, voir Krantz 1971, 245.

d'autres types de quantité n'est pour lui pas légitime ? Comment expliquer le rôle que joue chez Hale ce qui n'est, selon Batitsky, qu'un dispositif de mesure parmi d'autres ?

Hale réagit à cette critique en distinguant trois niveaux dans la *Frege's Constraint* (2002, 312) :

Il y a, premièrement, une lecture entièrement anodine selon laquelle la *Constraint* ne demanderait pas plus que, et serait complètement satisfaite par, la donnée de théorèmes de représentation du genre de ceux que l'on trouve dans la théorie du *measurement*. Il y a, deuxièmement, la lecture exorbitante qui requiert que, si les réels sont définis par abstraction, l'abstraction doit se définir à partir d'une relation d'équivalence ou de relations ayant lieu entre des masses, des longueurs, etc... choisies de façon pertinente. Il y a une troisième lecture pour laquelle la *Constraint* requiert plus que la première mais bien moins que la seconde – qui requiert qu'une définition adéquate des réels doit, comme Dummett le dit, 'manifester le principe général qui sous-tend l'usage des nombres réels pour caractériser la grandeur des quantités de tel ou tel genre' (...). Ma thèse présente est seulement que ni le premier ni le second – que Batitsky semble penser être la seule alternative au premier – peut être plausiblement considéré capturer ce que Frege avait en tête.

Dans le premier sens, *ApC* (dans le cas réel) peut être compris comme l'exigence de prouver un théorème de représentation. Cette lecture est trop faible, dans la mesure où elle présuppose que  $\mathbb{R}$  nous est donné indépendamment de tout rapport avec les quantités. Dans un second sens, l'*ApC* est vu comme une demande de mise en connexion des nombres avec un système de quantités particulier. L'interprétation est trop forte, précisément parce qu'elle conduit à la situation que Batitsky dénonce : le privilège accordé à une échelle empirique particulière, et la mise à l'écart corrélatrice des autres dispositifs. Hale prône donc une lecture modérée, intermédiaire, de *ApC* : le but de la contrainte est de dégager les principes généraux qui sous-tendent la mesure des grandeurs, et non d'expliquer comment tel ou tel genre de quantité peut être représenté par des nombres.

Afin de montrer qu'il n'y a pas incompatibilité entre *ApC* et la théorie représentationaliste, Hale propose donc une réorganisation minimale de cette dernière. Au lieu de séparer structures numériques et structures quantitatives, Hale relie les réels à un domaine quantitatif privilégié, les *q*-domaines complets, qui constitueraient la matrice de tous les autres systèmes quantitatifs. Dans ce nouveau cadre, les théorèmes de représentation ne disparaîtraient pas : leur nouvelle fonction serait de montrer comment les autres systèmes peuvent être conçus comme une particularisation du « concept général de grandeur ». Selon Hale, cette approche, loin de lui être incompatible, complèterait la *theory of measurement*. La classification des différents systèmes de mesures serait, dans le nouveau dispositif, conçue comme un tableau des diverses particularisations du concept général de quantité. Le diagramme suivant reprend les divers éléments :

Théorie représentationaliste standard				
Modèles numériques				Systèmes empiriques
$\langle \mathbb{R}, < \rangle$				$\langle X, \blacktriangleleft \rangle$ (échelle ordinale)
$\langle \mathbb{R}, <, + \rangle$				$\langle X, \blacktriangleleft, \oplus \rangle$ (échelle extensive)
$\langle \mathbb{R}, \Delta \rangle$				$\langle X, D \rangle$ (échelle d'intervalle) <sup>1</sup>
....		....		....
La proposition de Hale				
Définition des réels comme rapports de quantités		Concept général de quantité (q-domaine complet)		Systèmes quantitatifs empiriques particuliers
$\langle \mathbb{R}, <, + \rangle$	lié par définition à	$\langle X, \blacktriangleleft, \oplus \rangle$	représentent	$\{ \langle X, \blacktriangleleft, \oplus \rangle \text{ (extensif)}$ $\{ \dots$ $\{ \langle X, D \rangle \text{ (intervalle)}$

Tout le problème est de comprendre pourquoi les q-domaines complets doivent être privilégiés et considérés comme l'expression du concept général de grandeur. Hale affirme que, « dans la perspective d'une explication de la façon dont les réels sont appliqués à la mesure, les quantités extensives simples, comme la masse, la longueur, etc... sont les cas fondamentaux » (316) – fondamentaux, au sens où « la mesure des autres quantités dépend, directement ou indirectement et en de multiples manières, (...) de la possibilité de mesurer les quantités de ce genre » (*Ibid.*). Mais il ne justifie jamais cette thèse. Or, d'un point de vue purement logique, celle-ci n'a pas de sens. Les différents systèmes de mesures sont tous de types différents et sont donc difficilement comparables<sup>2</sup>. Si l'on adopte un critère logique, alors on devrait considérer les systèmes ordinaux (exclus par Hale<sup>3</sup>) comme étant les plus généraux. D'un point de vue historique, la thèse de Hale pourrait être défendue : les systèmes extensifs ont occupé une place centrale jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. Mais Hale n'adopte pas une perspective historique, et c'est heureux, car Batitsky aurait alors beau jeu de rappeler que, si la mesure extensive a été historiquement fondamentale, il n'en va plus de même aujourd'hui.

On le voit, la question ici n'est pas celle, ontologique, du statut physique ou logique des grandeurs, mais celle, épistémologique, du lien noué par Hale entre nombre et système extensif. Que l'existence de q-domaines complets puisse être garantie *a priori* n'est pas le problème ; la difficulté porte sur les raisons qui conduisent à privilégier l'étude de ces systèmes quantitatifs. Une idée similaire sous-tend la critique de C. Wright, que nous allons maintenant examiner.

## II-2.2. La critique de Wright :

<sup>1</sup> Pour plus sur ces systèmes, voir Suppes & Zinnes 1968, 35-38, et notre chap. 6.

<sup>2</sup> Le type d'un système empirique  $\langle X, R_1, \dots, R_n, O_1, \dots, O_m \rangle$  est défini par la cardinalité de l'ensemble  $X$ , par le nombre des relations et opérations, et leurs arités.

<sup>3</sup> Hale 2002, 317.

Wright dans son « *Neo-Fregean Foundations for Real Analysis* » (2000) compare les mérites respectifs des deux manières d'étendre le programme néo-logiciste au cas réel, la voie « dedekindienne », suivie par Shapiro et la méthode empruntée par Hale, fidèle à *ApC*. L'auteur commence par établir une analogie entre le cas réel et le cas entier : l'opposition entre Hale et Shapiro peut être comparée à celle entre la dérivation de  $\mathbb{N}$  à l'aide de (PH) et la déduction, proposée par G. Boolos (1984), de l'arithmétique à partir d'une modification de l'axiome V, nommé « New V ». Dans ce contexte, c'est *ApC*, explique Wright, qui donne au raisonnement néo-fregéen son caractère distinctement philosophique (319) :

Le principe de Hume plus la logique du second ordre suffisent pour construire une  *$\omega$ -sequence*. Ceci a certainement un intérêt mathématique. Mais cela ne suffit pas à singulariser la situation par rapport à celle qui peut être obtenue dans un système composé de, par exemple, la logique du second ordre et l'axiome New V de Boolos. Ce qui donne au théorème de Frege son intérêt *distinctement philosophique* est que le principe de Hume donne corps à une explication de *ce que les nombres cardinaux sont*.

D'un point de vue structuraliste (celui de Shapiro par exemple), les dérivations par New V ou par (PH) sont également satisfaisantes : elles caractérisent le même objet mathématique (une  *$\omega$ -sequence*) et doivent donc être considérées comme équivalentes. Mais Wright souligne que l'enquête, fondationnelle, n'est pas ici purement mathématique ; elle est philosophique : il s'agit de dire ce que *sont* les nombres, de dégager une *essence* des entiers. C'est dans ce contexte que *ApC* joue un rôle crucial (325) :

La *Frege's Constraint* et l'insistance mise sur l'opposition entre rendre compte d'une théorie mathématique et rendre compte seulement d'une théorie qui peut être interprétée comme ladite théorie, ont en commun l'idée que les objets des théories classiques (...) ont une essence qui transcende tout ce que partagent les (...) modèles des formulations (en second ordre), même catégoriques, de ces théories. La *Frege's Constraint* incorpore explicitement la pensée additionnelle que cette essence doit être située dans les applications (...). Les théories mathématiques pures ne font aucune distinction entre les entités (sur lesquelles elles portent) et n'importe quelle autre structure isomorphe – qu'est-ce qui donc pourrait les distinguer, si ce n'était quelque chose qui concerne l'application ?

Que les objets mathématiques ne se réduisent pas à leur structure, alors que, dans le même temps, seule la structure importe en mathématiques, conduit Wright à lier, de façon fort cohérente, l'interrogation sur l'essence des entiers à celle portant sur leurs applications. Pour les néo-logicistes,  $\mathbb{N}$  n'est pas n'importe quelle  *$\omega$ -sequence* ;  $\mathbb{N}$  est l' *$\omega$ -sequence* engendrée par (PH) parce que (PH) explique comment associer les nombres aux concepts sortaux dans un dénombrement, ce que ne fait pas « New V ». *ApC* est donc pour Wright le critère (le seul possible, semble-t-il, selon Wright) permettant de sélectionner, parmi les différentes constructions structurellement équivalentes de  $\mathbb{N}$ , celle qui incarne l'essence de  $\mathbb{N}$ .

Etant donné le rôle qu'il assigne à *ApC* dans la construction des entiers, on aurait pu s'attendre à ce que Wright rejette l'approche structuraliste de Shapiro. De même qu'il faut choisir (PH) plutôt que « New V », de même, aurait-on pu penser, il faudrait retenir la construction de Hale au détriment de la voie dedekindienne. Wright ne suit toutefois pas ce chemin : « une reconstruction abstractionniste des réels qui suit la voie dedekindienne », affirme-t-il dans sa conclusion, « ne présente, d'un point de vue néo-fregéen, aucun défaut majeur » (329). C'est que l'analogie entre le cas entier et le cas réel n'a pas pour fonction, chez Wright, de rabattre le second sur le premier, mais, au contraire, de souligner à quel point les deux cas sont distincts. Ainsi (320) :

Le fait est que le principe de Hume joue deux rôles assez différents. Il n'y a, *a priori*, aucune raison particulière pour qu'un principe destiné à délivrer une explication d'un genre particulier d'entités mathématiques fournisse aussi une base axiomatique suffisante pour développer la théorie mathématique standard de ce genre d'entité. (...) Bien entendu, nous pouvons nous attendre à ce que les deux tâches (définir une essence, dériver une théorie)

interagissent. Mais la caractéristique singulière de la fondation néo-fregéenne de la théorie des nombres est que un seul principe fondateur, le principe de Hume, remplit les deux rôles. Ce n'est pas une caractéristique dont nous devons attendre à ce qu'elle se répète (...) lorsqu'on en vient à développer les fondations abstractionnistes d'autres théories mathématiques classiques.

Wright distingue donc la tâche consistant à dériver la structure que les mathématiciens prennent pour objet d'étude de celle consistant à définir une essence. En cela, il s'oppose à la fois à Shapiro et à Hale. Shapiro estime en effet que la mission du philosophe des mathématiques est seulement de définir la forme commune à tous les modèles isomorphes de la théorie ; il refuse donc de prendre en considération la seconde tâche. Hale, quant à lui, maintient au contraire que le philosophe des mathématiques a pour tâche de dégager l'essence des entités étudiées ; il refuse en conséquence d'accorder toute autonomie à la première des deux missions. Les deux philosophes, en confondant chacun à leur façon, ce que Wright distingue, font la même erreur : Shapiro affirme que satisfaire *ApC* n'est *jamais* important ; Hale maintient qu'une bonne définition doit *toujours* expliquer les principales applications du concept introduit. La distinction entre « définir une essence » et « dériver une théorie » permet à Wright de proposer une voie moyenne : la nécessité d'adhérer à *ApC* dépend de la nature de la théorie analysée. Dans certain cas, la seule mission du philosophe néo-fregéen est de dériver la structure de la théorie considérée à partir de la logique du second-ordre et certains principes d'abstraction<sup>1</sup> – dans d'autres, *ApC* doit être respecté.

Bien entendu, la difficulté est alors de déterminer les critères permettant de distinguer les cas où l'usage d'*ApC* est légitime des cas où il ne l'est pas. Wright reste prudent sur cette question, se contentant de pointer une condition (parmi d'autres possibles) qui nécessite le recours à *ApC*. Ce serait, selon Wright, « parce que la connaissance (arithmétique élémentaire) est induite (...) à partir d'une réflexion sur des applications paradigmatiques ou schématiques » (327), que les applications devraient être prises en compte au niveau des définitions. Wright généralise l'idée : *ApC* doit être suivi chaque fois qu'une partie du contenu de ce que nous connaissons peut être développée simplement à partir d'une analyse réflexive sur les « concepts acquis au cours des décomptes et des calculs ordinaires, des opérations de mesure, et des routines géométriques du genre de celles employées en menuiserie » (328). Lorsque la théorie peut être construite à partir d'une réflexion sur ses applications, il est philosophiquement trompeur de séparer la définition des concepts de base de leurs usages extra-mathématiques<sup>2</sup>. Wright pose alors la question : la connaissance que nous avons des réels peut-elle être fondée sur les procédures de mesure ? La réponse est non (328) :

Il n'existe tout simplement aucune procédure de mesure (...) déterminant une valeur réelle d'une quantité – n'importe quel ensemble de mesures que nous obtiendrons sera fini, et, même dans le meilleur des cas, aucune distinction ne pourra être faite entre la convergence de ces mesures vers une valeur réelle et la convergence des mêmes mesures vers une autre valeur infiniment (...) proche de la première.

On retrouve le point évoqué plus haut, à propos du « physicalisme » :  $\mathbb{Q}$  étant dense dans  $\mathbb{R}$ , on ne peut pas induire la complétude des procédures empiriques de mesure. Le rapport entre la structure de  $\mathbb{R}$  et la mesure n'est donc pas de même nature que celui qu'à  $\mathbb{N}$  avec le dénombrement ; comme le souligne Wright, « le mouvement de la formation de concept est

---

<sup>1</sup> Ici, j'ai fait comme si la différence entre logicisme et structuralisme tenait uniquement à l'adoption ou non d'*ApC*. Dans l'appendice qui suit son analyse (2000, 329-332), Wright précise que ce n'est pas le cas. Pour un néo-fregéen, l'axiomatisation, si elle permet de définir un concept, ne nous donne pas accès à un objet. Les principes d'abstraction permettent, eux, d'aller au-delà de la simple description axiomatique, en nous livrant un objet. Je laisse ce point crucial, mais qui ne touche pas directement notre problème, de côté.

<sup>2</sup> Voir notamment *Ibid.* 327 : « Le structuraliste peut (...) être critiqué pour avoir changé de sujet : quel que soit le détail de l'histoire épistémologique qu'il raconte à propos des vérités simples de l'arithmétique, le contenu dont il rend compte ne sera pas celui de notre connaissance effective – car (...) ce dernier peut être fondé sur une réflexion à partir des applications paradigmatiques ou schématiques. »



(dans le cas des réels) orienté dans l'autre direction : les mathématiques classiques de la continuité sont utilisées pour élaborer une restructuration non empirique des paramètres (de l'expérience) » (329), elles ne sont pas induites à partir de leurs applications. En conséquence, rien n'impose de lier, comme Hale entend le faire, la définition des réels à *ApC*.

Il faut distinguer deux arguments dans l'analyse de Wright. Le premier, de nature métaphilosophique, consiste à distinguer deux sortes de tâches : celle consistant à rendre compte de la « théorie » mathématique considérée ; celle consistant à définir l'essence des entités mathématiques étudiées. La première tâche est une exigence qui s'impose inconditionnellement à tout philosophe des mathématiques, quel que soit le champ considéré<sup>1</sup>. La seconde est optionnelle : il y a des cas où la mission ne peut être accomplie. Le deuxième argument développé par Wright concerne plus spécifiquement l'usage de *ApC* dans la construction des réels, et il ressemble à certains égards à la critique épistémologique que Batitsky adresse à Hale. Pour Wright, il est impossible de dériver la propriété de complétude de l'analyse des procédures empiriques de mesure. Le philosophe met donc en question le lien tissé par Hale entre la mesure, les réels et les q-domaines complets<sup>2</sup>. Certes, Wright ne fait pas appel, comme Batitsky, à la diversité des systèmes de mesure. Mais les deux auteurs se rejoignent dans l'idée que le rapport entre systèmes de mesure extensifs et nombres réels est moins immédiat, moins direct, que ne le prétend Hale. Wright et Batitsky frappent la même cible : le lien noué par Hale entre nombres et q-domaines complets.

Au terme de cette étude de « *Reals by Abstraction* » et des principales critiques qui lui ont été adressées, deux questions se posent donc :

- Faut-il, et si oui pourquoi, souscrire à *ApC* dans le cas réel ? N'est-il pas plus raisonnable d'abandonner l'*Application Constraint* et de souscrire à une approche structuraliste ?
- Dans l'hypothèse où l'on maintienne *ApC* dans toutes ses exigences, n'est-il pas envisageable de dénouer le lien entre les nombres et les q-domaines complets – qui focalise à la fois les critiques de Batitsky et de Wright ?

Dans la section qui suit, je vais montrer que la partie VI des *Principia* nous donne les moyens de répondre positivement à la seconde question, et de relâcher ainsi la pression qui pèse sur l'approche de Hale. Je vais ensuite défendre l'idée que Russell et Whitehead nous permettent d'envisager une défense de *ApC* dans son application au cas réel, c'est-à-dire de formuler une réponse positive à la première question.

### III- *Principia* VI et l'*Application Constraint*

Russell et Whitehead souscrivent à *ApC*, mais à la différence de Hale, ils ne font pas dépendre les propriétés des rationnels et des réels de la structure d'un domaine quantitatif particulier, et préviennent par là les critiques de Batitsky et de Wright. L'originalité des *Principia* est de présenter une approche résolument « ontologique » de la grandeur : au lieu de définir, à la façon de Hale, les quantités comme des entités satisfaisant un certain nombre de propriétés énumérées dans les axiomes (sans donc chercher à déterminer plus avant la nature de ces entités), Russell et Whitehead posent que les grandeurs sont des *relations* d'un certaine sorte (i.e. les éléments d'une famille vectorielle). Cette partie vise à explorer les profondes différences entre la construction présentée par Hale et celle que l'on trouve dans *Principia* VI. Dans une première section, je montre en quoi la doctrine de Russell et de Whitehead permet d'échapper aux objections adressées Hale. Dans les deux dernières parties, je cherche les

<sup>1</sup> Ce que nous avons reproché à Bigelow et Pargetter dans la section 1 est de ne pas satisfaire à cette exigence minimale.

<sup>2</sup> Remarquons d'ailleurs que dans la *theory of measurement*, aucune hypothèse n'est faite sur la complétude de la relation d'ordre ◀.

raisons pour lesquelles Russell et Whitehead adhèrent à *ApC* dans le cas réel. L'idée est essentiellement de souligner que Hale comme Wright et Shapiro adhèrent à ce qui est parfois appelé la *Faithfulness Constraint*, i.e. au principe, avancé pour la première fois par Benacerraf, selon lequel la grammaire de surface doit être considérée comme un guide dans l'analyse philosophique des énoncés mathématiques. Russell et Whitehead rejettent ce principe. Pour eux, la syntaxe ne nous donne pas d'information sur la structure du contenu exprimé. Cette différence est fondamentale pour dégager le rôle que *ApC* joue dans les *Principia* : l'*Application Constraint*, loin de l'accompagner, se substitue à la *Faithfulness Constraint*, et guide, chez les deux logiciens, la structuration même du contenu mathématique.

### III- 1. Nombres purs et nombres appliqués

Trois éléments distinguent la conception de Hale de celle de Russell et Whitehead :

(1) Alors que chez Hale (comme chez Frege), les nombres sont des relations entre quantités, une distinction est faite, dans les *Principia*, entre nombres purs et nombres appliqués. Les premiers relient des relations, sans qu'aucune contrainte (autre que typologique) ne soit posée sur ces relations. Les seconds s'appliquent à des éléments d'une famille de vecteurs particulière, i.e. à des grandeurs d'un certain genre.

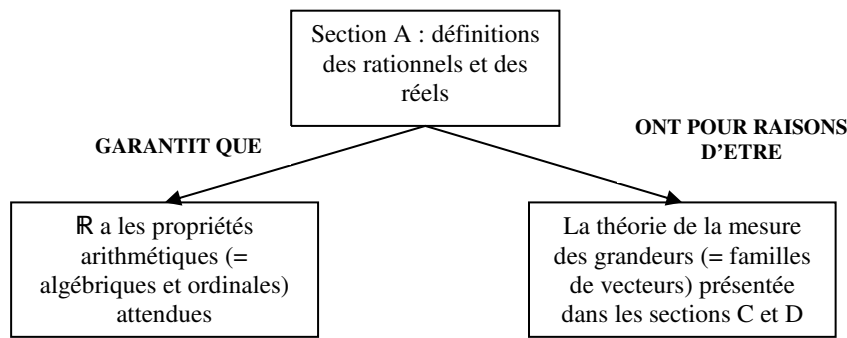
(2) Pour Hale, les quantités sont les éléments d'une certaine structure additive, appelée *q-domaine*, définie axiomatiquement. Les quantités peuvent être des relations, mais elles ne le sont pas forcément. Pour Russell et Whitehead (comme d'ailleurs pour Frege<sup>1</sup>), les quantités sont des relations et l'addition quantitative est une composition (un « produit ») de relations.

(3) Pour Hale comme pour Frege, les réels sont définis sans que les rationnels soient préalablement introduits. Aucun « passage à la limite » n'est ainsi requis pour définir les réels. À l'inverse, dans les *Principia*, les rationnels et les réels ne se définissent pas de la même façon, puisque un réel correspond à l'union d'un segment de rationnels.

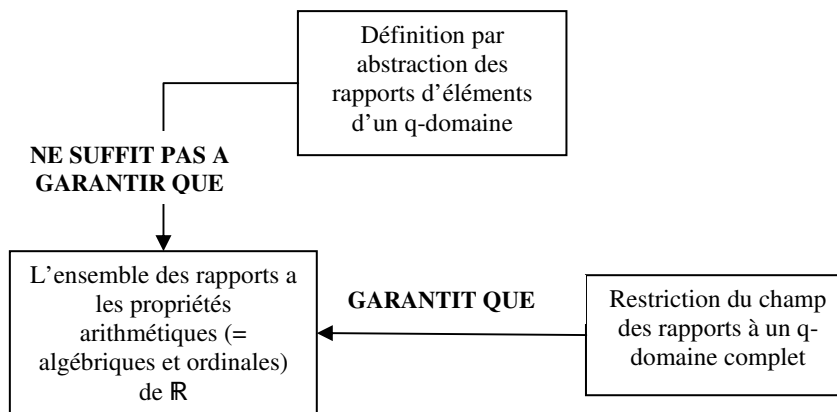
Les deux premiers points sont fondamentaux. Ils instituent une rupture complète dans la manière de mettre en œuvre *ApC*. Les propriétés ordinales des réels sont héritées chez Hale des propriétés ordinales des *q-domaines* complets. S'il ne partage pas le physicalisme de Burali-Forti, puisqu'il construit un modèle « logique » des *q-domaines*, Hale reprend à son compte l'essentiel du raisonnement du mathématicien italien : les réels ont leurs propriétés attendues que s'ils sont définis comme rapport d'éléments de *q-domaines complets*. Dans les *Principia* en revanche, les caractéristiques « arithmétiques » des nombres purs sont directement déduites des définitions (point 2), et les restrictions sur les domaines de relation ne sont posées que dans un second temps, pour garantir la possibilité d'utiliser les nombres dans les opérations de mesure (point 1). Rappelons le schéma par lequel nous résumons la structure de la section A de *Principia* VI :

---

<sup>1</sup> Frege identifie lui aussi les quantités à des relations, mais il le fait pour rendre compte des nombres négatifs. Sur la théorie des réels de Frege, voir Dummett 1991, chap. 22.



Comparons-le au schéma qui sous-tend le raisonnement de Hale :



Dans le premier schéma, la partie gauche est complètement indépendante de la partie droite, et la restriction du domaine des nombres relations s'opère une fois que les nombres, dotés de leurs propriétés attendues, ont été construits. Dans le second schéma, en revanche, la restriction du champ des nombres à certains domaines, qui garantit que les nombres aient les bonnes propriétés, ne peut être remise à plus tard. La différence est bien évidemment essentielle : Russell et Whitehead coupent le lien tissé par Hale entre les réels et les q-domaines complets – lien qui était la cible des attaques de Batitsky et Wright.

Hale pourrait toutefois objecter que l'approche de Russell et de Whitehead ne satisfait pas à *ApC* ; la théorie de l'application des nombres à la mesure des grandeurs étant repoussée dans la section C, on ne verrait plus véritablement ce qui distingue la définition des *Principia* de celle des « arithméticiens » Cantor et Dedekind. Mais rabattre ainsi la démarche des logicistes sur celle des « arithméticiens » serait une erreur. Comme nous l'avons vu au chapitre 4, l'introduction des relations dans la définition des rationnels en \*303.01 n'est justifiée que par l'application des nombres à la mesure des quantités. Il n'y a donc pas une séparation étanche entre nombres purs et nombres appliqués – mais une réelle souplesse du dispositif qui ouvre la possibilité de développer une théorie des nombres purs indépendante de tout rapport aux applications. Cette flexibilité est illustrée par la structure circulaire de la partie VI : Russell et Whitehead ne cessent de renvoyer, dans la partie A, aux développements des parties C et D, tout en soulignant que les propriétés arithmétiques des nombres purs ne dépendent pas de la théorie de la mesure. La distinction entre « garantie » et « raison d'être » (voir le premier

diagramme) permet de satisfaire l'*Application Constraint* tout en déduisant les propriétés arithmétiques des nombres sans poser de contraintes supplémentaires sur les relations appartenant à leur domaine – ni la voie dedekindienne (qui rejette toute relation entre nombre et quantité), ni l'approche de Hale (qui, en obérant cette distinction, rigidifie le lien entre nombre et quantité) ne permet d'accomplir une telle tâche.

Il faut aller plus loin. Rappelons que Hale, dans sa réponse à Batitsky, plaidait pour une interprétation modérée de *ApC* selon laquelle la contrainte doit « caractériser le principe général qui sous-tend l'usage des nombres réels pour caractériser la grandeur des quantités de tel ou tel genre ». Le problème posé par la solution de Hale provenait du fait qu'on ne voyait pas vraiment en quoi les *q*-domaines complets constituaient la matrice à laquelle toutes les autres formes de grandeurs se rattachaient. Russell et Whitehead partagent l'idée que *ApC* livre le principe *général* de l'application des nombres – mais, chez eux, la thèse s'incarne dans des définitions. Les logiciens caractérisent les nombres purs comme des relations de relations (section A) et développent conjointement une théorie relationnelle des grandeurs (section B). Cette double manœuvre leur permet de penser l'application des nombres à la mesure des grandeurs comme la conséquence d'une *restriction* du champ des relations que sont les nombres. Dans les *Principia*, les rationnels et les réels « s'appliquent » toujours à des relations (ils sont des relations de relations) ; lorsque, toutefois, ces relations sont des éléments d'une certaine classe (les familles vectorielles mesurables) alors les nombres « purs » deviennent des nombres « appliqués », i.e. des rapports entre quantités. Hale, rappelons-le, était obligé de soutenir que la mesure dans les *q*-domaines complets était « fondamentale », sans parvenir à donner un contenu clair à cette priorité. Dans les *Principia*, la thèse selon laquelle le champ des nombres purs est plus général que le champ des nombres appliqués est un théorème logique.

Je me suis pour l'instant focaliser sur les deux premiers points de la liste présentée plus haut, et n'ai rien dit du troisième, qui concerne la distinction des réels et des rationnels. L'idée est cependant importante et découle directement de la volonté de rendre les propriétés arithmétiques des réels indépendantes de la structure des familles de vecteurs. La définition des réels présentée dans les *Principia* est, rappelons-le, la suivante : soit  $R$  un segment dans  $\mathbb{Q}$  (i.e. le premier élément de la coupure) construit comme ensemble de ratios à la façon de \*303.01 ; Russell et Whitehead définissent le réel correspondant au segment  $R$  comme la somme ensembliste de ce segment, soit  $\cup R$ . Dans les *Principia*, la définition des réels fait donc très explicitement appel aux procédures, classiques depuis Dedekind, de définition de  $\mathbb{R}$  à partir de coupures sur  $\mathbb{Q}$ . Hale pourrait voir dans cette reprise une entorse à *ApC* dans la mesure où on ne voit pas très bien pourquoi, lorsque l'on cherche à connecter les nombres à leurs applications dans la mesure, il faudrait distinguer le cas des nombres irrationnels du cas des nombres rationnels. L'argument ne serait toutefois pas très convaincant. On l'a vu, dans son 2000, Wright faisait remarquer que les réels ne sont jamais utilisés de façon directe dans la mesure, mais qu'ils apparaissent seulement par le biais d'opérations de passage à la limite<sup>1</sup> ; il en tirait la conclusion qu'il n'était pas pertinent de définir les réels comme des rapports de quantité. Dans la section C, qui donne les raisons d'être des définitions de la section A, Russell et Whitehead reprennent précisément cette idée. Une théorie de l'application des réels à la mesure des quantités doit expliquer le fait que « la mesure de la limite d'un ensemble de vecteurs rationnels est la limite de leurs mesures » (1913, 442). Or la définition des réels vise précisément à garantir cela. Rappelons en effet que, soit  $\kappa$  une famille sérielle et  $X$  un réel, l'ensemble des  $\kappa$ -multiples de  $T$  qui sont contenus dans  $X$  sera une famille rationnelle. Dans ce contexte, le vecteur de coordonnée réelle  $X$  ( $T$  étant l'unité) est défini comme la borne inférieure de l'ensemble des multiples de  $T$  contenus dans  $X$  lorsque cet ensemble est ordonné

---

<sup>1</sup> Wright 2000, 328.

par la relation  $U_{\kappa}$ . Par construction, donc, la mesure de la limite d'un ensemble de vecteurs rationnels est bien la limite de leurs mesures. Loin d'être un défaut, la distinction entre définitions des rationnels et des réels permet de prévenir l'objection de Wright : satisfaire *ApC* dans le cas réel, ce n'est pas définir les réels comme des rapports de quantité, mais garantir que la mesure de la limite d'un ensemble donné de quantités soit la limite de leurs mesures. La définition de Dedekind, ne faisant pas référence à la quantité, ne permet pas de satisfaire cette condition. Le raisonnement développé dans les *Principia* accomplit en revanche cette tâche. Sur ce point aussi, la théorie de Russell et de Whitehead paraît supérieure à celle de Hale.

### III- 2. Pourquoi souscrire à l'*ApC* ? Le structuralisme et la *Faithfulness Constraint*

Dans la littérature, le débat suscité par l'extension du programme logiciste a jusqu'à présent tourné autour de la question de savoir s'il fallait ou non admettre *ApC*. La lecture de *Principia* VI nous montre toutefois que la façon dont Hale met en œuvre *ApC* dans le cas réel n'est pas la seule option possible, et qu'elle n'est sans doute pas la plus efficace : la solution alternative adoptée par Russell et Whitehead, sans renoncer à l'essentiel, évite les critiques dont la construction néo-fregéenne a fait l'objet. La prise en compte de *Principia* VI pourrait donc contribuer à renouveler la discussion sur *ApC* dans le cas réel<sup>1</sup>.

Reste toutefois à répondre à la question fondamentale : pourquoi faudrait-il qu'une bonne définition des réels délivre les principes généraux de leurs applications ? Une chose est en effet de dire que *ApC*, telle que mise en œuvre dans *Principia* VI, échappe aux objections élevées à l'encontre de la version de Hale, autre chose est de donner des raisons positives de souscrire à *ApC*. Pourquoi donc défendre *ApC* ? Pourquoi ne pas se contenter des définitions « arithmétiques » cantorienne ou dedekindienne ?

On l'a vu, cette question est, chez Wright, soulevée dans le cadre plus général d'une confrontation avec le structuralisme. Wright comme Hale acceptent l'idée, développée par Shapiro, selon laquelle, d'un point de vue mathématique, rien ne distingue deux systèmes isomorphes, instances d'une même structure<sup>2</sup> – ils admettent donc que, en un sens minimal, la philosophie des mathématiques consiste seulement à rendre compte des structures que les mathématiciens prennent pour objet d'étude. Ce socle doctrinal, partagé par les néo-logicistes aussi bien que par les structuralistes, dérive en réalité de la commune adhésion à un principe mis en avant dans Benacerraf 1973, qui consiste à considérer que le philosophe doit prendre les énoncés mathématiques « *at face value* ». Shapiro nomme ce principe la *Faithfulness Constraint* (Shapiro 2006, 111 ; voir également Shapiro 1997, chap. 1) :

Tel que je le vois, le but de la philosophie des mathématiques est d'interpréter les mathématiques et de délimiter leur place à l'intérieur de l'entreprise scientifique générale. Un *desideratum* est d'avoir une interprétation des mathématiques dans laquelle la plus grande partie de ce que les mathématiciens disent de leur sujet, pris complètement, ou presque, à la lettre (*understood at or near face value*), soit considérée comme littéralement vraie. Appelons cela la contrainte de fidélité (*faithfulness constraint*). Selon le structuralisme *ante rem*, les

<sup>1</sup> D'un point de vue néo-logiciste, deux objections pourraient être soulevées contre *Principia* VI. La première concernerait l'axiome de l'infini. Une des grandes réussites du néo-logicisme est de se passer d'un tel axiome – de l'obtenir par le théorème de Frege. Russell et Whitehead utilisent, eux, un tel postulat. La différence est importante, certes ; mais rien n'interdit d'adopter une voie intermédiaire : adopter la théorie néo-fregéenne des entiers (donc éviter le recours à un axiome de l'infini) et lui greffer ensuite la construction russelliano-whiteheadienne des réels. La seconde critique porterait sur le fait que les procédures de construction utilisées dans *Principia* VI ne sont pas des principes d'abstraction. Il semble toutefois qu'une version abstractionniste du raisonnement de Russell et Whitehead puisse être formulée. Si c'était le cas (je n'ai pas effectué le travail), alors, même d'un point de vue néo-fregéen, il y aurait une alternative entre la façon fregéenne d'utiliser *ApC* et la manière russellienne de le faire.

<sup>2</sup> Je reprends ici la distinction proposée par Shapiro (1997, 73-74) entre système et structure. Un système est l'instanciation d'une structure. Deux systèmes peuvent donc être isomorphes (ils peuvent être des instances de la même structure), mais deux structures ne le peuvent pas.

nombre naturels sont des places dans des structures, et les places sont d'authentiques objets. Cela s'accorde avec la contrainte de fidélité. Grammaticalement, les nombres semblent fonctionner comme des termes singuliers, et selon le structuralisme *ante rem*, ce sont des termes singuliers.

Pour revenir aux cas qui nous occupent, un philosophe qui veut rendre compte de ce que sont les entiers doit, selon la « contrainte de fidélité » développer une théorie des  $\omega$ -sequences ; s'il s'intéresse aux nombres réels, il doit élaborer une théorie des ordres de type  $\theta$  archimédiens complets. Il peut ne pas s'en contenter, et chercher à aller au-delà de ce que la forme de surface des énoncés mathématiques impose – à déterminer laquelle parmi les  $\omega$ -sequences est  $\mathbb{N}$  (Wright et Hale), lequel parmi les ordres de type  $\theta$  est  $\mathbb{R}$  (Hale), en utilisant par exemple *ApC*<sup>1</sup>. Mais cette seconde tâche est, d'une certaine façon, périphérique ; le cœur de sa mission est de satisfaire la *Faithfulness Constraint*. Insistons-y, cette description de la situation ne correspond pas seulement à la façon dont Shapiro voit les choses. Elle exprime également les points de vue de Wright et de Hale : l'adhésion à *ApC* s'accompagne chez eux d'une adhésion à la *Faithfulness Constraint* – d'un respect pour les formes de surfaces des énoncés mathématiques<sup>2</sup>.

Je souhaite, dans ce qui suit, montrer que, pour Russell et Whitehead, *ApC* ne s'ajoute pas, mais se substitue à la *Faithfulness Constraint*. Je vais d'abord établir que les auteurs des *Principia* rejettent la *Faithfulness Constraint*. Dans la prochaine section, je ferai de ce rejet l'origine de leur adhésion à *ApC*. Hale, on vient de le voir, partage avec Wright et Shapiro l'idée que la forme de surface guide l'analyse des propositions mathématiques. Pour les auteurs des *Principia*, en revanche, l'analyse consiste à découvrir, sous la forme apparente, la structure réelle des propositions : la grammaire n'est donc plus, pour eux, un guide, et la question du choix entre diverses analyses se pose de façon beaucoup plus pressante. *ApC* permet de trancher ce choix et de guider l'analyse. C'est sur ce nouvel usage d'*ApC*, que j'appellerai « architectonique », que je vais à présent me pencher.

Commençons par établir le premier point. Dans les *Principia* comme dans *On Denoting*, les symboles incomplets jouent un rôle fondamental. Les notions premières de l'arithmétique (les nombres, etc...), du calcul différentiel (les fonctions, les *series*,...), mais également de la théorie des ensembles (les classes, ...), sont considérées comme des expressions incomplètes, appelées à disparaître dans le langage complètement analysé. Ce point est très connu et a fait l'objet de nombreuses études<sup>3</sup>. Prenons simplement un exemple – celui de la notion de fonction, que Russell et Whitehead définissent en \*30.01 ainsi :

$$R'x = (ty)(xRy) \text{ Df}$$

Le symbole à droite du signe d'égalité n'a pas de sens pris isolément. Il faudrait donc écrire \*30.01 de cette manière :

$$C(R'x) = \exists y(xRy \wedge \forall z(xRz \Rightarrow z=y) \wedge Cy) \text{ Df}$$

<sup>1</sup> Selon Shapiro, il doit s'en contenter. Il explique en effet, dans son 2006, que la *Faithfulness Constraint* s'accompagne d'une autre « règle », baptisée *Minimalist Constraint*, qui stipule que le philosophe ne doit pas (ou le moins possible) aller au-delà de ce que les mathématiciens disent de leur sujet d'étude (Shapiro 2006, 113 : la contrainte oblige « à ne pas attribuer de propriétés mathématiques à des objets mathématiques à moins que ces attributions soient explicites ou tout du moins implicites dans les mathématiques elles-mêmes »). La *Minimalist Constraint* est incompatible avec l'*Application Constraint*. Mais la *Faithfulness Constraint* est leur socle commun.

<sup>2</sup> Hale et Wright paraissent avoir une conception de la *faithfulness constraint* plus nuancée que Shapiro. Son contenu et son extension font l'objet d'une élaboration poussée, d'où il ressort que la forme syntaxique est un des critères importants, mais pas le seul, que le philosophe doit prendre en compte. En particulier, les philosophes admettent la possibilité de déroger, pour des raisons épistémologiques notamment, à cet impératif. Voir à ce sujet Hale & Wright 2002, et Hale 1988, chap. 3.

<sup>3</sup> Voir Hylton 1990. Wittgenstein, dans le *Tractatus*, remarquait déjà que c'est Russell qui le premier a montré que « la forme logique apparente d'une proposition n'était pas nécessairement sa forme réelle » (4. 0031).

Considérons le cas où  $R$  est la relation de succession entre entiers, et  $C$  la propriété d'être un entier, alors l'énoncé « le successeur de  $x$  est un entier », aurait pour forme réelle celle de l'existentielle apparaissant à droite du signe d'identité définitionnelle. Et même, en réalité, cette première réduction n'est pas complète, car la notion de « succession » et de « être un entier » sont elles aussi des concepts dérivés, dont l'analyse peut être poursuivie plus avant. L'exemple suffit à montrer que, pour Russell, ce n'est pas parce que les mathématiciens usent d'un terme singulier que le terme en question désigne un objet<sup>1</sup>. Cette défiance vis-à-vis de l'usage de la syntaxe comme guide n'est d'ailleurs pas un produit dérivé de *On Denoting*. Dès les *Principles*, Russell met l'accent sur le divorce possible entre la structure logique réelle et la forme apparente des énoncés mathématiques. Ce trait se perçoit notamment dans la partie VI consacrée à la géométrie<sup>2</sup> : l'ordre sur la droite projective (la relation de séparation) doit par exemple être défini, selon Russell (qui reprend ici les magnifiques travaux de Pieri), comme une relation compliquée entre des relations d'incidence<sup>3</sup>. La théorie des symboles incomplets de 1905 n'introduit donc pas une rupture avec les travaux précédents – elle donne un statut et un cadre à un genre de discussions et d'analyses déjà présentes en 1903<sup>4</sup>.

L'idée selon laquelle les auteurs des *Principia* rejettent la *Faithfulness Constraint* a été reprise et placée au centre du projet philosophique russellien par G. Landini dans son récent et important *Wittgenstein's Apprenticeship with Russell*. Landini reprend une très belle expression, utilisée en 1906 par Russell pour caractériser sa démarche dans la théorie substitutionnelle : « introduire la structure dans les variables » (« *building the structure into the variables* »). Selon Landini, cette formule donne consistance au projet russellien, bien au-delà de la théorie substitutionnelle elle-même. La méthode est au cœur des constructions logiques développées dans les années 10s, elle anime déjà l'opposition à la définition axiomatique des entiers dans les *Principles*. Afin de fixer les idées, développons ce dernier exemple, bien connu. Peano définit la structure  $\mathbf{N}$  en énonçant cinq postulats. Les entiers apparaissent dans cet axiomatique comme des termes singuliers désignés par des variables (ou éventuellement des constantes non logiques) qui ont entre eux les relations décrites par la structure – ainsi par exemple tout entier a un successeur, et deux entiers qui ont un même successeur sont identiques. La *Faithfulness Constraint* est donc, chez Peano, satisfaite : les termes singuliers numériques n'ont pas d'autres propriétés que celles qui leur sont données par les relations qu'ils ont dans la théorie mathématique. Les entiers ne sont ici que les supports vides des relations arithmétiques ; ils ne sont, comme le dit Shapiro, que des places dans une structure. Dans les *Principles*, en revanche, Russell « interprète » la théorie peanienne, et considère des entités et des relations dont il démontre qu'elles satisfont les cinq axiomes de Peano. Ainsi, en définissant les entiers comme classes de classes équinumériques, et la relation de succession à partir de l'union ensembliste, Russell exhibe ce que l'on nommerait aujourd'hui un « modèle » de la théorie peanienne, auquel il identifie la structure  $\mathbf{N}$ . Dans ce nouveau cadre, les termes numériques ne sont pas simplement des places dans un réseau de relations : ce sont des entités logiquement complexes, des ensembles, dont les éléments (eux-mêmes des ensembles) ont entre eux une relation très particulière (la relation d'équinuméricité). Les nombres ne sont pas des positions dans une structure ; ils ont une

<sup>1</sup> Cela ne veut pas dire, et c'est un point dont l'importance n'a pas toujours été réalisée, que les expressions incomplètes soient logiquement défectueuses et doivent être exclus de la langue logique ; toutes les propositions des *Principia*, à partir du livre II, contiennent des symboles incomplets. Sur ce point, voir Gandon 2002.

<sup>2</sup> Mais également dans la partie IV consacrée à l'ordre, où Russell ne présente pas moins de six analyses différentes du concept d'ordre et trois définitions de la relation « entre » ; voir 1903, chap. 24 et 25.

<sup>3</sup> Voir Gandon 2009a.

<sup>4</sup> Voir pour un développement de cette ligne interprétative, Levine 2002.

structure<sup>1</sup>. Comme Landini l'a vu, le ressort de l'analyse russellienne des entiers et de l'opposition à Peano tient au souhait de « *building the structure into the variables* ».

La démarche de Russell et de Whitehead dans *Principia* VI relève du même projet. On peut décrire l'opposition entre les logicistes et Hale exactement dans les mêmes termes que ceux dont on vient de se servir pour décrire le contraste entre la définition peanienne des entiers et celle constructionnaliste de Russell. Hale adopte en effet une caractérisation de la quantité que l'on peut à bon droit qualifier de structurelle. Les q-domaines complets sont définis axiomatiquement comme un ensemble de systèmes isomorphes (la théorie est catégorique). Une quantité est ainsi, chez Hale, une place vide, dont seules les relations avec les autres places sont considérées. Adoptant un tel cadre, Hale est contraint de penser le rapport entre nombres et quantités en termes de similarités structurelles. Certes, *ApC* exige que la possibilité d'appliquer les nombres aux quantités soit incluse dans la définition même des nombres, et non pas envisagée dans une analyse *a posteriori*. Mais Hale partage avec Shapiro l'idée que la seule façon d'expliquer l'application des réels aux quantités passe par la mise en évidence d'un morphisme. Ce que les structuralistes effectuent après, et indépendamment de la définition des réels, Hale l'effectue au niveau des définitions. Cette modification, d'ordre « chronologique », ne change pas fondamentalement la nature de la démarche : l'application reste conçue en termes de ressemblance structurelle<sup>2</sup>. À l'inverse, chez Russell et Whitehead, les quantités ne sont pas caractérisées seulement par la forme des relations qu'elles entretiennent les unes avec les autres, mais sont explicitement définies comme un certain type d'être structuré : elles sont des relations. Les nombres ne se présentent pas non plus, dans les *Principia*, comme les éléments logiquement simples d'une certaine structure : ils sont des relations de relations. L'idée des deux logicistes est bien aussi, en un sens, de dégager une structure commune aux nombres et aux quantités ; mais cette structure n'est pas considérée comme « extérieure » aux entités étudiées ; elle est inscrite dans les variables numériques et quantitatives, définies comme des variables de relation. C'est parce que les nombres sont des relations de relations, qu'ils peuvent s'appliquer aux relations que sont les quantités ; c'est parce que les grandeurs sont des relations, qu'elles peuvent être composées les unes avec les autres et que cette composition peut (dans certaines circonstances) être représentée par une addition entre nombres. Les grandeurs comme les nombres ne sont plus seulement des éléments d'une structure ; ils ont une structure, relationnelle, et c'est en vertu de ce qu'ils sont, de leur nature ontologique, que nombres et quantités sont liés les uns aux autres. La démarche de Hale respectait la *Faithfulness Constraint* : les quantités comme les nombres étaient considérés comme des termes singuliers, et les relations étudiées étaient celles-là mêmes qui étaient représentées dans les formes de surface des énoncés utilisés par les mathématiciens. À l'inverse, Russell et Whitehead déforme la syntaxe des énoncés quantitatifs : les grandeurs deviennent des relations et la concaténation entre grandeurs, un produit relationnel<sup>3</sup>.

La théorie de la quantité illustre donc parfaitement l'opposition entre la stratégie des « réalistes » contemporains (Shapiro, Hale, Wright), adhérant à la *Faithfulness Constraint*, et celle, russelliano-whiteheadienne, consistant à structurer les variables et distordre la forme apparente des propositions. Les quantités comme les nombres ne sont pas, pour les auteurs

---

<sup>1</sup> Voir Russell 1903, chap. 14 ; 1919, chap. 1 et 2. Voir également Russell 1927, introduction, et notre prochain chapitre sur le concept de logique synthétique chez Wiener.

<sup>2</sup> C'est bien d'ailleurs ce qui pose problème dans l'approche de Hale : fondant son raisonnement sur la similarité de structure, le philosophe ne peut obtenir la complétude des réels qu'en imposant aux q-domaines d'être complet.

<sup>3</sup> La rupture avec la grammaire est même si importante que les auteurs se sentent obligés de justifier leur audace : voir \*303 et mon commentaire chap. 4 II-4. L'analyse s'ouvre par cette phrase Russell & Whitehead 1913, 260 : « Cette définition (\*303.01) requiert en tant que telle deux justifications : (1) nous pensons habituellement que les ratios s'appliquent à des grandeurs qui ne sont pas des relations ; (2) ... ». Elle se poursuit, rappelons-le, par une reformulation des énoncés portant sur les masses.



des *Principia*, des places dans une structure, mais des relations dont la complexité interne n'est pas reflétée dans la forme des énoncés quantitatifs et numériques. Cette opposition entre méthode axiomatique et construction logique est, en un sens, bien connue. Mais l'accent mis par Landini sur l'idée de structuration de la variable permet de confronter de façon plus serrée la position russellienne avec les doctrines qui adhèrent à la *Faithfulness Constraint*. Pour employer un langage quelque peu métaphorique, on pourrait dire que la grammaire fournit, chez Shapiro, un principe permettant de localiser l'élément structurel. Ainsi, parce que les entiers (les quantités, les nombres) apparaissent comme des termes singuliers, ils doivent être considérés comme des variables dénuées de toute organisation interne, donc comme des éléments d'une structure qui doit se bâtir autour d'eux. Le structuralisme des *Principia* est plus radical. On ne sait pas, chez Russell, avant d'entreprendre l'analyse, où situer l'élément structurel. Il est tout à fait possible que ce qui était considéré, à un certain niveau de l'enquête, comme un élément sans complexité interne, comme un simple point dans un espace, se révèle, une fois l'analyse poussée plus avant, comme une entité structurée. Le fait que les entiers (les quantités, les nombres) soient, linguistiquement parlant, des termes singuliers ne veut absolument pas dire qu'il faille les considérer comme de simples supports de relations ; les entiers (les quantités, les nombres) sont, chez Russell comme chez Shapiro, des éléments d'une structure ; mais, à la différence de ce qui se passe chez le second, ils ont également une structure. Le rejet de la *Faithfulness Constraint*, en permettant aux variables d'être structurées, ouvre des possibilités nouvelles ; mais cette ouverture pose également un grave problème, vers lequel je vais maintenant me tourner.

### III-3. L'ApC comme principe architectonique.

Rappelons les termes du tableau général. Dans le cadre d'une philosophie des mathématiques qui adhère à la *Faithfulness Constraint*, l'ApC ne peut se comprendre que comme un principe « métaphysique », qui se surajoute aux exigences de base de toute philosophie des mathématiques. Russell rejette la *Faithfulness Constraint* et le sens de ApC est dès lors appelé à changer. Mais comment ? Pour le comprendre, il faut s'intéresser de façon plus précise aux conséquences du rejet de la *Faithfulness Constraint*. À quoi s'expose exactement Russell en refusant ce principe ? À de graves conséquences, selon Benacerraf.

L'histoire est bien connue : dans *What Numbers Could Not Be* (1965), Benacerraf met en scène deux enfants, Ernie et Johnny, qui ont appris l'arithmétique, l'un directement dans la version qu'en donne Zermelo, l'autre directement dans celle qu'en donne Von Neumann. Dans les premiers temps, aucun désaccord sur le résultat des additions, des multiplications etc... ne s'élèvent entre Ernie, Johnny et leurs camarades (qui ont appris l'arithmétique selon les méthodes classiques). Mais à la question « combien 2 a-t-il d'éléments ? », Ernie, qui identifie 2 à  $\{\{\emptyset\}\}$ , répond un, Johnny, pour qui 2 est  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ , deux ; leurs camarades ne comprennent même pas la signification de la question. Qui a raison ? Quelle est la bonne réponse ? Pour l'arithméticien, 2 n'est pas un ensemble, mais le troisième élément d'une  $\omega$ -sequence. Benacerraf en conclut que, pour le philosophe des mathématiques, c'est-à-dire pour celui qui base sa réflexion sur ce que disent les mathématiciens, il n'existe aucun critère pour trancher la question. Certes,  $\{\{\emptyset\}\}$  et  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  peuvent jouer le rôle de troisième élément dans deux progressions différentes, mais cela ne veut évidemment pas dire que  $\{\{\emptyset\}\}$  et  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  soient identiques à l'entier 2. Selon Benacerraf, la réponse correcte est donc celle des enfants « normaux », qui considère que la question elle-même est absurde. Vouloir déterminer quelle  $\omega$ -sequence est la suite des entiers, chercher une essence des nombres au-delà de ce que le langage des mathématiciens nous donne à voir, n'a pas de sens : aucun critère mathématique ne permet de trancher entre les diverses réponses possibles.

La fable bencerrafienne illustre le danger qu'il y a à rejeter la *Faithfulness Constraint*. Dès que l'on s'éloigne de la forme de surface des énoncés, l'analyse philosophique n'est plus guidée par rien de mathématiquement assignable. Le philosophe ne peut même plus reprendre les divisions qui structurent, selon les mathématiciens eux-mêmes, les mathématiques. Si les énoncés arithmétiques ne portent pas réellement sur les nombres, mais sur des ensembles ou des relations, faut-il vraiment distinguer, au sein des mathématiques, un domaine correspondant à celui de la théorie des entiers ? Le fait que ce qui est considéré comme une variable sans structure puisse se révéler, au cours de l'analyse, être un complexe dont les constituants appartiennent à d'autres champs disciplinaires interdit d'accorder aux divisions entre domaines mathématiques habituellement admises la moindre valeur philosophique. L'abandon de la *Faithfulness Constraint* conduit donc à considérer l'organisation interne des mathématiques comme un problème plutôt que comme une donnée – il empêche de « couler », de façon non problématique, le contenu mathématique dans des cases prédécoupées. Comment Russell, qui refuse de considérer la forme syntaxique comme un guide, et qui, même, affirme qu'une véritable analyse est la plupart du temps la mise à jour d'une structure logique très différente de la composition grammaticale superficielle, peut-il éviter le problème des multiples réductions ? Quel statut peut-il accorder aux distinctions entre disciplines dans les *Principia* ?

C'est *ApC* qui, dans les *Principia*, limite le champ des analyses possibles en donnant un critère permettant de guider la structuration du contenu mathématique. C'est maintenant sur cet usage, architectonique, de *ApC* que je vais me pencher, en prenant comme fil rouge l'exemple la théorie de la quantité.

Hale motive sa définition des réels par la nécessité d'étendre le programme néo-logiciste à l'analyse mathématique. Une fois  $\mathbb{R}$  défini, la théorie du continu, la doctrine des limites, de la convergence, etc... peuvent être développées sans difficulté. Dans les *Principia*, l'analyse réelle, la doctrine des limites et de la convergence, est conçue comme une théorie générale des ordinaux cantorien de type  $\theta$ . Or, la définition des nombres réels dans la partie VI suit, et ne précède pas, la théorie des *series* exposée dans la partie V. L'analyse mathématique est donc indépendante, dans les *Principia*, de la théorie des réels. Russell et Whitehead, on l'a vu (voir chap. 5, I-1.), insistent beaucoup sur le fait que rien ne justifie l'hypothèse, « habituellement » faite dans « les traités d'analyse », que « à la fois les arguments et les valeurs des fonctions (considérées) sont des nombres d'un certain genre, généralement des nombres réels » (1912, 687). Ils soulignent corrélativement, dans la partie VI, que les nombres rationnels et réels ne sont nécessaires que pour élaborer une théorie de la mesure : c'est pour « expliquer les genres d'applications des nombres appelées *mesure* », non pour fonder le calcul différentiel, qu'il faut définir les réels (1913, 233). Autrement dit, ce que Hale, suivant en cela les présentations mathématiques standard à l'époque, conçoit comme une théorie unique (la théorie des réels et de l'analyse mathématique), est scindée dans les *Principia* en deux doctrines distinctes, relativement indépendantes l'une de l'autre, la théorie des ordres sériels de type  $\theta$ , d'une part, et la théorie des nombres réels et de la mesure des grandeurs, d'autre part<sup>1</sup>.

Mais de quel droit Russell et Whitehead distinguent dans leur exposition ce que les mathématiciens de leur temps confondaient ? Pourquoi distinguer les types d'ordre  $\theta$  des réels, en liant ces derniers à la mesure des grandeurs ? La réponse est précisément donnée par *ApC*. Comme nous l'avons déjà indiqué dans le chapitre 5, c'est explicitement pour ne pas perdre de vue la possibilité d'appliquer les concepts de limite, de continuité, de convergence, etc ... à des fonctions non numériques (qui ne prennent pas leurs arguments et leurs valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{Q}$ ) que Russell et Whitehead généralisent leurs définitions. Un passage de

---

<sup>1</sup> Cette manœuvre n'est d'ailleurs pas sans rappeler la distinction, opérée dans les *Principles*, entre la théorie des cardinaux et la théorie des ordinaux ; Russell refusait de réduire l'une à l'autre, et expliquait vouloir distinguer deux structures indépendantes, qui étaient confondues, selon lui, par Dedekind.

*Introduction to Mathematical Philosophy* est sur ce point très révélateur. Après avoir présenté la notion de convergence comme un concept appartenant à la théorie des fonctions à valeurs réelles, Russell justifie la nécessité de passer à une exposition plus générale ainsi (1919, 226-227):

Il est à présent possible de généraliser nos définitions pour qu'elles puissent s'appliquer à des ordres sériels non nécessairement numériques, ou dont on est libre d'ignorer s'ils sont constitués de grandeurs mesurables. Il peut être utile d'avoir à l'esprit l'exemple du mouvement.

La confusion entre analyse mathématique et théorie des nombres réels conduit à penser que la mesure des grandeurs est un préalable indispensable à l'application des concepts du calcul différentiel. Or, affirme Russell, ce n'est pas le cas : « les notions de limite et de continuité d'une fonction ne sont (...) pas essentiellement liées à celle de nombre. » (1919, 229). *ApC* ne joue donc pas un rôle seulement dans la partie VI. Il intervient également dans la partie V. La possibilité d'appliquer la notion de limite à n'importe quel ensemble ordonné d'un certain type doit découler immédiatement de la définition ; ce n'est pas le cas, selon Russell et Whitehead, de la caractérisation de la limite que l'on trouve habituellement dans les manuels d'analyse ; cette définition doit être donc, à cause de *ApC*, amender. On le voit, la considération de l'application d'une théorie ou d'un concept sert ici à justifier une restructuration de l'organisation interne des mathématiques<sup>1</sup>. C'est cet usage de *ApC* que je nomme « architectonique ».

En tant que principe architectonique, *ApC* est d'ailleurs, d'une certaine façon, mal nommé. L'expression suggère en effet que l'on s'intéresse à l'application d'une doctrine déjà bien délimitée ; or, en réalité, ce que l'étude de l'application permet, c'est une identification plus fine de ce qui est censé être appliqué. Reprenons notre exemple : dans les *Principia*, l'analyse réelle s'applique directement aux ordres archimédiens et complets ; le continu réel est aussi utilisé dans un contexte très différent, celui de la mesure des grandeurs. Cette distinction des « usages » justifie, selon Russell et Whitehead, la différenciation des théories. La façon dont *ApC* est mis en œuvre ici est donc aux antipodes de la manière dont Wright l'utilise. Wright, rappelons-le, propose de relativiser l'adhésion à *ApC* aux domaines mathématiques considérés. Si un philosophe de l'arithmétique doit admettre *ApC*, un philosophe du calcul différentiel doit le rejeter. Ici, comme la *Faithfulness Constraint* gouverne l'analyse, la division traditionnelle des mathématiques en disciplines distinctes (arithmétique, analyse réelle, etc...) peut être reprise. Les cases permettant d'articuler le contenu mathématique sont données, et il est possible de relativiser *ApC* à ce cadre prédécoupé. Dans les *Principia*, en revanche, il n'existe pas de division préétablie du champ mathématique par rapport à laquelle on pourrait questionner la légitimité d'*ApC*. Au contraire, *ApC* est un des instruments permettant de construire le cadre, d'explorer des structurations alternatives possibles du même contenu logique – et de distinguer deux disciplines là où on avait coutume de n'en compter qu'une.

Résumons le propos. Le point commun de Hale, Wright et Shapiro est de s'interroger sur la légitimité d'*ApC* en ne remettant jamais en question la *Faithfulness Constraint*. Ce présupposé leur permet de limiter drastiquement le nombre des analyses des concepts mathématiques fondamentaux, et de recourir, dans leur enquête aux divisions traditionnellement admises entre domaines mathématiques. Ma thèse est que ce préalable leur

---

<sup>1</sup> Cette réorganisation ne va pas sans poser des difficultés. Dans une lettre datée du 27/12/1909, Jourdain demande à Russell une définition générale du quotient qui pourrait être utilisée dans la définition du quotient différentiel aussi bien que dans celle de la division arithmétique. La question est pertinente : elle met le doigt sur le fait que les nombres, et les opérations entre les nombres, interviennent bien en analyse (sous la forme de coefficient différentiel, notamment) et qu'il faut donc trouver les moyens de les introduire. Russell, dans sa longue réponse, relève le défi, et cherche à étendre la théorie non numérique de la continuité des fonctions présentées dans les *Principia*. Voir Grattan-Guinness 1977, 119-124.

interdit de faire jouer à *ApC* le rôle qu'il a dans les *Principia*. En adoptant un principe permettant de limiter le problème des réductions multiples et corrélativement d'éliminer les questions liées à l'organisation des mathématiques, Hale, Wright et Shapiro ne peuvent présenter *ApC* que comme une exigence additionnelle, périphérique par rapport à la tâche principale de la philosophie des mathématiques. En revanche, lorsque que, comme Russell, l'analyse est identifiée à la mise à jour de la forme logique réelle des propositions, il est absolument vital de dégager certaines règles permettant de guider l'examen philosophique. L'*Application Constraint* est l'une d'entre elles : elle donne à Russell et Whitehead les moyens de structurer leur propos, par exemple de distinguer la partie VI de la partie V des *Principia*. *ApC* n'est pas ici un principe optionnel ; sans lui, ou sans des règles du même genre, aucun choix entre analyses alternatives ne pourrait être jamais justifié, et aucune organisation du contenu logico-mathématique ne pourrait être dégagée.

*ApC* n'est sans doute pas un principe suffisant pour orienter l'enquête philosophique (dans l'appendice, je montre que *ApC* a certainement pour origine des thèses métaphysiques propres à Whitehead). Il y a dans les *Principia*, de nombreuses théories mathématiques, qui n'ont aucune application évidente (la théorie des ordres transfinis en est un exemple), et pour lesquelles on serait bien en peine de donner un sens à *ApC*. Il existe en réalité d'autres règles, qui jouent peu ou prou le même rôle architectonique. J'ai ainsi défendu (2008) l'idée que, dans les *Principles*, Russell cherchait à caractériser les domaines mathématiques qu'il distinguait par des types différents de relation. Ainsi l'arithmétique est, en 1903, associée aux relations d'équivalence, l'analyse aux relations d'ordre, la géométrie aux relations d'incidence, etc... Toutes les mathématiques sont bien, dans ce cadre, « réduites » à la logique des relations – mais pour qu'un domaine de mathématique soit reconnu comme formant une partie autonome, il faut qu'il soit fondé sur un « type relationnel ». Cette idée n'est pas perdue dans les *Principia*. Elle coexiste avec d'autres considérations, dont *ApC*<sup>1</sup>. Ces principes architectoniques « intermédiaires », qui se substituent à la *Faithfulness Constraint*, sont en réalité assez hétéroclites, et leur statut n'est jamais vraiment clarifié par Russell. Ce ne sont pas des lois logiques ; ils posent cependant de fortes contraintes sur le développement du contenu mathématique, et sont ainsi aptes à guider l'analyse philosophique. Leur degré de généralité non plus n'est jamais nettement défini. Il semble que l'usage de ces règles soient conditionnées aux caractéristiques locales de l'objet d'étude – *ApC* est ainsi parfois utilisé (pour structurer la théorie des réels et celle des fondements de l'analyse), parfois non (dans le cas de l'arithmétique transfinie). Mon objectif n'a pas été ici de faire une liste des principes guidant l'analyse russellienne ; il n'a pas non plus été de déterminer le statut et le degré de généralité de ces règles<sup>2</sup>. Mon but était simplement de montrer que l'abandon de la *Faithfulness Constraint* (et la conception de l'analyse comme mise à jour de la forme réelle des propositions) ouvrait un nouvel espace problématique, et que dans ce contexte renouvelé, *ApC* jouait un rôle crucial.

Répetons-le : pour Shapiro, Wright et Hale, même lorsqu'il est adopté, la tâche principale du philosophe des mathématiques est de rendre compte de ce que les mathématiciens disent et des structures qu'ils étudient. Chez Russell, l'idée que le langage des mathématiciens serait doué d'une forme d'univocité, i.e. l'idée que l'on pourrait s'accorder, avant de commencer l'enquête philosophique, sur la nature des objets étudiés par les mathématiciens (nombres, quantités, espaces, etc...), est rejetée. On ne sait tout simplement pas, avant d'entreprendre l'étude, de quoi les mathématiciens parlent<sup>3</sup>. L'organisation des mathématiques n'est plus

<sup>1</sup> En revanche la distinction, fondée sur *ApC*, entre théorie des ordres et théorie des réels n'est pas faite dans les *Principles* et paraît constituer un apport propre au *Principia*. Comme je le montre dans l'Appendice, l'influence de Whitehead a sans doute été décisive.

<sup>2</sup> Je compte faire de cette question l'objet essentiel d'un ouvrage à venir.

<sup>3</sup> Voir la célèbre formule de Russell 1901b (366) : « Les mathématiques sont le domaine où nous ne savons jamais de quoi nous parlons ».

pour Russell, une donnée sur laquelle le philosophe peut tranquillement s'appuyer. Dans ce nouveau contexte, plus chaotique et plus ouvert, *ApC* est un moyen permettant, parfois, de dégager des blocs théoriques, des unités locales, permettant de commencer à structurer le développement logique. Le problème auquel *ApC* répond n'est donc plus marginal ; il est crucial. Il est tout simplement celui du plan des *Principia*, i.e. du cadre dans lequel articuler le contenu logique. L'abandon de la *Faithfulness Constraint* change ainsi complètement le sens et le statut de l'*Application Constraint* : de règles additionnelles, que l'on peut ou non adopter, il devient un principe architectonique, essentiel à l'analyse philosophique.

## Conclusion

Résumons brièvement le chemin parcouru dans ce chapitre. J'ai d'abord évoqué l'usage que Pargetter et Bigelow faisaient de *Principia* VI. Leur tentative comporte de nombreuses faiblesses ; elle néglige, de plus, les points les plus originaux et féconds des constructions logicistes. Je me suis ensuite intéressé aux discussions relatives à l'*Application Constraint*, suscitées par les travaux de Hale. J'ai voulu établir deux choses. La façon dont Russell et Whitehead mettent en œuvre *ApC* est différente et, sur plusieurs points, plus convaincante que la manière dont Hale le fait. La prise en compte de *Principia* VI pourrait donc contribuer à déplacer le centre de gravité du débat : plutôt que de tourner autour de la question de savoir s'il faut oui ou non admettre *ApC*, il pourrait se recentrer sur la question de savoir comment mettre en œuvre *ApC*. Mon second point est le suivant : les philosophes qui ont pris part à la discussion concernant *ApC* ont tous repris les termes mêmes du dilemme de Benacerraf et choisi d'adhérer à l'idée qu'il faut prendre les énoncés mathématiques « *at face value* ». Ce qui singularise l'approche des *Principia* est que l'adhésion à *ApC* se combine à un rejet de la *Faithfulness Constraint*. *ApC* devient un principe « architectonique », qui oriente les logiciens dans leurs analyses et leur permet d'élaborer le cadre (considéré comme donné par Hale) dans lequel couler le contenu logico-mathématique.

Aujourd'hui, les philosophes qui refusent la *Faithfulness Constraint* sont d'ordinaire « nominalistes ». C'est avant tout parce qu'elle conduit inévitablement vers une forme de « platonisme » que la contrainte est rejetée. Mais Russell est platoniste. Quelles raisons a-t-il alors de ne pas adhérer à un principe qui permet d'éviter le redoutable problème des réductions multiples ? Russell refuse le gambit proposé par Benacerraf : il sacrifie à la fois la *Faithfulness Constraint* et le souci de développer une épistémologie « raisonnable ». Étant donnée l'importance qu'a le dilemme de Benacerraf dans la philosophie des mathématiques contemporaine, ce double refus explique très certainement pourquoi l'influence de Russell est aujourd'hui quasiment nulle. Comment en effet réellement défendre une si étrange position ? Pourquoi vouloir perdre sur tous les tableaux – sur le tableau ontologique aussi bien que sur le tableau épistémologique ?

J'ai laissé, jusqu'à présent, cette question de côté. J'estime cependant que la position russellienne est défendable. On l'a vu : la *Faithfulness Constraint* conduit à régler, avant qu'il ne se pose, le problème de l'architecture des mathématiques et celui, connexe, des réductions multiples. Or il me semble qu'une philosophie des mathématiques qui évite ces questions n'est pas une philosophie des mathématiques intéressante, i.e. fidèle à la pratique des mathématiciens. Une part importante du travail des mathématiciens consiste en effet à reconfigurer, à restructurer, à réorganiser constamment le contenu de leur discipline. Prenons l'exemple (qui a joué un rôle très important chez Russell) de la définition de l'ordre sur la droite projective. Au lieu de considérer la distinction entre axiomes d'incidence et axiomes d'ordre comme fondamentale, Pieri réussit à caractériser le fait que deux paires colinéaires ne sont pas séparées par l'existence d'une paire de points par rapport à laquelle les deux paires

initiales sont en involution. La forme de surface des propositions concernant l'ordre est profondément altérée par la très belle et très féconde analyse de Pieri : les relations d'ordre sur la droite sont en effet réduites à de très complexes relations d'incidence dans le plan. Ce genre de résultat n'est pas, en mathématique, un cas isolé ; il est au contraire ubiquitaire ; les mathématiciens ne cessent jamais de réécrire, de reformuler, de donner une autre forme aux propositions fondamentales de leurs théories<sup>1</sup>. Or, l'idée selon laquelle les philosophes devrait considérer les énoncés mathématiques « *at face value* » rend extrêmement difficile la prise en compte de ce genre de recherche. Le principe consiste en effet à fixer des formes syntaxiques déterminées, en passant sous silence, de façon arbitraire et dogmatique, le mouvement de reprise incessant auxquelles elles donnent lieu. Étant donnée leur importance, c'est, me semble-t-il, être infidèle aux mathématiques que d'exclure ces phénomènes de retraduction et de réorganisation de l'horizon de la réflexion philosophique.

J'ai dit plus haut que, vu à travers le prisme du dilemme de Benacerraf, la position russellienne est indéfendable. La *Faithfulness Constraint* évite l'écueil des réductions multiples, et si ce n'était ses conséquences épistémologiques, elle serait, selon Benacerraf, adoptée par tous les philosophes des mathématiques. Mon point est que l'on doit rejeter la *Faithfulness Constraint*, non pas, comme le suggère Benacerraf, pour des raisons extérieures, épistémologiques, liée à la nature de la connaissance mathématique, mais précisément parce que ce principe méthodologique règle trop vite la question des réductions multiples. Autrement dit, c'est précisément à cause de ses supposés avantages, des problèmes qu'elle permet de ne pas poser et qu'en réalité elle occulte, qu'il faut, je crois, renoncer à la *Faithfulness Constraint*. La question des réductions multiples, celle de l'architecture des mathématiques, sont des questions mathématiques et sont donc des questions que les philosophes des mathématiques ne doivent pas refuser d'affronter. Le travail consistant à dégager des règles « intermédiaires » permettant de guider localement l'analyse philosophique, est en conséquence une tâche que le philosophe ne peut pas court-circuiter. Certes, le problème de savoir qui, de Ernie ou de Johnny, a raison (celui de savoir quelle est la véritable forme du nombre 2) est absolument inintéressant. Mais il est inintéressant non pas, comme Benacerraf le suggère, parce qu'il est métaphysique. Il est inintéressant parce que l'exemple de Benacerraf est mal choisi. La question disputée par Ernie et Johnny est une forme dégénérée d'un genre de problèmes auxquels les mathématiciens ne cessent de se confronter ; la discussion, qui a divisée les mathématiciens de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, concernant la véritable nature de l'ordre sur la droite projective relève en effet du même genre de considération.

Vu à travers le prisme du dilemme de Benacerraf, la position russellienne est indéfendable, disions-nous. Mais là réside, précisément, ce qui lui confère son actualité : le dilemme de Benacerraf cadenas la réflexion contemporaine sur les mathématiques en l'enfermant dans ce qui n'est peut-être que de fausses alternatives. Il n'est pas vrai, ou du moins pas évident, que l'on puisse réduire la fidélité aux mathématiques à la fidélité au langage des mathématiciens. L'intérêt de la position russellienne est de rouvrir sur ce point la discussion.

---

<sup>1</sup> Voir pour des développements, Wilson 1994 ; Arana 2008 et 2009.

## APPENDICE : Whitehead et l'*Application Constraint*

L'influence de Whitehead a été certainement décisive dans l'adoption de *ApC*. La distinction entre forme apparente et forme réelle d'une proposition est, bien entendu, russellienne. Mais l'idée que l'application des théories puisse guider l'analyse des concepts représente une nouveauté. Et c'est cet ajout qui semble devoir être plus spécialement attribué à Whitehead, comme le montre le fait que c'est Whitehead qui a écrit *Principia* VI et qui a convaincu Russell de l'intérêt qu'il y a à connecter nombres et grandeurs<sup>1</sup>. Quel rôle joue *ApC* dans la pensée de Whitehead ?

Dans *Introduction to Mathematics*, datée de 1911, Whitehead insiste beaucoup sur le fait que la généralisation des notions et des théories, loin de couper les mathématiques de leurs applications, constitue bien souvent une explication et, parfois même, une anticipation de ces applications. Ainsi, parlant des nombres complexes, il écrit (1911, 100) :

L'une des caractéristiques les plus fascinantes des mathématiques est la façon surprenante dont les idées et les résultats de ses différentes parties sont liés les uns aux autres. Au cours des discussions des chapitres précédents, nous avons été guidé simplement par les considérations mathématiques les plus abstraites ; et cependant, nous sommes revenus, en les poursuivant, aux lois de la nature les plus fondamentales, lois qui sont dans l'esprit de chaque ingénieur lorsqu'il conçoit une machine, et de chaque architecte naval lorsqu'il calcule la stabilité d'un bateau. Ce n'est pas un paradoxe de dire que dans nos états d'esprit les plus théoriques nous sommes au plus prêts des applications pratiques.

L'idée que la recherche de la plus grande généralité coïncide, comme par miracle<sup>2</sup>, avec la recherche des « lois de la nature » gouvernant les applications les plus concrètes est un leitmotiv de la philosophie que développera Whitehead par la suite. Ainsi, dans les premières pages de *Process and Reality*, il écrit (1928, 6) :

C'est une caractéristique remarquable de l'histoire de la pensée que les branches des mathématiques développées sous le coup d'une impulsion purement imaginative (...) trouvent finalement des applications importantes. Le temps peut arriver à manquer. Les sections coniques ont eu à attendre mille huit cents ans. De nos jours, la théorie des probabilités, la théorie des tenseurs, la théorie des matrices sont des exemples pertinents d'un tel phénomène.

R. Desmet (Non publié) lie de façon convaincante cette idée à l'admiration que Whitehead a toujours éprouvée pour le travail de Maxwell. Comme le montre de nombreux textes, « Whitehead fut particulièrement frappé par le fait que la généralisation formelle des nombres complexes par Hamilton ait donné naissance à un calcul vectoriel qui conduisit Maxwell et ses disciples vers l'unification de l'électricité et du magnétisme » (Desmet non publié, 6).

Si elle est développée tardivement dans les œuvres philosophiques, cette idée est au cœur des premiers travaux mathématiques de Whitehead. Un des enjeux importants de Whitehead 1898 est de montrer que les algèbres grassmanniennes (les plus générales qui soient selon Whitehead) ont toujours une interprétation spatiale, géométrique, « concrète »<sup>3</sup>. Résumons le propos. Grassmann travaille dans le cadre de la géométrie euclidienne, et considère celle-ci comme une des applications possibles des algèbres qu'il étudie. Cela le conduit à poser

---

<sup>1</sup> Voir notamment la lettre à Jourdain, datée du 21/3/1910 (Grattan-Guinness 1977, 130) : « J'adhère maintenant à la nouvelle définition quantitative (non arithmétique) de Whitehead selon laquelle  $\mu/\nu$  est une relation de vecteurs  $R, S$ , qui a lieu (en gros) chaque fois que  $\exists ! R' \cap S''$ . Cela permet de parler de deux tiers d'une livre de beurre sans un détour arithmétique élaboré. »

<sup>2</sup> Sur ce point, il y a une grande affinité entre Whitehead et les travaux de M. Steiner (qui ne cite cependant pas Whitehead) ; voir notamment Steiner 1998.

<sup>3</sup> La chose est clairement annoncée en conclusion du premier livre, introductif, de *Universal Algebra* (32) : « Le résultat de (mes recherches) est qu'un traité sur l'Algèbre Universelle est également dans une certaine mesure un traité sur certaines idées généralisées de l'espace. »

certaines restrictions *ad hoc* sur l'interprétation des formes algébriques. Ainsi, l'« intensité » d'un élément  $c = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$  (où  $e_1$  et  $e_2$  sont deux extraordinaires données, et  $\alpha_1, \alpha_2$  des nombres réels variables) est dite égale à la somme des intensités  $\alpha_1, \alpha_2$  des éléments composants. Les éléments d'intensité 0 correspondent alors au conjugué harmonique du milieu des points  $e_1 e_2$  par rapport à ces points – c'est-à-dire au point à l'infini de la droite euclidienne ( $e_1 e_2$ ). L'ajustement entre algèbre et géométrie se fait donc, chez Grassmann, par la position arbitraire d'une règle, la « loi d'intensité », fixant la forme de l'intensité de  $c$  en fonction de celles de  $e_1$  et de  $e_2$ . Dans le chapitre 4 du livre III de son 1898, Whitehead établit que l'abandon de cette restriction *ad hoc*, c'est-à-dire la généralisation de la loi d'intensité, permet de retrouver les géométries hyperbolique et elliptique (inconnues de Grassmann), le lieu des points d'intensité 0 correspondant aux différents Absolus de Cayley<sup>1</sup>. Certes, on peut difficilement considérer l'émergence des géométries non euclidiennes comme une avancée dans la connaissance des faits naturels concrets. Mais on retrouve bien ici l'idée d'un ajustement « miraculeux » entre les développements purement abstraits et algébriques de Grassmann, d'une part, et ceux des structures géométriques permettant d'interpréter les nouveaux calculs, d'autre part.

Non seulement dans ses textes philosophiques, mais également dans ses premiers travaux mathématiques, Whitehead semble considérer qu'il y a une coïncidence mystérieuse, et toujours vérifiée, entre les développements mathématiques les plus généraux et les plus abstraits et les recherches physiques les plus concrètes et appliquées. Le mouvement peut d'ailleurs aller dans les deux sens – si le calcul vectoriel a permis d'unifier les doctrines du magnétisme et de l'électricité, c'est grâce à ses applications physiques que l'analyse vectorielle s'est peu à peu autonomisé pour devenir une branche indépendante des mathématiques. La thèse d'une coïncidence entre lois de la nature et structures mathématiques conduit naturellement à adopter *ApC*. Puisque les théories mathématiques et les structures empiriques ont, au fond, la même forme d'unité, il est logique de considérer qu'une analyse est satisfaisante ssi elle rend compte des principales applications de la théorie. Il est important toutefois de distinguer l'adhésion à *ApC* de l'adhésion à cette conception, « romantique », des relations entre mathématiques et lois de la nature. Russell refuserait très certainement de reprendre la thèse whiteheadienne à son compte. Comme je l'ai souligné, il y a des théories mathématiques dans les *Principia* auxquelles aucune application extra-mathématique n'est (et probablement ne sera jamais) associée. Plus généralement, Russell affirme à de nombreuses reprises que la connaissance mathématiques a une valeur avant tout critique – qu'elle nous informe sur ce que la réalité aurait pu être plutôt que ce sur ce qu'elle est<sup>2</sup> ; ce qui va directement à l'encontre de la thèse défendue ici par Whitehead. Mon propos n'est donc pas de dire que l'adhésion à la thèse purement métaphysique d'une harmonie mystérieuse entre mathématique et réalité est nécessaire pour doter *ApC* d'un rôle architectonique. Il est simplement de relever que cette croyance a très certainement incité Whitehead à défendre l'usage d'*ApC* dans les *Principia*.

<sup>1</sup> Je renvoie, pour plus de détails, à Gandon 2005a.

<sup>2</sup> Voir par exemple Russell 1912, chap. 14-15.



## Chapitre 6

### **Théorie représentationnaliste de la mesure *versus* théorie logiciste de la quantité.**

#### **Introduction**

Ce chapitre constitue un prolongement du précédent, au sens où s'agit toujours ici d'explorer les potentialités inexploitées de *Principia* VI. Le précédent chapitre était consacré à la philosophie des mathématiques, plus particulièrement, au rôle que joue, dans les débats actuels, l'*Application Constraint*. Je quitterai, ici, le champ de la philosophie des mathématiques proprement dite pour aborder de façon plus directe la question de la nature des quantités et de la mesure, une question qui se trouve à la croisée de l'épistémologie des sciences empiriques et de la métaphysique générale. Dans les années cinquante, P. Suppes et ses collaborateurs ont élaboré l'approche représentationnaliste de la mesure, devenue « standard » aujourd'hui. La *theory of measurement*, puissamment charpentée, se présente à la fois comme une théorie épistémologique générale et comme un programme scientifique indépendant, singularisé par ses pratiques et ses questions. La monumentale *Foundations of measurement*, en trois volumes (Krantz & alii 1971 pour le vol. I, Suppes & alii 1989 pour le II, Luce & alii 1990 pour le III), donne à la doctrine sa forme la plus achevée. Le paradigme a toutefois suscité de nombreuses critiques, d'origine diverses. Dans ce qui suit, je me propose de confronter la doctrine exposée dans *Principia* VI et la *theory of measurement*. Les deux conceptions partagent des traits communs – ce qui n'est pas étonnant, étant donné leur commune origine historique (voir *infra*). J'insisterai toutefois plutôt sur leurs différences, et chercherai à montrer que, d'un point de vue philosophique, la démarche de Russell et de Whitehead est, sur de nombreux points, plus satisfaisante que l'approche représentationnaliste. La première section sera consacrée à une présentation générale de la théorie de Suppes. Dans la seconde, je dirai en quoi l'approche logiciste est philosophiquement plus cohérente que sa rivale contemporaine. Dans une dernière partie, j'exposerai les travaux du grand mathématicien américain N. Wiener, qui, dans un article publié en 1921, prolonge et généralise *Principia* VI. Son analyse montre que le cadre mis en place par Russell et Whitehead peut être étendu au-delà des limites de l'œuvre originale.

#### **I- Qu'est-ce que la *theory of measurement* ?**

##### **I- 1 : La rencontre de deux traditions**

J. Diez (1997) décrit la conception représentationnaliste de Suppes comme une synthèse entre deux courants indépendants, l'un plutôt mathématique, lié à l'élaboration des concepts d'axiomatique et de morphisme, l'autre lié à la réflexion sur la diversité des systèmes empiriques de mesure, et, plus particulièrement, aux problèmes posés par la mesure en psychologie. Je vais reprendre ici les principaux éléments de son analyse, en mettant l'accent sur la seconde filiation, que je n'ai pas eu, pour l'instant, l'occasion de discuter.

Un mot d'abord sur la première tradition. Lorsque Suppes et ses collaborateurs se penchent sur l'origine de la théorie représentationnaliste, ils citent invariablement le travail de Hölder (1901) auquel nous avons déjà fait allusion. Suppes comme Diez d'ailleurs, perçoivent Hölder

avant tout comme un élève de Hilbert, qui reprend et élabore les concepts de base des *Grundlagen*. Cette présentation n'est pas fautive. La référence à Hilbert a toutefois l'inconvénient d'occulter ce que les *Grundlagen* eux-mêmes doivent aux travaux antérieurs, et notamment aux développements en géométrie projective. La question de l'introduction des coordonnées dans un espace défini synthétiquement n'a pas été inventée par Hilbert ; elle tire ses racines du projet, partagé par Poncelet et Chasles en France, Steiner et Von Staudt, dans les pays germaniques, de généraliser les méthodes purement géométriques afin de concurrencer la géométrie analytique. Comme nous l'avons rapidement vu dans le chapitre 1, Hilbert ne fait, dans son calcul des segments des *Grundlagen*, que reprendre un fil qui a été déjà déroulé bien avant lui. Cette mise au point historique ne serait qu'un détail si notre objet n'était pas de confronter l'approche russellienne à celle de la *theory of measurement*. En effet, en datant l'origine de la doctrine représentationnaliste de l'ère post-hilbertienne, les présentations habituelles rendent difficile tout rapprochement entre Hölder 1901 et les *Principia*, Russell et Whitehead n'adoptant pas le paradigme hilbertien. En revanche, l'insertion de l'article de Hölder dans la veine des recherches, qui, depuis Von Staudt, introduisent de façon synthétique les nombres dans un espace géométrique non seulement permet, mais appelle la comparaison. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, la question de la coordination constitue en effet l'horizon mathématique de la section C de *Principia* VI. L'idée qui guide Hölder comme les auteurs des *Principia* est celle d'une similarité entre la structure ordinale et algébrique du corps des réels et celle de certains calculs géométriques définis sur un ensemble d'entités non numériques (les « segments » chez Hölder et Hilbert, les « jets » chez Staudt, les « vecteurs » chez Russell). C'est sur l'existence d'un tel « morphisme » que repose, chez tous ces auteurs, la possibilité d'introduire des coordonnées dans un espace géométrique. J'ai déjà présenté cette démarche (voir chapitre 1, chapitre 3, chapitre 4), sur laquelle je reviendrai de toute façon bientôt (à l'occasion de l'analyse des « théorèmes de représentation »). Je n'en dirai donc pas plus ici. Retenons cependant que les travaux de Von Staudt et de ses successeurs constituent l'origine commune à la fois de *Principia* VI et de l'approche représentationnaliste.

Le second ingrédient qui nourrit la théorie de Suppes est l'idée, avancée par le psychophysicien S. S. Stevens dans *On the Theory of Scales of Measurement* (1946), d'une classification des systèmes de mesure en diverses échelles. Cet article constitue en fait une réponse aux conclusions du comité de la *British Association for the Advancement of Science*, dont N. Campbell faisait partie, qui fut réuni pour trancher la question de savoir si la mesure des grandeurs psychologiques était, ou non, légitime. Dans le compte-rendu final, Campbell affirmait que, pour qu'une mesure ait un sens, le nombre assigné devait pouvoir être considéré comme le nombre d'unités quantitatives qu'il faut ajouter à un objet donné de façon à obtenir la même propriété que celle qui est mesurée. Il en concluait que, puisque les grandeurs psychologiques n'étaient pas additives, aucune mesure n'était, en psychologie, légitime. Le comité opta donc en faveur d'une position conservatrice (qui était déjà celle de Kant) selon laquelle l'additivité entre grandeurs est une condition de possibilité de la mesure.

Stevens, pour qui ces conclusions étaient bien entendu inadmissibles puisqu'elle revenait à condamner la psychophysique, souligne au début de son (1946), la nécessité de « reconnaître que la mesure existe sous une diversité de formes et que les échelles de mesure se divisent en certaines classes bien définies » (677). Selon Stevens, un système de mesure ne se définit pas seulement, comme semblait le présupposer Campbell, par la nature des opérations empiriques qu'il présuppose, mais également par deux autres caractéristiques, liées l'une à l'autre :

- 1) la nature des transformations que l'on peut effectuer sur les mesures sans détruire le système de mesure ;
- 2) la délimitation des manipulations statistiques légitimes dans le système, c'est-à-dire invariantes pour les transformations définies en 1).

Chaque type d'échelle (*scale type*) est donc caractérisé par trois traits : les opérations empiriques de base qu'elle requiert, le groupe de transformation qui lui est associé, les statistiques qu'elle autorise. Une description de la classification de Stevens permet de comprendre ce dont il s'agit. Je reproduis le tableau que l'on trouve dans Stevens 1946 (678) :

TABLE 1

Scale	Basic Empirical Operations	Mathematical Group Structure	Permissible Statistics (invariantive)
NOMINAL	Determination of equality	<i>Permutation group</i> $x' = f(x)$ $f(x)$ means any one-to-one substitution	Number of cases Mode Contingency correlation
ORDINAL	Determination of greater or less	<i>Isotonic group</i> $x' = f(x)$ $f(x)$ means any monotonic increasing function	Median Percentiles
INTERVAL	Determination of equality of intervals or differences	<i>General linear group</i> $x' = ax + b$	Mean Standard deviation Rank-order correlation Product-moment correlation
RATIO	Determination of equality of ratios	<i>Similarity group</i> $x' = ax$	Coefficient of variation

La classification est cumulative : les types d'échelles définis en premier sont les plus pauvres et ceux qui s'appliquent le plus généralement ; ceux qui viennent ensuite véhiculent plus d'information et ont un champ d'application plus restreint. Le premier type est constitué des échelles nominales. L'exemple de l'assignation de nombres sur les maillots des joueurs d'une équipe de football est communément pris. Le numéro 10 assigné à Platini constituerait ainsi, dans ce type d'échelle, une « mesure » de Platini. L'ensemble des mesures possibles étant la classe des entiers de 1 à 11, toutes les fonctions bijectives<sup>1</sup> de cet ensemble sur lui-même sont admissibles. Les opérations statistiques permises sont celles (très pauvres) qui sont invariantes par permutation<sup>2</sup>.

Le second genre distingué est celui des mesures ordinales. L'échelle de Mohs de dureté des roches en fournit l'illustration. Ici, une procédure permet de déterminer si une roche est plus dure qu'une autre ( $A$  est plus dure que  $B$  ssi  $A$  raye  $B$ , sans être rayée par  $B$ ). Et toutes les transformations qui laissent cet ordre inchangé sont permises. Le groupe associé est donc constitué de toutes les fonctions réelles croissantes. Les statistiques que l'on peut faire sur ces échelles sont un peu plus intéressantes : la médiane d'un ensemble de roche dont on teste la dureté est ainsi invariante par transformation du groupe « isotonique ».

La troisième sorte d'échelle, les échelles d'intervalle, joue un rôle central dans l'argumentaire de Stevens. Ce ne sont pas encore des échelles de type ratio, c'est-à-dire du type auquel aboutissent généralement les systèmes extensifs additifs ; mais les échelles d'intervalle permettent d'utiliser toute la machinerie statistique usuelle. Plus important, ce sont des *scales* de ce type que cherchent, et que réussissent parfois à développer les psychologues (679). Les opérations de base des échelles d'intervalle sont constituées par la détermination de l'égalité entre intervalles. L'exemple que choisit Stevens est la mesure de la température : le zéro est arbitraire, mais ce qui ne l'est pas est la signification physique qu'a l'augmentation d'un degré

<sup>1</sup> La mesure nominale donne des informations sur la cardinalité du domaine mesuré.

<sup>2</sup> Un autre exemple, moins trivial, de système nominal est celui de la « numération des classes », dans lequel on assigne le même nombre aux éléments d'une même classe. Les opérations statistiques comme la désignation du mode ou des corrélations de contingence ont, dans ce contexte, un sens.

en température<sup>1</sup>. Le groupe de transformation associé est le groupe des transformations positives linéaires : l'unité (ce qui correspond au coefficient  $a$  positif de la variable) mais aussi le zéro (ce qui explique la présence de la constante  $b$ ) peuvent être changés sans modifier le « contenu » empirique des mesures. Pratiquement toutes les opérations statistiques habituelles (moyenne, écart-type, ...) sont invariantes par les transformations linéaires, et peuvent donc être mises en œuvre<sup>2</sup>.

Stevens en arrive enfin aux échelles *ratio*, « les plus communes en physique » (679). Le groupe associé à ce type d'échelles est le groupe des similarités : si l'unité de mesure est arbitraire, le zéro ne l'est pas. Tout l'appareil statistique, les coefficients de variation inclus (qui ne peuvent pas être utilisés dans les échelles d'intervalle), peut être utilisé. Remarquons que Stevens n'identifie pas les échelles ratio aux systèmes extensifs : ce n'est pas l'existence d'une procédure de concaténation, mais l'existence d'une procédure empirique permettant de déterminer l'égalité des rapports quantitatifs, qui caractérise, selon lui, ces échelles. Ce point joue un rôle important dans les travaux scientifiques de Stevens, car, comme nous l'avons déjà noté dans le chapitre 3, Stevens prétend, contre Fechner et ses disciples, que l'appareil perceptif humain a la capacité de reconnaître l'identité des rapports entre intensités sensorielles (les dissimilarités, dirait Meinong) – et donc qu'il est possible de construire des échelles ratio en psychologie<sup>3</sup> (sur ce point, voir *infra*).

A cette série de quatre types d'échelles, Stevens en ajoute un autre, le type absolu, qui correspond à la mesure du cardinal d'un ensemble – le groupe associé est ici bien évidemment l'identité (l'unité de mesure n'est pas variable)<sup>4</sup>. Comme je l'ai dit, cette classification n'est pas une simple juxtaposition. Elle est cumulative ; les échelles s'imbriquent les unes dans les autres, un peu comme les géométries le font dans l'approche dite d'Erlangen. Ainsi, les échelles de types ratios sont également des échelles d'intervalles et des échelles ordinales ; l'inverse n'est bien entendu pas vrai.

Un point, cependant, est laissé sans réponse : comment déterminer le type  $A$  d'un système de mesure donné  $d$  ? Selon Stevens,  $d$  est de type  $A$  si les transformations admissibles sont de type adéquat ; mais comment déterminer ce qui distingue, pour  $d$ , les transformations admissibles de celles qui ne le sont pas ? C'est ici qu'intervient la notion d'« opération empirique élémentaire » ; si  $d$  est tel que l'identité de deux intervalles peut être déterminée, par exemple, alors, selon Stevens, toutes les transformations préservant cette identité sont légitimes et  $d$  sera une échelle d'intervalle. Mais cette réponse ne va pas : ce qui fait généralement question, lorsque l'on examine un système de mesure, est précisément la possibilité d'identifier et de discriminer entre les intervalles ou entre les rapports. Les adversaires de la mesure psychophysique refusent ainsi d'accorder aux sujets la capacité de déterminer si deux intervalles sensoriels sont égaux. La nature des « opérations empiriques de base » dans la seconde colonne du tableau de Stevens dérive en réalité de la considération des groupes de transformation distingués dans la troisième – de sorte qu'aucune réponse, autre que tautologique ou conventionnelle, n'est fournie à la question de savoir pourquoi un système donné  $d$  est d'un certain type  $A$ .

Le parallèle entre systèmes de mesure et géométries est ici éclairant. Le programme d'Erlangen, qui assimile le choix d'une géométrie au choix d'un groupe de transformation, ne donne aucune raison d'adopter un cadre géométrique plutôt qu'une autre. L'approche de

---

<sup>1</sup> Depuis les travaux de Lord Kelvin, à la même différence entre températures est associée la même quantité de travail dans un cycle de Carnot. Pour plus sur ces questions, voir Chang 2004, 173-192.

<sup>2</sup> Ce dernier point constitue, pour Stevens, un élément extrêmement important dans le processus de légitimation d'un système de mesure ; voir 1946, 677.

<sup>3</sup> Rappelons que Fechner soutenait que les sujets ont la capacité de reconnaître l'identité de certaines différences entre intensités sensorielles. C'est l'hypothèse fechnerienne de l'uniformité des *jnd* (des seuils de perception). Pour plus à ce sujet, voir Stevens 1986, chap. 1.

<sup>4</sup> Pour un affinement de la classification présentée dans Stevens 1946, voir Diez 1997, 181-182.

Klein laisse le physicien complètement libre d'appliquer une géométrie, plutôt qu'une autre, à l'analyse d'une situation physique donnée. De même ici : la classification de Stevens ne nous donne aucun moyen de déterminer le type d'un système de mesure donné. Elle nous dit simplement que si on considère que  $d$  est de type  $A$ , alors  $d$  aura tel et tel sorte d'invariants (qui seront, en quelque sorte, ce que le système mesure) – elle ne nous permet pas de savoir si  $d$  mesure réellement ces propriétés (si  $d$  réussit à effectuer les « opérations empiriques élémentaires » correspondant à son type). Comme le note Diez (1997, 183), « en procédant (comme Stevens nous invite à le faire), nous ne pouvons pas savoir pourquoi une transformation non positive linéaire de l'échelle Celsius, par exemple, ne mesure pas la température ».

## I- 2. La théorie représentationnelle de Suppes :

L'effort de Suppes vise précisément à répondre à la question laissée en suspens chez Stevens : comment déterminer le type d'un système de mesure donné, c-à-d les transformations qui lui sont associées ? L'idée originale de la *theory of measurement* est de subsumer la définition des types d'échelles à celle du système de mesure conçu comme système représentationnel. La construction de la théorie exige un remodelage et une redéfinition des concepts de mesure et de quantité que je vais présenter ici de façon générale. Dans le chapitre 5, j'ai illustré par un exemple, celui des systèmes extensifs clos, les principaux concepts de la théorie – je renvoie le lecteur à ce chapitre pour une illustration<sup>1</sup>.

Le schéma d'ensemble est relativement simple. Suppes définit d'abord, en s'inspirant de Tarski (Suppes 1968, 5) ce qu'il nomme un système relationnel, c'est-à-dire une structure  $S$  de forme  $\langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$ , où  $A$  est un ensemble d'objets non vide, et où  $R_1, \dots, R_n$  sont des relations définies sur  $A$ . Le type d'un système relationnel  $S$  comportant  $n$  relations est la suite de  $n$  entiers  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ ,  $u_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) étant l'arité de la relation  $R_i$ . Deux systèmes de même type sont dits similaires. Soient maintenant  $S = \langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$  et  $W = \langle B, V_1, \dots, V_n \rangle$  deux systèmes similaires. On dira que  $W$  est un plongement isomorphe de  $S$  ssi il existe une fonction injective  $f$  de  $A$  dans  $B$  telle que pour tout  $i = 1, \dots, n$  et pour chaque suite d'éléments  $\langle a_1, \dots, a_{u_i} \rangle$  de  $A$  :

$$(*) \quad R_i(a_1, \dots, a_{u_i}) \text{ ssi } V_i(f(a_1), \dots, f(a_{u_i})).$$

On dira que  $f$  est un morphisme de  $S$  dans  $W$ , si  $f$  possède la propriété (\*) sans être injective. Ces définitions ne sont absolument pas originales ; elles généralisent ce que l'on trouve dans n'importe quel manuel d'algèbre. L'idée sous-jacente est que des systèmes relationnels isomorphes ont la même structure, et que seule l'identité des éléments du domaine de base les distingue. C'est cette idée d'une similarité structurelle qui est déjà présente dans les travaux sur l'introduction de coordonnées dans les espaces projectifs (voir *supra.*, et chap. 1 et chap. 4).

Dans la *theory of measurement*, une distinction est faite entre système relationnel numérique et système relationnel empirique. Qu'est-ce qu'un système numérique ? Citons Suppes 1968, 7 :

Un système relationnel numérique est un système relationnel  $\langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$  dont le domaine  $A$  est un ensemble de nombres réels. Bien que cette définition ne place aucune restriction sur les relations  $R_i$  du système numérique, en pratique, ces relations sont limitées à certaines relations entre les nombres que l'on a l'habitude d'utiliser (*to certain common relations obtaining between numbers*)

<sup>1</sup> Les systèmes extensifs sont historiquement les premiers à avoir été analysés par Suppes ; voir Suppes 1951.

Un système relationnel numérique est donc simplement un système dont l'ensemble de base est une partie de  $\mathbb{R}$ . La dernière phrase doit être comprise ainsi : les relations qui apparaissent dans le système sont généralement des relations, des opérations, des fonctions qui sont utilisées à un niveau relativement élémentaire en mathématiques (opérations arithmétiques classiques, relation d'ordre, relation polynomiale, puissance, etc...). Suppes explique dans la suite du passage qu'il ne peut pas préciser plus rigoureusement la restriction qu'il a en tête, mais qu'il est de toute façon inutile de le faire, car les scientifiques savent généralement par quelles relations entre nombres ils veulent représenter les relations entre les objets mesurés (nous reviendrons bientôt sur ce point délicat).

Le système relationnel empirique est, lui, constitué d'un ensemble d'objets non numériques  $Q$  (représentant les quantités mesurées) et d'un certain nombre de relations entre ces objets (correspondant aux diverses formes de relations entre quantités). Ainsi (*Ibid.*) :

Un système relationnel empirique est un système relationnel dont le domaine est un ensemble d'entités identifiables, comme les poids, les personnes, les attitudes propositionnelles ou les sons. Si par exemple, le domaine  $A$  du système relationnel  $\langle A, R_I \rangle$  est constitué de poids, alors la relation  $R_I$  sera probablement la relation *est moins lourd que* – autrement dit, pour  $a$  et  $b$  dans  $A$ ,  $aR_I b$  indique que  $a$  est moins lourd que  $b$ .

Soient donc un système empirique  $\mathbf{E} = \langle Q, R_1, \dots, R_n \rangle$  et un système numérique  $\mathbf{N} = \langle N, S_1, \dots, S_n \rangle$  de même type que  $\mathbf{E}$ . À quelles conditions peut-on considérer  $\mathbf{N}$  comme un système de mesure de  $\mathbf{E}$  ? S'il existe une fonction  $m$  définie sur  $Q$  et à valeur dans  $N$ , qui est telle que  $R_i(a_1, \dots, a_{ui})$  ssi  $S_i(m(a_1), \dots, m(a_{ui}))$ , alors toutes les relations entre objets du système empirique  $\mathbf{E}$  pourront être reflétées, représentées par les relations entre nombres du système  $\mathbf{N}$ . La fonction  $m$ , de  $Q$  dans  $N$ , pourra donc, si tel est bien le cas, être considérée comme une mesure des entités de  $E$ . En reprenant l'exemple paradigmatique des structures extensives,  $\langle \mathbb{R}, \leq, + \rangle$  est dit mesurer le système empirique  $\langle X, \blacktriangleleft, \oplus \rangle$  si et seulement si il existe une fonction  $m$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $x \blacktriangleleft y \Leftrightarrow m(x) \leq m(y)$  et telle que  $m(x \oplus y) = m(x) + m(y)$  ;  $m$  peut alors à bon droit alors être conçue comme une mesure, et les éléments de  $X$  comme des quantités.

Autrement dit, pour pouvoir parler de mesure, il faut démontrer l'existence d'un morphisme entre un système empirique et un système numérique. Suppes nomme « théorème de représentation » la proposition qui affirme qu'un tel morphisme existe. Prouver un théorème de ce genre n'est pas chose triviale – si aucune condition n'est posée sur le système  $\mathbf{E}$ , l'existence d'un tel morphisme ne peut être démontrée. Reprenons l'exemple des systèmes extensifs. Suppes établit que pour que  $\mathbf{N}$  représente  $\mathbf{E}$ , il faut que :

- 1)  $\blacktriangleleft$  soit réflexive, transitive et connectée
- 2)  $a \oplus (b \oplus c) \approx (a \oplus b) \oplus c$ <sup>1</sup>
- 3)  $a \blacktriangleleft b$  ssi  $a \oplus c \blacktriangleleft b \oplus c$  ssi  $c \oplus a \blacktriangleleft c \oplus b$
- 4)  $\blacktriangleleft$  et  $\oplus$  vérifient une version de l'axiome d'Archimède.

Si une de ces conditions n'est pas satisfaite, le théorème de représentation ne peut pas être démontré.

La démarche de Suppes est donc complètement différente de celle de Stevens. Pour Suppes, un système de mesure n'est pas caractérisé par les transformations qui lui sont associées, mais défini par référence au système empirique qu'il est censé représenter et aux opérations arithmétiques qu'il est censé utiliser. Pour autant, et c'est là que se dévoile toute la force du modèle, le théorème de représentation se prolonge en un théorème dit « d'unicité ». L'existence d'un morphisme  $m$  entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{N}$  étant prouvée, la question de son unicité se pose

---

<sup>1</sup> On a  $a \approx b$  ssi  $a \blacktriangleleft b$  et  $b \blacktriangleleft a$ .

en effet naturellement. De façon plus précise, on dira qu'une transformation  $m \rightarrow m'$ , définie sur l'ensemble des fonctions de  $Q$  dans  $N$ , est admissible ssi  $m$  et  $m'$  sont deux morphismes de  $E$  dans  $N^1$ . Une transformation admissible transforme donc un morphisme (une « mesure ») de  $E$  dans  $N$  en un autre morphisme. Le rôle du théorème d'unicité est donc de délimiter l'ensemble des transformations admissibles des morphismes de  $E$  dans  $N$  – ou dit autrement, il est de caractériser quelle est l'échelle, au sens que Stevens donne à ce mot, du système de mesure défini par  $E$  et  $N$ . Ainsi, dans le cas des systèmes extensifs, on démontre que, si  $E$  satisfait les quatre axiomes listés plus haut, alors, si  $m$  et  $m'$  sont deux morphismes (deux mesures) de  $E$  dans  $N$ , il existe un réel positif  $\alpha$ , tel que  $m' = \alpha m$ . L'échelle des systèmes extensifs est une échelle ratio. À la différence de ce qui se passe chez Stevens, l'invariance du rapport n'est pas ici une donnée définitionnelle ; elle est déduite de la structure du système empirique  $E$  et du système numérique  $N^2$ .

J. Diez a ainsi vu juste : le raisonnement de Suppes se présente comme la synthèse de deux approches différentes, l'une fondée sur la notion de ressemblance structurelle (le théorème de représentation), l'autre sur la caractérisation du type d'échelle par le groupe de transformations associées (le théorème d'unicité). La belle idée de Suppes est d'articuler les deux inspirations, ou plus exactement de soumettre la seconde à la première : la distinction entre transformations admissibles et transformations qui ne le sont pas (le théorème d'unicité) dérive du type de relation qu'ont les deux structures (empirique et numérique) qui entrent en jeu dans la mesure. Si les auteurs du premier volume de *Foundations of Measurement* reconnaissent l'avancée de Stevens 1946 (« Stevens (1946, 1951) fut le premier à reconnaître et à souligner l'importance du type d'unicité exhibé par un homomorphisme de mesure (*measurement homomorphism*) et à avoir isolé les quatre types d'échelle – ratio, intervalle, log-intervalle, et ordinal » (11)) – ils soulignent parallèlement que (11-12) :

Le concept de transformation admissible est bien plus clair lorsqu'il est pris dans la perspective des homomorphismes entre structures relationnelles que lorsqu'il est pris dans la perspective des choix arbitraires de procédure de mesure.

Contrairement à ce qui se passe chez Stevens, on peut, chez Suppes, expliquer pourquoi « une transformation linéaire non positive de l'échelle Celsius (...) ne mesure pas la température » : la fonction  $m$  obtenue par une transformation linéaire non positive n'est plus un morphisme entre le système empirique considéré et système numérique utilisé. La délimitation des transformations admissibles ne relève pas d'une décision conventionnelle ; il y a une raison empirique, tenant à la nature de ce que l'on mesure et du mode de représentation employé, qui explique, dans la théorie du *measurement* pourquoi on doit exclure certaines transformations. À cette critique générale, d'ordre méthodologique, Suppes et ses collaborateurs ajoutent une autre objection, qui vise plus spécifiquement l'usage que Stevens fait des systèmes ratios dans ses propres travaux en psychophysique. Rappelons la thèse de Stevens : les hommes (dans des circonstances normales) ont la capacité de reconnaître que deux rapports (entre intensités sensorielles) sont égaux – mais pas, comme le pensait Fechner, la capacité de reconnaître que deux différences (entre sensations) sont égales<sup>3</sup>. Selon Stevens, cette divergence fonde la distinction entre deux systèmes de mesure incompatibles entre eux : les « fechnériens »

<sup>1</sup> Krantz 1971, 11-12.

<sup>2</sup> Il est important de comprendre que le choix de  $N$  (le choix des relations arithmétiques dans  $N$ ) joue un rôle crucial dans la détermination de la nature du système de mesure. Krantz 1971 souligne ce point ; voir notamment 99-101, où deux sortes de mesure d'un même système extensif  $\langle X, \triangleleft, \oplus \rangle$  sont présentées ; dans le premier,  $\langle X, \triangleleft, \oplus \rangle$  est mesuré par  $N = \langle \mathbb{R}, <, + \rangle$  ; dans le second,  $\langle X, \triangleleft, \oplus \rangle$  est mesuré par  $N'$ , en tout point pareil à  $N$  sauf que l'opération d'addition  $+$  est remplacée par l'opération  $+$ ' telle que si  $a$  et  $b$  sont deux réels,  $a + ' b = a + b + 2\sqrt{ab}$ . Il est clair que si  $m$  est une mesure de  $E$  par  $N$  et  $m'$  une mesure de  $E$  par  $N'$ , on n'a pas nécessairement  $m/m'$  constant.

<sup>3</sup> Voir plus haut, et notre chapitre 3 sur Meinong. Voir également Stevens 1986, chap. 1.

adoptent des échelles d'intervalle, alors que les procédures d'estimation directe intermodale que Stevens élabore<sup>1</sup> conduisent à développer des échelles ratio. Suppes et ses collaborateurs ont montré que cette analyse était erronée : les deux systèmes de mesure considérés par Stevens sont en réalité des « systèmes de différence » (i.e. des systèmes où aucune opération de concaténation n'est donnée, mais où il existe une possibilité d'ordonner, non pas les éléments du domaine, mais les intervalles entre éléments<sup>2</sup>), qui engendrent tous deux des échelles « ratio » (i.e. déterminées à un facteur multiplicatif près). En quoi consiste alors la différence entre Fechner et Stevens ? Selon les théoriciens du *measurement*, la réponse à cette question est loin d'être évidente. Il pourrait se faire, expliquent-ils, que l'opposition ne provienne pas d'une conception différente du système empirique *E* (i.e. d'une conception différente de la nature des sensations), mais simplement de l'instrument de mesure utilisé (i.e. de *N*) : la « conjecture de Torgerston » consiste à poser que la différence entre les lois logarithmiques (Fechner) et les lois puissances (Stevens) est le résultat d'un artefact, résultant de la façon dont on représente une même structure dans le système numérique<sup>3</sup>. Si la « conjecture de Torgerston » se révélait exacte, Stevens se tromperait donc complètement sur la nature de son opposition à Fechner. Les deux psychophysiciens ne divergeraient pas dans leur conception de la sensation, mais seulement dans leur façon de représenter mathématiquement la réalité sensorielle.

Selon les représentationalistes, cette erreur, ponctuelle, serait elle-même une des multiples conséquences du problème général qui mine l'ensemble de l'approche défendue par Stevens, c-à-d du fait que le psychophysicien n'adosse jamais sa distinction entre échelles à une analyse de la nature des quantités mesurées. Ainsi Krantz 1971, 11, note 2 :

Stevens n'a fourni aucun argument montrant que la procédure d'estimation des grandeurs (qu'il met au point) peut être axiomatisée de sorte à aboutir à une représentation en échelle ratio ; il n'a pas non plus décrit la structure relationnelle empirique, la structure relationnelle numérique, ni les axiomes qui permettent la construction d'un homomorphisme. Dans le chapitre 4 (exposant les systèmes de différences) nous présentons un

<sup>1</sup> La technique des estimations directes intermodales s'est perfectionnée tout au long de la carrière de Stevens. L'idée a été d'abord de demander à des sujets de faire correspondre des nombres à des intensités sensorielles – Stevens a montré qu'il y avait une concordance étonnante entre les « *matchings* » des différents sujets. Puis Stevens a demandé à ses sujets de faire correspondre des intensités lumineuses par exemple à des volumes sonores, utilisant la première modalité pour mesurer la seconde, inversant ensuite la procédure. Sur cette longue (et passionnante) émergence, voir Stevens 1986. L'idée fondamentale du psychophysicien est qu'à chaque modalité sensorielle est associée une échelle puissance, de type meinongien. Rappelons que, selon Meinong, si  $e$  est l'intensité de la sensation,  $r$  l'intensité du stimulus,  $C$  et  $k$  des constantes (Meinong 1896, §32), on a  $e = Cr^k$ . Le but des tests intermodaux est de vérifier l'hypothèse en essayant pour chaque modalité de déterminer l'exposant  $k$  et le facteur  $C$ . Voir Stevens 1986, 15, pour une table des exposants correspondant aux « *matching* » de différents types de stimuli.

<sup>2</sup> Sur ces systèmes, voir *supra*. Section II. Je reprends l'exemple suggestif de la mesure des longueurs donné dans Krantz 1971, 137 : « Supposons que (...) nous ayons une collection de règles non calibrées de différentes longueurs. Alors nous pouvons nous éloigner d'une façon nette de la mesure extensive en construisant des séquences standard (...) en utilisant les règles non calibrées pour produire des intervalles égaux. Par exemple, même si on ne connaît la longueur d'une enjambée, on peut tout de même déterminer le rapport approximatif entre deux distances en comptant le nombre d'enjambées qu'elles comportent. » C'est, selon Krantz et alii, cette méthode qui est mise en œuvre par Stevens (*Ibid.* 139) : « Dans la méthode des *matching* intermodaux, utilisé par S. S. Stevens et ses collaborateurs (...) on demande à l'observateur d'établir une correspondance (*match*) entre ses sensations, par exemple, entre la luminosité (*brightness*) et la force (*loudness*) de deux stimuli. Cette méthode dans laquelle seulement un stimulus de chaque modalité est présent à la fois, peut être intégrée dans notre cadre si nous faisons l'hypothèse que l'observateur fait correspondre à deux des extrémités des sensations mémorisées. Par exemple si la luminosité de la lumière  $a$  a été auparavant mise en correspondance avec le son  $a'$ , et que l'observateur est maintenant mis en contact avec une lumière  $b$ , nous faisons l'hypothèse qu'il choisit un son  $b'$  de sorte à ce que le rapport de luminosité entre  $b$  et  $a$  correspondent au rapport des forces entre les sons  $b'$  et  $a'$ . »

<sup>3</sup> Je renvoie le lecteur intéressé à Krantz 1971, 152-154, car je n'ai pas la place d'expliquer les détails techniques. Essayons tout de même de donner une idée générale. Imaginons qu'un système d'intervalles puisse être ordonné par deux relations d'ordre différentes et que l'on associe une représentation numérique additive au premier système, une représentation numérique multiplicative au second (autrement dit, on se retrouve dans le cas analysé dans la note page 120 où à une même structure *E* on fait correspondre deux systèmes *N* et *N'*). Si certaines conditions sont réunies, alors il est possible que les mesures associées aux intervalles et aux intensités sensorielles dans les deux systèmes coïncident. La conjecture de Torgerston consiste à faire l'hypothèse que c'est précisément ce qui se passe en psychophysique : les deux sortes de lois (logarithme et puissance) seraient vraies et compatibles entre elles.



ensemble d'axiomes plausible pour les familles d'expérimentation sur les correspondances intermodales (réalisées par Stevens) et, si les axiomes s'avèrent empiriquement valides, nous justifions (...), ce faisant, la thèse de Stevens.

La difficulté liée chez Stevens à la délimitation des transformations « admissibles » n'a donc pas qu'une portée méthodologique. Elle a des conséquences sur la propre pratique du scientifique, puisqu'elle semble le conduire à méconnaître le sens et la portée d'une de ses principales thèses.

### I- 3. Conclusion

Ce que la théorie représentationnelle retient du rapport final de la *British Association for the Advancement of Science* est que la question des conditions de possibilité de la mesure ne peut pas être contournée. Un système de mesure n'est pas simplement un ensemble de règles conventionnelles permettant d'associer des nombres à des choses. Les mesures et les relations entre les mesures doivent « représenter » certaines quantités et certaines relations entre ces quantités. L'erreur de Stevens est de ne pas l'avoir compris. Comme le note J.-B. Rauzy, « il n'est pas possible (dans le paradigme représentationnel) de séparer complètement une partie de la théorie portant sur *ce que c'est que mesurer* et une autre partie qui indiquerait *ce que l'on mesure* » (Rauzy 2004, 191). C'est, semble-t-il, la croyance en la possibilité d'une telle séparation qui a conduit Stevens à élaborer une classification des échelles de mesure qui ne tient pas compte de la question de savoir ce qui est mesuré. Le rééquilibrage induit par Suppes, i.e. la mise en avant du théorème de représentation et, corrélativement, la mise sous tutelle du problème d'unicité, revient à reconnaître que l'on ne peut pas définir ce que c'est que mesurer sans avoir préalablement élaboré une théorie de ce qui est mesuré. Pour pouvoir être représenté par un système numérique, le système empirique doit satisfaire certaines conditions. Le point est d'ailleurs problématique, car il recèle la possibilité d'un cercle vicieux. C'est en effet essentiellement par des mesures (plutôt que par des observations<sup>1</sup>) qu'une théorie empirique est généralement vérifiée ; comment alors établir la vérité des axiomes qui permettent de prouver le théorème de représentation, i.e. qui garantissent que les mesures représentent adéquatement la réalité ? Cette situation pose la question de savoir quelle est la nature de la « vérification » des postulats fondamentaux de la théorie garantissant la mesurabilité de certains phénomènes. Cette question est au cœur de nombreuses discussions<sup>2</sup>, mais comme elle touche plus à la question générale de la justification des lois scientifiques qu'à la question de la mesure, je la laisserai ici de côté.

Si Suppes et ses collaborateurs adhèrent à l'idée que toute mesure doit être fondée sur un théorème de représentation, ils rejettent, avec Stevens, les conclusions très conservatrices de la *British Association*. Le but de *Foundations of Measurement* est précisément de montrer que d'autres systèmes que les systèmes extensifs et ordinaux peuvent donner lieu à des théorèmes de représentation et des théorèmes d'unicité. Comme le montre la discussion menée plus haut, ce que Suppes et *alii* reprochent à Stevens, ce n'est pas sa méthode d'estimation directe intermodale des grandeurs psychologiques, mais le fait qu'il ne prenne pas la peine de la justifier. Suppes et ses collaborateurs se sont également beaucoup intéressés aux procédures de mesure en sciences sociales, notamment en économie. Le chapitre 6 de Krantz 1971 est entièrement consacré au système conjoint et à l'usage des courbes d'indifférence, qui jouent

---

<sup>1</sup> Voir Batitsky 1998.

<sup>2</sup> Batitsky, dans son 1998, tire de cette circularité la conclusion qu'une forme minimale de réalisme est impliquée dans les pratiques scientifiques usuelles. Pour un autre son de cloche, voir Krantz et alii, 1971, 26-31.

un rôle fondamental dans la théorie de l'utilité marginale<sup>1</sup>. L'approche représentationnaliste fournit donc un cadre permettant de légitimer, contre l'oukase de Campbell, de très nombreux systèmes de mesure. Le cas extensif, central au XIX<sup>ème</sup> siècle, et dont Campbell défend encore le caractère paradigmatique, n'est, pour Suppes comme pour Stevens, qu'un système parmi d'autres. Les théoriciens du *measurement* reprennent donc l'idée de classification des systèmes de mesure, mais à la différence de Stevens, ils expliquent pourquoi la notion d'échelle est le critère pertinent. Leur classification est raisonnée ; elle élimine tout arbitraire en justifiant pourquoi un groupe de transformation est associée à tel ou tel système de mesure. La théorie représentationnaliste conjugue donc deux avantages : elle offre une théorie unifiée de la mesure (tout système de mesure doit donner lieu à des théorèmes de représentation et d'unicité) qui rend malgré tout possible la distinction d'un très grand nombre de structures quantitatives (les systèmes de mesure ne sont pas tous nécessairement extensifs). J'aimerais souligner ici un autre intérêt, plus spécifiquement philosophique, de l'approche. Certains auteurs, prolongeant les remarques de Suppes, ont vu dans la théorie de la mesure un modèle à partir duquel une théorie générale des systèmes de représentation pouvait être édifiée. Ainsi, dans son 1991, C. Swoyer généralise la notion de système de mesure en introduisant le concept de représentation structurelle<sup>2</sup>. Le trait distinctif de ce genre de représentation est de permettre le raisonnement « surrogatif » (1991, 449) :

En examinant le comportement d'un modèle à l'échelle d'un avion dans un tunnel aérodynamique, nous pouvons tirer des conclusions concernant les réponses de l'aile nouvellement profilée à l'écoulement du vent, sans avoir besoin de faire voler le Boeing 747 au-dessus de Denver. En utilisant des nombres pour représenter les longueurs des objets physiques, nous pouvons représenter par des nombres les faits concernant les objets, effectuer des calculs de diverses sortes, et retraduire ensuite les résultats en une conclusion sur les objets originaux.

Comme dans le *Tractatus* de Wittgenstein (auquel Swoyer fait d'ailleurs allusion), c'est donc l'identité de structure entre l'image et ce qu'elle figure qui joue ici le rôle essentiel. Dans la suite de son article, Swoyer, mobilisant les ressources de la logique intensionnelle, présente une définition générale des représentations structurelles. Nous laisserons ce point de côté. L'idée à retenir est qu'une représentation (intensionnelle donc) d'un système **E** est un autre système **R**, dans lequel **E** est plongé isomorphiquement. La similarité structurelle entre les deux systèmes est ce qui explique pourquoi l'on peut représenter les faits de **E** par des situations de **R**, et transporter les conclusions de nos raisonnements conduits dans la structure d'accueil vers le système cible<sup>3</sup>.

Selon Swoyer, l'intérêt de l'approche est de permettre d'établir une distinction claire entre ce qui, dans les représentations structurelles, relève de décisions arbitraires (par exemple, choix de l'unité et du zéro dans les systèmes d'intervalle) et ce qui dépend de la situation représentée (Swoyer 1991, 463-464) :

<sup>1</sup> Krantz 1971 245-270. Dans les systèmes conjoints, on s'intéresse à un attribut *T* (comme la sensation de confort) qui ne comporte naturellement aucune structure additive, mais qui est composé de deux autres attributs (la température et l'humidité, par exemple). L'idée est de construire un système de mesure de *T* qui préserve l'ordre observé dans cet attribut, tout en faisant l'hypothèse que la valeur de *T* dépend de la valeur de ses composants.

<sup>2</sup> Comme Swoyer l'explique au début de (1991), son but est de montrer que certains phénomènes que l'on ne considère pas usuellement comme des représentations structurelles en sont en réalité – et que les traiter comme telles permet de clarifier certaines questions. Je renvoie le lecteur à l'article de Swoyer à la richesse duquel le développement qui suit ne rend pas justice.

<sup>3</sup> Encore une fois, la *theory of measurement* illustre ce phénomène de façon parfaite (Swoyer 1991, 452) : « Une telle similarité de structure explique pourquoi les mathématiques des nombres positifs réels s'appliquent aux objets physiques et à leurs longueurs. Nous partons des faits empiriques impliquant les objets physiques et usons de notre échelle de mesure comme un pont vers leurs représentants ou index (*surrogates or proxies*) numériques. Nous mobilisons alors la logique et la théorie mathématique des nombres réels positifs pour inférer de nouveaux faits numériques. Finalement, une fois nos calculs complétés, nous effectuons le trajet inverse pour arriver à une conclusion sur les objets physiques et leurs longueurs. »

Il est naturel pour les enfants de croire que le Groenland est plus grand que l'Algérie, étant donné que son image sur les cartes à l'école est beaucoup plus grande. Les enfants ne réalisent pas encore que, dans les projections conformes, les tailles relatives des images des pays ne correspondent pas à leur taille véritable – que les tailles, à la différence des formes, sont des artefacts de ces représentations. (...) En dépit de l'ubiquité des artefacts représentationnels, les tentatives d'en fournir une théorie générale ont été peu nombreuses ; les théoriciens de la mesure (*measurement theorists*) ont cependant fait un effort pour traiter de façon systématique une espèce d'artefact dans leur discussion du concept technique de *significativité* (*meaningfulness*) et nous pouvons apprendre de leur effort quelque chose de général sur les artefacts représentationnels.

Dans la théorie du *measurement*, les théorèmes d'unicité nous fournissent un moyen puissant et général pour distinguer ce qui, dans la mesure, est conventionnel et arbitraire, de ce qui a une réelle valeur informative. Pourquoi un rapport entre deux longueurs nous renseigne-t-il sur la réalité, alors que le rapport entre deux températures n'est qu'un artefact sans signification empirique ? Parce que les transformations associées aux échelles ratio (dont la mesure des longueurs relève) laissent le rapport invariant, et que ce n'est pas le cas des transformations associées aux échelles d'intervalle (dont la mesure de la température relève). Les théorèmes d'unicité nous apprennent pourquoi « l'affirmation que *a* est deux fois plus chaud que *b* correspond à un artefact ou une idiosyncrasie d'une échelle particulière de température », pourquoi « les rapports de mesures pour les températures n'ont aucune signification représentationnelle directe » (464). Swoyer souligne le caractère rationnellement extrêmement satisfaisant d'une démarche qui nous permet non seulement d'établir une distinction entre deux types d'énoncé, mais aussi de comprendre les raisons pour lesquelles la frontière est ainsi tracée. Rappelons en effet que le point est souvent loin d'être évident : une moyenne ou un écart-type entre températures donne une information sur le système cible – pourquoi un rapport entre température serait-il dénué de signification ?

Souhaitant tirer parti de la clarté induite par le dispositif des théorèmes d'unicité, Swoyer propose de ne plus le restreindre aux seuls systèmes de mesure, de l'étendre à toutes les représentations structurelles. Dans la dernière section de son article (1991), le philosophe esquisse une telle extension – il y applique le schéma aux représentations des entiers par des ensembles, aux représentations linguistiques, aux représentations mentales et à la sémantique des mondes possibles. Pour fixer les idées, disons un mot du premier exemple. Swoyer considère la construction des entiers de Von Neumann comme une représentation structurelle de  $\mathbb{N}$ , et il montre alors que le groupe de transformations associé à cette représentation est tel que la cardinalité de l'ensemble correspondant à un entier  $n$  est un artefact du système. On se souvient que la question de la cardinalité du nombre  $n$  (défini alternativement à la manière de Zermelo ou à la manière de Von Neumann) était ce qui faisait éclater le désaccord entre Johnny et Ernie dans Benacerraf 1965 (voir chap. 5). Dans le cadre mis en place par Swoyer, ce désaccord se révèle être exactement de même nature que celui qui pourrait s'élever au sujet du « vrai » rapport de deux températures entre les partisans des degrés Celsius et les partisans des degrés Fahrenheit<sup>1</sup>. Le cadre mis en place par Suppes est ainsi susceptible, selon Swoyer, de s'exporter à d'autres problèmes de façon féconde et de mettre en lumière des connexions entre des questions jusqu'à présent isolées les unes des autres.

En un sens, la problématique des « artefacts représentationnels » est très classique. Comme le note J.-B. Rauzy (2004), c'est celle, d'origine kantienne, de la critique rationnelle des illusions de la raison. Commentant l'exemple du rapport des températures pris par Swoyer, Rauzy écrit ainsi (200) :

Une source majeure des illusions représentationnelles procède du fait que les grandeurs – ou tout autre objet intervenant dans l'*exprimens* – ont naturellement tendance à intervenir dans des relations qui ne sont pas

<sup>1</sup> Voir Swoyer 1991, 477-479. Notons que l'assimilation des constructions ensemblistes à des systèmes de mesure est faite dans Maddy 1981.

autorisées par le système représentationnel considéré comme un tout. C'est pourquoi il s'agit bien d'une espèce d'*illusion*, c'est-à-dire d'une tendance engendrée par la procédure rationnelle.

Dans le cas de la mesure, la structure d'accueil étant constituée par des nombres réels, doter le rapport de deux mesures d'une signification est un « geste naturel ». L'intérêt de la *theory of measurement* est de nous donner un outil puissant pour débusquer ce genre d'illusion. L'idée de Swoyer est d'affirmer que rien ne justifie de restreindre le dispositif aux cas de la mesure ; les représentations qui mettent en jeu des structures d'accueil non numériques (par exemple, qui utilisent des ensembles) peuvent engendrer des illusions similaires, susceptibles d'être traitées de la même façon<sup>1</sup>. Selon Swoyer, l'idée centrale, féconde parce que généralisable, contenue dans la *theory of measurement* est que les systèmes de mesure sont toujours trop riches, toujours dotés de propriétés surnuméraires qui ne jouent aucun rôle dans la représentation mais qu'il est souvent impossible d'écarter – d'où la tendance irrésistible à leur attribuer une valeur informative. L'articulation du théorème de représentation et du théorème d'unicité constituerait, de ce point de vue, un véritable modèle pour la critique rationnelle des illusions de la représentation.

## II- La théorie représentationaliste à l'aune de *Principia VI*

Nous en savons suffisamment sur la théorie du *measurement* pour la confronter à la conception présentée dans *Principia VI*. Dans un premier moment, je soulignerai l'existence de certaines parentés entre les deux approches. Dans une seconde section, je marquerai une première différence critique : vu des *Principia*, la notion de système numérique *N* n'est pas clairement définie, et cette indétermination jette une ombre sur tout l'édifice. Dans un troisième moment, je m'en prendrai à l'idée selon laquelle l'approche représentationaliste fournirait une réponse générale à la question de l'application des mathématiques à la réalité.

### II-1. Les parentés entre *Principia VI* et la théorie représentationaliste

Deux traits rapprochent les deux conceptions. Un trait méthodologique d'abord : on trouve des équivalents des théorèmes de représentation dans les sections C et D de *Principia VI*. Un élément plus substantiel ensuite : la doctrine russelliano-whitheadienne de la quantité peut être conçue comme une théorie générale des systèmes d'intervalles.

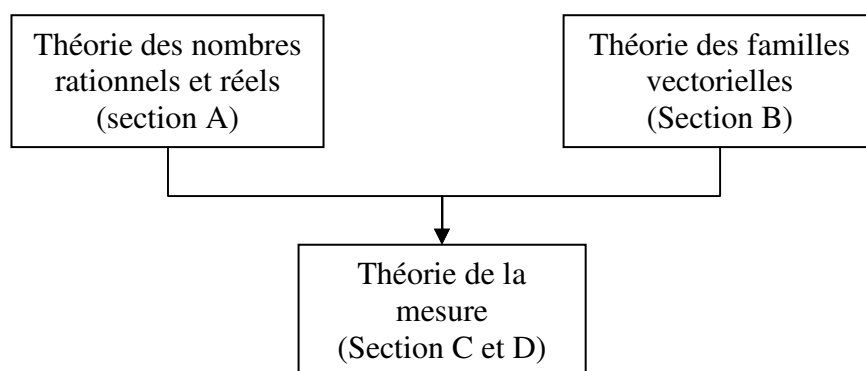
### II-11. *Principia VI* et la représentation

Tout l'intérêt du paradigme (mais aussi sans doute une partie de sa faiblesse, cf. voir *infra*.) mis en place dans la *theory of measurement* tient à son extrême généralité : il y a mesure lorsqu'il y a représentation, au sens des théorèmes de représentation, d'une partie de la réalité par un système numérique. Aucune restriction n'est dogmatiquement posée sur la nature des systèmes empiriques considérés. Cette généralité est clairement absente des *Principia*. L'horizon des logicistes reste celui des systèmes additifs. On ne trouve rien, dans les *Principia*, sur les systèmes à seuil important en psychologie (voir *infra*. section 3 de ce

---

<sup>1</sup> Swoyer distingue en réalité deux types d'artefact : les *mapping artefacts* et les *systemic artefacts*. Les premiers désignent les propriétés d'une représentation non invariantes par transformations admissibles (ainsi en va-t-il du rapport des mesures des températures) et présupposent donc qu'aient été définis à la fois le système *E* que l'on cherche à représenter et la structure d'accueil *N*. Les *systemic artefacts* sont, quant à eux, des conséquences du choix d'un mode de représentation plutôt qu'un autre pour représenter une même cible *E*. Ces artefacts sont ceux liés à la possibilité de définir divers systèmes de mesure alternatifs *N* et *N'* de la même structure empirique. Selon la « conjecture de Torgerstern », les différences entre lois logarithmiques (Fechner) et lois puissance (Stevens) seraient des artefacts systémiques (Voir notes pages 120 et 120).

chapitre), sur les systèmes conjoints, etc... On ne trouve absolument aucune trace non plus de l'idée, brillante, consistant à définir les échelles en termes de groupes de transformations associés. S'ils distinguent deux notions de mesures et divers systèmes quantitatifs (diverses familles de vecteurs), les auteurs des *Principia* ne dégagent pas de critère général de classification. Sur ce point, crucial, l'approche de Russell et Whitehead est nettement en retrait par rapport au paradigme contemporain. La doctrine des logicistes n'est pas générale et elle n'adopte pas les principes classificatoires mis au point par Stevens. Malgré cela, l'idée qu'un système de mesure n'est pas seulement une assignation numérique réglée, mais qu'elle nécessite un « transport de structure », est déjà présente dans les *Principia*. Rappelons la structure de la partie VI :



La théorie de la mesure, présentée dans les sections C et D, vise à établir l'existence d'un « lien » entre deux structures, l'une numérique (un sous-ensemble des nombres rationnels définis comme relations de relations), l'autre non numérique et possiblement empirique (les familles vectorielles).

Lorsque l'on examine plus précisément la nature cette connexion, on ne peut qu'être frappé par la proximité entre les raisonnements des logicistes et ceux de Suppes et de ses disciples. Au début de la section C, Russell et Whitehead énumèrent quatre conditions qu'une famille doit satisfaire pour être mesurable. Nous avons montré au chapitre 4 que, lorsque les deux premières demandes sont satisfaites, alors il existe une bijection  $A_S$  entre une partie de la famille vectorielle  $\kappa$  et une partie de  $\mathbb{Q}$  (dans cette bijection,  $S$  est le vecteur unité). Nous avons également souligné que si la quatrième condition est satisfaite, alors  $A_S(T|R) = A_S(T) + A_S(R)$  ; le produit relationnel entre membres de la partie de  $\kappa$  considérée est alors « représenté » par l'addition de leur mesure. Enfin, nous avons établi que la troisième condition pouvait être lue comme une demande relative à l'unicité : elle stipule, en effet, qu'un changement d'unité correspond à une multiplication des mesures par un facteur strictement positif. Ainsi, si nous considérons que  $T$ , au lieu de  $S$ , est l'unité, alors on aura  $A_T(R) = A_T(S) \times A_S(R)$ .

Bien entendu, il y a des différences entre cette définition de la mesurabilité et les caractéristiques des théorèmes de représentation. Le morphisme est défini non pas entre  $\langle \kappa, | \rangle$  et  $\langle \mathbb{Q}^+, + \rangle$ , mais entre une sous-structure de  $\langle \kappa, | \rangle$  et  $\langle \mathbb{Q}^+, + \rangle$  ; de plus, seules les mesures rationnelles sont prises en compte et l'extension aux mesures réelles fait l'objet d'un développement à part ; enfin, la condition d'unicité n'est pas clairement perçue comme une conséquence de la représentation. Mais l'idée essentielle d'une similarité de structure entre les objets mesurés et les mesures est très clairement affirmée. D'autre part, exactement comme dans les présentations « modernes », la définition de ce que c'est, pour un système numérique, de représenter un système quantitatif, est distinguée de la tâche consistant à démontrer la

possibilité d'une telle représentation. Ainsi Russell et Whitehead démontrent, après avoir défini le concept de famille mesurable, que les familles ouvertes connectées sous-multipliables qui contiennent toutes les puissances de leurs membres, satisfont les conditions énumérées dans la définition. Leur démarche est de ce point de vue identique à celle de Suppes et ses collaborateurs, qui, après avoir expliqué ce qu'était un théorème de représentation, démontrent qu'il est possible de prouver l'existence d'un morphisme entre tel système empirique  $E$  et tel système numérique  $N$ . Dans les deux conceptions, l'idée que la mesure n'est pas seulement une assignation de nombres, mais un transport de structures, est très clairement revendiquée<sup>1</sup>. Comme nous l'avons déjà noté, ce socle partagé s'explique certainement par l'origine géométrique commune des deux approches : de Von Staudt à Hölder, l'introduction des coordonnées dans un espace est conçue en termes de morphismes. Un point cependant distingue les deux théories. Suppes (comme les structuralistes dont nous avons parlé dans le chapitre 5) s'inscrit résolument dans la perspective ouverte par Hilbert : ce sont les axiomatiques qui sont chargées de décrire les échafaudages conceptuels que sont les structures. La représentation se pense dès lors comme un morphisme entre modèles de deux systèmes axiomatiques. Russell et Whitehead adoptent une démarche plus singulière. Nombres et quantités ne sont pas simplement connectés chez eux par la forme des rapports qu'ils ont chacun dans leur domaine. Ils ont des affinités plus profondes : les nombres sont des relations de relations, et ils ont donc « vocation » à être appliqué aux relations que sont les quantités, ce quelle que soit la structure du domaine qu'elles constituent. Ce qui fonde la connexion entre nombre et quantité, ce n'est pas seulement l'identité structurelle des domaines – mais leur nature elle-même. Le lien nombre/quantité est ontologique, il n'est pas seulement structurel. J'ai déjà développé ce point dans le chapitre précédent. Je le signale à nouveau, car il me permettra bientôt de montrer que les *Principia* ne tombent sous le coup d'une objection que l'on peut adresser à la *theory of measurement*.

## II-12. Familles vectorielles et systèmes d'intervalle.

Le chapitre 4 de Krantz 1971 est entièrement consacré à l'étude des systèmes empiriques dits « d'intervalle » ou « de différence ». S'ils diffèrent grandement les uns des autres, tous ces systèmes ont certains traits en commun. Un système d'intervalle  $I$  est minimalement constitué de trois éléments  $\langle A, A^*, \geq \rangle$ .  $A$  est l'ensemble de base ;  $A^*$  est une partie de  $A \times A$ , i.e.  $A^*$  est un ensemble de couples d'éléments de  $A$  ;  $\geq$  est une relation d'ordre faible (non nécessairement asymétrique)  $\geq$  définie sur  $A^*$ . Dans la mesure où la seule relation primitive est une relation d'ordre, on pourrait croire que ces systèmes sont purement ordinaux. Il n'en est cependant rien. En se plaçant dans le cadre des systèmes d'intervalles les plus simples, ceux que Krantz et *alii* nomment les *positive-difference structures*, il est possible de montrer qu'il existe une application  $m : A^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ , telle que pour tout  $a, b, c, d \in A$  :

- 1) si  $ab, cd \in A^*$ , alors  $ab \geq cd$  ssi  $m(ab) \geq m(cd)$  ;
- 2) si  $ab, bc \in A^*$ , alors  $m(ac) = m(ab) + m(bc)$

Ce qui est préservé dans la mesure, ce n'est donc pas simplement 1), c-à-d l'ordre sur  $A^*$ , mais également 2), c-à-d une forme d'additivité alors même, pourtant, qu'il n'existe pas d'opération primitive de concaténation dans  $I$ .

---

<sup>1</sup> Wiener, qui a été l'élève de Russell, débute son 1921 en rejetant l'idée que la mesure soit simplement une assignation conventionnelle de nombres – le passage vaut la peine d'être cité (181) : « Les choses ne se présentent pas, généralement, avec leur mesure tamponner sur elles, comme la capacité des wagons de marchandise : découvrir ce qu'est leur mesure requiert une certaine dose de recherche. » La critique que l'on pourrait adresser à Stevens est précisément de croire que les choses se présentent avec leur échelle « tamponnée sur elles ».

Ce trait explique pourquoi les systèmes de différences ont joué un rôle si important. Dans de nombreuses situations, les scientifiques cherchent à mesurer des phénomènes qui n'exhibent pas naturellement de structures additives. Aucune opération de concaténation entre températures, équivalente à celle qui existe entre masses par exemple, ne s'impose empiriquement ; de même, aucune procédure de concaténation entre intensités sensorielles ne s'impose à l'expérimentateur. Il est cependant possible de combler ce manque en ordonnant, non pas les températures, mais les différences entre températures – non pas les intensités sensorielles, mais les différences entre elles. Si certaines conditions sont posées sur  $A^*$ <sup>1</sup> et sur la relation «  $\geq$  » qui ordonne  $A^*$ , on démontre en effet qu'il existe une mesure  $m$  qui est telle que  $m(ac) = m(ab) + m(bc)$ . Ce qui se substitue dans **I** à l'opération de concaténation est la construction d'un intervalle  $ac$  de  $A^*$  à partir de la « mise bout à bout » des deux intervalles  $ab$  et  $bc$  de  $A^*$ . Or cette idée est au cœur de la théorie relationnaliste des grandeurs développée dans *Principia* VI. Si  $a$  et  $b$  ont la relation  $R$ ,  $b$  et  $c$  la relation  $S$ , alors  $a$  et  $c$  auront la relation  $R|S$ . Assimiler les quantités à des relations permet d'introduire l'addition entre quantités comme un produit relationnel (une composition d'applications), exactement de la même manière que la considération des intervalles de  $A^*$  et de leur « mise bout à bout » permet de se dispenser de l'opération de concaténation.

Il y a cependant deux différences entre les systèmes d'intervalles, tels que développés dans Krantz 1971, et les familles de vecteurs des *Principia*. La première est que les familles de vecteurs ne sont pas, comme l'est  $A^*$ , des ensembles de couples, mais des classes de relations un-un (i.e., des classes d'ensembles de couples jouissant de certaines propriétés). Dans les cas particuliers où un système d'intervalle **I** donne lieu à un théorème de représentation, alors on peut assimiler ce qui correspondrait aux relations de  $\kappa$  aux classes de couples de  $A^*$  qui ont la même mesure<sup>2</sup>. Mais la chose n'est pas toujours possible. La seconde différence est que, dans les familles vectorielles des *Principia*, contrairement à ce qui se passe dans les systèmes d'intervalle<sup>3</sup>, la relation d'ordre n'est pas une relation primitive. Certes, certaines familles vectorielles sont « sérielles ». Mais la définition de la mesure rationnelle, par exemple, ne requiert pas que la famille soit sérielle<sup>4</sup>. Cette seconde différence s'explique par le fait que Russell et Whitehead n'ont pas en tête le contexte des mesures psychophysique ou thermodynamique, dans lequel la comparaison ordinale entre différences est fondamentale – comme nous l'avons vu, l'horizon des deux auteurs reste la géométrie et les questions liées à l'introduction des coordonnées.

Malgré ces différences, l'idée que la structure quantitative additive n'est pas primitive mais dérivée se retrouve à la fois dans les systèmes d'intervalle et dans la théorie relationnelle. En adoptant le point de vue et la terminologie de Krantz 1971, on pourrait donc caractériser le projet de Russell et Whitehead ainsi : *Principia* VI vise à réduire toutes les structures quantitatives, même les structures extensives, à des systèmes d'intervalles. Citons une nouvelle fois ce que les logiciens disent de la masse, exemple paradigmatique de la quantité extensive (1913, 260-261) : « la « quantité vectorielle »  $R$ , qui relie une quantité  $m_1$  à une quantité  $m_2$ , est la relation provenant de l'existence d'une certaine procédure physique par laquelle un corps de masse  $m_1$  sera transformé en un autre corps de masse  $m_2$  ». Pour eux, une masse ne mesure pas un élément de  $A$  ou de  $\alpha$ , mais un intervalle ou une relation (un élément

<sup>1</sup> Par exemple, pour qu'un ersatz d'addition puisse être introduit, il faut que les systèmes **I** satisfassent cette condition (l'axiome 2 dans Krantz 1971, 147) : si  $ab, bc \in A^*$ , alors  $ac \in A^*$ .

<sup>2</sup> Voir mon développement sur les relations comme grandeurs et les couples comme quantités dans le chapitre 4. Voir également *infra*. sur Wiener.

<sup>3</sup> **I** est toujours défini comme un triplet  $\langle A, A^*, \geq \rangle$  ; dans tous les systèmes d'intervalle, la relation d'ordre est une relation indéfinissable, qui joue un rôle essentiel dans les démonstrations des théorèmes de représentation ; elle correspond à la possibilité empirique de comparer la grandeur des différences entre éléments de  $A$ .

<sup>4</sup> Les considérations ordinales sont absolument essentielles pour étendre la mesure aux nombres réels ; voir chap. 4, III-3.

de  $A^*$  ou de  $\kappa$ ). Même donc lorsqu'une opération de concaténation peut être introduite de façon naturelle, Russell et Whitehead tentent de l'éviter au profit du produit relationnel<sup>1</sup>.

Concluons. Il y a de grandes similarités entre *Principia* VI et l'approche représentationaliste qui tiennent à la fois à la méthodologie adoptée (la mesure est une représentation) et au contenu développé (il y a une proximité entre les systèmes d'intervalle et les grandeurs relationnelles). Cette convergence n'a rien d'étonnant : comme nous l'avons vu, la réflexion des logicistes tire sa substance des questions relatives à l'articulation entre géométrie synthétique et géométrie des coordonnées, c'est-à-dire de questions qui ont fourni aux recherches de Hölder, unanimement célébré comme le précurseur de la *theory of measurement*, leur matière première. Je vais toutefois, dans ce qui suit, soutenir que ces similarités sont superficielles, et que, sur le plan philosophique, les différences entre les deux théories sont profondes. Je me concentrerai particulièrement sur deux oppositions, qui manifestent de façon spectaculaire l'hétérogénéité des deux approches. La première, analysée dans la section II.2, concerne le rôle que jouent les nombres dans la mesure. Le point de départ de la *theory of measurement* est que la mesure est une assignation numérique – la question de savoir pourquoi la structure d'accueil doit toujours être un système de nombres n'est jamais envisagée. Le second point de clivage, étudié dans la section II.3, concerne le rôle qu'il convient de faire jouer à la quantité et à la mesure dans l'application des mathématiques à la réalité. Plusieurs philosophes considèrent que le problème de la mesure des quantités occupe une position centrale dans la question de savoir comment les mathématiques peuvent être appliquées au monde réel. En suivant certaines indications contenues dans les *Principia*, je développerai au contraire l'idée que réduire la question de l'application des mathématiques à celle de la mesure bloque toute possibilité d'y répondre de façon satisfaisante.

## II-2. L'indétermination du nombre et de la mesure.

Dans la théorie de Suppes et de ses collaborateurs, la mesure est définie comme le transport d'une structure dans une autre. Cette emphase mise sur la similarité structurelle conduit à accorder peu d'importance à la nature des éléments du système représentant. Ce qui compte, ce n'est pas de savoir ce par quoi sont mesurées les quantités, mais de s'assurer que les relations qu'ont les quantités entre elles sont reflétées par les relations entre leurs mesures. À la limite, même si les composants de la structure d'accueil étaient non numériques, il y aurait représentation si les relations entre eux correspondaient aux relations entre leurs corrélats. Mais y aurait-il pour autant mesure ?

On pourrait être tenté, dans un premier temps, de répondre négativement à cette question. La mesure est une représentation essentiellement numérique. La carte d'un territoire, par exemple, n'est pas une mesure. Cette réponse est semble-t-il celle proposée par Suppes et *alii*, qui posent que les systèmes représentants sont numériques. Mais une telle réponse ne va en réalité pas de soi. Il y a des mesures dans lesquelles les nombres ne jouent aucun rôle. Ainsi en va-t-il des procédures, mises au point par Stevens (1986), de *matching* intermodal (voir *supra.*) : il est demandé aux sujets testés de mettre en correspondance des intensités

<sup>1</sup> Dans un théorème de représentation pour un système d'intervalle, on trouve généralement deux résultats (voir Krantz 1971, 147). Le premier est qu'il existe une fonction  $m$  de  $A^*$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que pour tout  $a, b, c, d \in A : 1$ ) si  $ab, cd \in A^*$ , alors  $ab \geq cd$  ssi  $m(ab) \geq m(cd)$  ; 2) si  $ab, bc \in A^*$ , alors  $m(ac) = m(ab) + m(bc)$ , avec  $m$  fixé à l'unité près ( $m$  est une échelle ratio). Le second est que si certaines conditions sont satisfaites par  $A^*$  (pour les *positive-difference structures*, si  $\forall a, b \in A$ , alors  $ab$  ou  $ba \in A^*$ ), alors il existe une fonction  $m'$  de  $A$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que si  $ab \in A^*$ , alors  $m(ab) = m'(b) - m'(a)$ , avec  $m'$  fixé à l'unité et au zéro près ( $m'$  est une échelle d'intervalle au sens de Stevens). Ce résultat confirme ce qu'avancent Russell et Whitehead : il est possible d'extraire de toute mesure  $m$  des éléments de  $A^*$  une mesure  $m'$  des éléments de  $A$ . Cette manœuvre a cependant un coût, car, dans la mesure  $m'$ , le zéro est fixé arbitrairement.



lumineuses avec des volumes sonores par exemple ; ce qui mesure ici, c'est une échelle de sons, non une échelle de nombres. On peut citer d'autres exemples. Les égyptiens se servaient de clepsydras pour mesurer le temps. Les clepsydras fonctionnent sur le même principe que le sablier ; elles se présentaient initialement sous la forme d'un bol, avec un trou à leur point le plus bas, permettant l'écoulement de l'eau, et c'était à l'aide de graduations à l'intérieur du bol que le temps écoulé était déterminé. Ici, un niveau d'eau mesurait une durée – les mesures n'étaient pas des nombres.

Dans la conclusion de la section précédente, nous avons insisté sur le fait que les travaux des théoriciens du *measurement* avaient incité certains auteurs à développer une théorie puissante et générale des représentations structurelles. Une telle exploitation philosophique semble tout à fait pertinente. Mais précisément, elle indique en creux un point faible de la théorie représentationnaliste – le but de *Foundations of Measurement* n'est pas de poser la première pierre d'une théorie générale des illusions de la représentation, mais de rendre compte de la mesure. Concevoir la mesure comme un cas de représentation structurelle est sans doute extrêmement intéressant ; mais la question qui vient immédiatement à l'esprit est celle de savoir ce qui singularise la mesure par rapport aux autres sortes de représentations structurelles. Mesurer à l'aide d'une clepsydre ou d'une échelle de sons, est-ce encore mesurer ? Chez Suppes le système mesurant *N* est toujours défini sur un ensemble de nombres réels. Cette affirmation liminaire pose deux problèmes, liés l'un à l'autre, mais que je préfère distinguer. Le premier est un problème externe : les théoriciens du *measurement* n'expliquent jamais pourquoi les nombres, plutôt qu'autres choses, sont utilisés pour représenter les quantités. Le second est une difficulté interne. Suppes n'explique jamais vraiment ce qu'il entend par système numérique et par nombre.

## II-21. Pourquoi mesurer ?

Revenons à l'exemple de la clepsydre. Pourquoi les égyptiens utilisaient-ils l'écoulement de l'eau, plutôt qu'un autre support, pour représenter des intervalles de temps ? L'écoulement d'un liquide est certes un phénomène temporel, mais rien n'explique en effet *a priori* pourquoi ce phénomène temporel là, plutôt qu'un autre, a été choisi pour mesurer les durées ; rien d'intrinsèque ne semble lier niveaux d'eau à ce qu'ils mesurent. En réalité, les égyptiens utilisaient les clepsydras la nuit, lorsque plus aucune horloge solaire ne fonctionnait. C'est donc un fait purement contingent (l'existence du cycle jour/nuit, le désir de mesurer le temps dans l'obscurité) qui explique ici pourquoi les anciens utilisaient des horloges à eau<sup>1</sup>. L'usage contemporain des nombres relève-t-il de la même logique ? Y a-t-il une relation interne entre nombres et quantités qui expliqueraient pourquoi les nombres, et pas d'autres entités, sont aujourd'hui utilisés dans les sciences ? Ou bien faut-il expliquer l'ubiquité des mesures numériques par des considérations pragmatiques sur les désirs des hommes et la structure de leur environnement ?

Russell et Whitehead, comme Hale, optent pour la première solution. L'*Application Constraint*, reprise dans *Principia* VI comme dans Hale 2000, vise à expliquer en quoi les nombres sont particulièrement appropriés à la représentation des relations entre quantités. Nous avons déjà longuement parlé dans le chapitre précédent de *ApC*. Le contexte était alors celui de savoir si, et pourquoi, *ApC* était un principe qui pouvait guider les définitions des concepts mathématiques fondamentaux, et dans ce cadre, le cas réels était un exemple parmi d'autres possibles. Nous voyons maintenant apparaître une autre facette de *ApC*, cette fois spécifique au cas réel. *ApC* conduit à répondre positivement à la question de savoir si une théorie de la mesure doit expliquer pourquoi les réels (plutôt qu'autre chose) sont utilisés pour

<sup>1</sup> Sur les clepsydras et leurs usages, voir Cotterell & Kamminga 1990, 59-61.

représenter les relations quantitatives<sup>1</sup>. Pour les auteurs des *Principia* comme pour Hale, il y a un rapport intrinsèque entre les nombres et les quantités, qui fonde l'usage des nombres dans la mesure. Le cas des nombres n'est ainsi absolument pas comparable au cas des niveaux d'eau des anciennes clepsydres. Le lien entre nombres et quantités n'est pas externe et pragmatique ; il est interne et logique.

Lorsque les auteurs s'inspirant de l'approche représentationnaliste soulèvent explicitement la question de savoir pourquoi des nombres sont utilisés pour mesurer des choses, ils rejettent *ApC* et adoptent résolument la réponse « pragmatique ». Swoyer écrit ainsi (1991, 450-451) :

Le point fondamental, dans de nombreuses formes de représentation (...), est que la représentation nous permet de raisonner directement sur elle tout en nous permettant de tirer des conclusions sur les phénomènes représentés. Ceci peut être important pour diverses raisons : le phénomène cible peut être difficile à observer, à comprendre, à manipuler (...). Dans la mesure de la longueur ou du voltage, nous transformons une information concernant les grandeurs physiques en une information numérique, qui facilite le raisonnement grâce à l'ensemble riche de concepts mathématiques, de techniques, et de théories que notre culture fournit.

C'est ainsi, chez Swoyer, des considérations historiques sur notre culture qui justifie l'usage des nombres dans la mesure des quantités. Il se trouve que nous, hommes du XX<sup>ème</sup> et du XXI<sup>ème</sup> siècle, possédons des théories extrêmement puissantes sur les structures numériques, que nous avons appris depuis notre jeune âge à manipuler des nombres, et que, donc, nos déductions sont grandement facilitées lorsque les informations sont traduites dans ce *medium*. Sur le plan « ontologique », il n'y a pas plus de relations entre les nombres et les quantités qu'entre les niveaux d'eau et les durées ; rien ne destine les nombres, selon Swoyer, à jouer le rôle qu'ils jouent dans la mesure des phénomènes. C'est seulement la prise en compte d'un fait « culturel », historique<sup>2</sup> (mais peu importe qu'il soit historique en réalité : il aurait pu être biologique ou psychologique, cela n'aurait rien changé à l'affaire), qui explique pourquoi nous associons des nombres à des choses aussi différentes que des masses, des performances physiques, des températures, etc...

Cette réponse, « pragmatique », est tout à fait légitime. Ses partisans pourraient d'ailleurs faire valoir que la solution alternative, sous-tendue par *ApC*, est excessive : n'est-il pas raisonnable, lorsque l'on veut rendre compte de la diversité des systèmes de mesure, d'affaiblir nos ambitions théoriques et de relâcher le lien entre nombres et grandeurs ? On l'a vu, les théories exposées dans *Principia* VI et présentée dans Hale 2000, ont une portée limitée. La prise en compte de l'ensemble des façons d'utiliser les nombres pour mesurer des phénomènes conduirait inévitablement, pourrait-on soutenir, à affaiblir la relation entre nombres et quantités<sup>3</sup>. Il semble malgré tout étrange de mettre sur le même plan le rapport niveau d'eau / durée et le rapport nombre / quantité. Autant l'approche pragmatique semble aller de soi dans le premier cas, autant, dans le second, l'intuition résiste à l'idée qu'il n'y a rien d'autre qu'un fait, extérieur à la fois à la nature des nombres et à celle des quantités, qui fonde la relation entre les deux sortes d'objets. L'*Application Constraint*, dans ce contexte, ne demande rien d'autre que de faire droit à cette intuition.

De cette première réponse, tout à fait acceptable, il faut en distinguer une autre, qui pose plus de problème. Suppes et ses collaborateurs semblent parfois estimer que la question de savoir pourquoi l'on use des nombres dans la mesure est tout simplement dénuée de sens. Citons l'introduction de Suppes et Scott 1958 (113) :

---

<sup>1</sup> Si Hale et Russell/Whitehead ont une façon différente d'appréhender *ApC*, ils se rejoignent complètement sur le point que nous soulignons actuellement, à savoir la nécessité de fonder l'usage des nombres dans la mesure sur une analyse logique des nombres et des quantités.

<sup>2</sup> L'historien A. W. Crosby (1996) soutient que les pratiques liées à la « quantification » se sont développées durant le Moyen-âge sur une période très courte et qu'elles sont distinctives de la culture occidentale.

<sup>3</sup> C'est en substance l'argument que Batitsky développe contre Hale dans son 2002. Voir notre chapitre 5.

C'est une platitude scientifique que de dire qu'il ne peut n'y avoir ni contrôle ni prédiction précise des phénomènes sans mesure. Des disciplines aussi diverses que la cosmologie et la psychologie sociale fournissent la preuve qu'il est à peu près inutile d'avoir formulé de façon exacte une théorie quantitative si des méthodes de mesures empiriques portant sur une partie substantielle des concepts quantitatifs de la théorie ne peuvent pas être développées.

Que la mesure (par des nombres) soit « utile » est considérée ici comme une « platitude » sur laquelle on ne doit pas s'arrêter et que l'on ne doit pas même interroger. La mesure est définie, dans la théorie du *measurement* comme une assignation de nombres, et vouloir justifier cette définition paraît une perte de temps. Cette thèse semble excessive. On peut suivre Swoyer et affirmer que ce sont des considérations pragmatiques qui nous font choisir les nombres comme support privilégié de nos représentations ; on peut, au contraire, en suivant Hale, Russell et Whitehead, considérer que cela ne suffit pas et tenter d'explicitier la connexion logique entre les deux concepts. Mais on ne peut pas faire comme si la question n'existait pas, c'est-à-dire comme si elle pouvait être réglée par une simple définition, posée sans être discutée en préambule de la recherche. Cela reviendrait à rendre inintelligible le point de vue, certes contestable, mais tout de même pas absurde, de Hale, Russell et Whitehead. Il serait sans doute possible d'arrondir les propos de Suppes, et d'y voir l'expression d'une forme de pragmatisme ; si le savant estime que le problème de savoir pourquoi les hommes associent des nombres aux quantités ne relève pas de la *theory of measurement*, c'est très certainement parce qu'il considère que la question relève d'une analyse historique ou anthropologique du type de celle esquissée par Swoyer. Reste que ne pas expliciter le présupposé ne contribue pas à clarifier les choses. Et ce, d'autant plus, que, comme nous allons le voir maintenant, la définition que les théoriciens du *measurement* donnent des systèmes numériques n'est pas satisfaisante.

## II-22. Qu'est-ce qu'un système numérique ?

J'en viens maintenant à ma seconde critique. Elle ne vise pas la façon dont la théorie répond à une question externe, elle met en cause sa cohérence interne. L'argument est simple : aucun sens déterminé n'est donné à la notion de système numérique dans l'approche représentationaliste. Suppes affirme que  $N$  est un système relationnel numérique ssi son domaine  $N$  est constitué de nombres – ssi il est une partie de  $\mathbb{R}$ . Le fait qu'un système relationnel soit numérique ne dépend donc que de l'identité des éléments du domaine de base, non de la structure définie sur cet ensemble. Le point est absolument crucial : le fait que les systèmes numériques ne soient caractérisés que par l'identité des éléments de leur domaine est une condition nécessaire à la généralité de l'approche représentationaliste. Si on exigeait, par exemple, que les systèmes numériques possèdent une structure ordinale (comme le propose Diez dans son 1997), ou additive (comme le propose Campbell), alors de nombreux systèmes de mesure seraient d'emblée exclus du champ d'investigation. La question est dès lors la suivante : quel sens cela a-t-il de qualifier une entité de nombre réel, si, concomitamment, aucune condition n'est posée sur les relations que cette entité a avec les autres nombres ? Lorsque Suppes affirme que les éléments de  $N$  sont des nombres, il ne se prononce pas seulement sur la cardinalité de  $N$ . Il n'est pas en train de dire que  $\text{Card}(N)$  est inférieure ou égale à la puissance du continu. Il entend caractériser l'identité des éléments de  $N$ . Le problème est qu'on ne voit pas trop ce que pourrait signifier « être un nombre réel », lorsque le prédicat est ainsi isolé de toutes considérations ordinales et algébriques. La thèse selon laquelle élaborer une théorie des nombres, c'est élaborer une théorie d'au moins certaines relations entre les nombres, semble faire aujourd'hui consensus et être partagée par toutes les positions philosophiques, qu'elles soient d'inspiration nominaliste, platonicienne ou

structuraliste<sup>1</sup>. Le fait de définir les systèmes numériques indépendamment et antérieurement à tout théorème de représentation, à séparer les nombres (le domaine de  $\mathbf{N}$ ) de toute considération structurelle (concernant les relations admises dans  $\mathbf{N}$ ), marginalise l'approche des théoriciens du *measurement*.

Illustrons la difficulté par deux exemples. Celui, d'abord, des systèmes nominaux. Nous l'avons vu, Stevens considérait que les assignations de nombres aux joueurs d'une équipe de football constituaient un système de mesure. Les tenants de l'approche représentationaliste reprennent l'idée. Même si le système ne donne (quasiment) aucune information sur le système cible, le cadre mis en place est suffisamment général pour accueillir ce cas limite :  $\mathbf{N}$  est ici réduit à son ensemble de base  $N$ , sans relation, et  $\mathbf{E}$  à un ensemble d'objets  $E$ . Cette situation, il est vrai très singulière, est intéressante parce qu'elle permet d'illustrer de façon spectaculaire la question de l'identité des éléments de  $N$ . Platini jouait avec le numéro « 10 » ; cela aurait-il changé quelque chose s'il avait joué avec le numéro « X » ? Diez (1997, 180) note que les éléments de  $N$  sont, dans les échelles nominales, de simples marques, sans aucun contenu « numérique ». Il n'a pas tort : ce qui nous permet de distinguer Platini des autres joueurs, outre son talent exceptionnel, c'est la marque qu'il a derrière son dos ; que ce signe soit celui d'un nombre importe peu puisque qu'aucune relation entre nombres n'a ici valeur représentative. Mais alors, si c'est la marque, non le nombre qui représente, il faudrait que les partisans de Suppes ne parlent pas ici d'assignement de nombres, ou alors qu'ils disent ce qui compte comme marque « numérique » – qu'ils précisent, par exemple, que les chiffres arabes sont admissibles, mais que les chiffres romains sont exclus, etc. Bien évidemment, de telles considérations ne sont absolument pas pertinentes. Elles révèlent cependant que les critères d'identité des éléments de  $N$  dans une échelle nominale n'ont pas été clairement définis. Et le problème ne peut pas être évacué en affirmant que les échelles nominales sont des cas singuliers, en eux-mêmes complètement inintéressants. Car ces cas limites mettent à jour un problème général, qui résulte directement de l'idée, centrale dans la théorie, qu'on peut caractériser un système comme étant numérique indépendamment de toutes considérations relatives aux relations qu'il comporte.

L'autre exemple est celui de la distinction entre relations admises et « pathologiques ». Considérons un système empirique quelconque  $\mathbf{E} = \langle E, R_1, \dots, R_n \rangle$ , tel que  $\text{Card}(E) = \text{Card}(\mathbb{R})$ . Par définition, il existe alors une bijection entre  $E$  et  $\mathbb{R}$  ; appelons-la  $m$ . Nommons  $p_i$  l'arité de  $R_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et définissons  $S_i$ , de même arité  $p_i$ , de cette manière :  $\forall a_1, \dots, a_{p_i} \in E, (a_1, \dots, a_{p_i}) \in R_i$  ssi  $(m(a_1), \dots, m(a_{p_i})) \in S_i$ . Soit maintenant le système relationnel  $\mathbf{N} = \langle \mathbb{R}, S_1, \dots, S_n \rangle$ . Son domaine étant constitué de nombres,  $\mathbf{N}$  est un système numérique ;  $\mathbf{N}$  est de plus, par construction, similaire à  $\mathbf{E}$  ; enfin, comme  $\forall a_1, \dots, a_{p_i} \in E, (a_1, \dots, a_{p_i}) \in R_i$  ssi  $(m(a_1), \dots, m(a_{p_i})) \in S_i$ ,  $m$  est un isomorphisme entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{N}$ .  $\mathbf{N}$  représente, mesure, donc  $\mathbf{E}$ . Nous venons ici de montrer que, quel que soit le système empirique  $\mathbf{E}$ , il existe un système numérique qui le mesure. Il y a, de toute évidence ici, quelque chose qui ne va pas, car il n'est pas vrai que l'on puisse mesurer n'importe quel système empirique (dont la cardinalité du domaine est  $2^{\aleph_0}$ ). Qu'est-ce qui cloche ? Suppes et ses collaborateurs refuseraient en réalité de considérer  $\mathbf{N}$  comme un système numérique. Pourquoi ? Le système  $\mathbf{N}$  intervenant dans le théorème de représentation doit être, affirment-ils, « choisi de manière appropriée » (Suppes & Zinnes 1968, 8)<sup>2</sup> :

Le problème de représentation n'est pas adéquatement résolu si l'isomorphisme est établi entre un système empirique donné et un système numérique employant des relations non naturelles ou « pathologiques ». (...) Une catégorisation complète et précise des relations intuitivement désirables est hélas quelque chose de difficile à

<sup>1</sup> Voir sur ce point, chap. 5, les textes de Wright sur la définition de la tâche minimale de la philosophie des mathématiques.

<sup>2</sup> Voir également Suppes & Scott 1958, 116-117.

atteindre, et pour cette raison, la formulation du problème de représentation contient simplement la référence à un système numérique « choisie de façon appropriée ».

Pour que  $\mathbf{N}$  soit un système numérique, il ne suffit pas que  $N$  soit constitué de « nombres » ; il faut en plus les relations  $S_1, \dots, S_n$  ne soient pas être « pathologiques », c'est-à-dire qu'elles ne s'écartent pas trop des relations et des opérations sur les nombres que les mathématiciens ont l'habitude de considérer (relations d'ordre, opérations algébriques, polynômes, exponentielles et logarithmes...). Dans le cas considéré, rien ne permet d'affirmer que les relations  $S_1, \dots, S_n$  soient « naturelles », et Suppes refuserait ainsi de considérer  $\mathbf{N}$  comme un système numérique. Cette restriction aux relations « non pathologiques » est, bien entendu, tout à fait raisonnable. Un des buts de la mesure est de faciliter le traitement des informations, et la simplicité des relations numériques utilisées a, dans cette perspective, une importance centrale. Suppes a donc raison d'attirer l'attention sur le fait que toutes les représentations numériques possibles n'ont pas la même valeur. Mais ce faisant, il reconnaît que les relations introduites dans la structure  $\mathbf{N}$  sont essentielles à la définition d'un système numérique, contrairement à ce qu'il admet par ailleurs. Cette concession fragilise l'ensemble de l'édifice, et ceci d'autant plus qu'aucune précision sur le genre de relations que l'on peut introduire (les relations dites « non pathologiques ») n'est apportée.

Russell et Whitehead auraient certainement refusé de donner un sens au concept, fondamental dans l'approche de Suppes, de « système numériques ». On l'a vu, les logicistes distinguent en effet le type ordinal cantorien  $\theta$  et les nombres réels, et allaient même, comme c'est bien connu, jusqu'à refuser d'identifier le réel 2 avec l'entier 2 et le rationnel 2. Russell et Whitehead allaient même jusqu'à faire dépendre la définition des nombres de la considération des systèmes de mesure. Rappelons (voir chap. 4) le *feed-back* mis en place dans la section D de *Principia* VI : pour faciliter la théorie de la mesure des rapports dans une famille cyclique, les logicistes modifiaient la définition des rationnels. Non seulement la structure ordinale et algébrique des « nombres » corrélés aux quantités est, dans les *Principia*, très précisément définie, mais mieux : leur définition dépend en partie des structures quantitatives qu'ils sont censés mesurer. Alors que les théoriciens du *measurement*, ont tendance à homogénéiser ce qui relève du numérique, Russell et Whitehead mettaient au contraire l'accent sur l'extrême hétérogénéité des structures rassemblées sous le nom de nombre. Sans aller jusqu'aux positions, peut-être excessives, des logicistes, on ne peut qu'être troublé par l'extrême indétermination dans laquelle la notion de nombre est laissée dans la *theory of measurement*. Suppes et ses disciples feignent de croire que la notion de nombre est transparente, que la question a été déjà traitée et réglée par les mathématiciens. Or ce que les mathématiques définissent ce sont différentes structures : l'ensemble ordonné  $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ , le groupe complet archimédien  $\langle \mathbb{R}, <, + \rangle$ , le corps ordonné  $\langle \mathbb{R}, <, +, . \rangle$ , etc... – qui sont toutes en effet des structures que l'on trouve dans *Foundations of Measurement*. Mais les mathématiques ne nous donnent aucun moyen de rassembler ces objets disparates sous une catégorie bien unifiée, celle de système « numérique ». Or c'est précisément sur cette unité, fictive, que Suppes bâtit sa théorie<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Le fait que Suppes et *alii* fassent comme si la notion de système numérique allait de soi est sans doute lié à l'omniprésence et à la familiarité des pratiques de mesure dans nos cultures. Nous (hommes du XXème et du XXIème siècle) avons l'habitude de rassembler sous un même chapeau des pratiques (la « mesure », la « quantification ») dont l'homogénéité n'est que rarement questionnée. La *theory of measurement* reprendrait sans l'interroger ce présupposé culturel : un nombre, ce n'est finalement pour les tenants de cette approche rien d'autre ce avec quoi on mesure. J'emploierai donc l'argument pragmatiste, non pas comme le fait Swoyer pour expliquer pourquoi nous employons des nombres pour représenter des grandeurs, mais pour expliquer pourquoi les théoriciens du *measurement* semblent se satisfaire de leur définition, pourtant très vague, des nombres.

Concluons. Les partisans de la théorie du *measurement* distinguent très nettement les systèmes numériques (les mesures) et les systèmes empiriques (les quantités mesurées). Cette distinction pose deux questions : comment d'abord expliquer que les nombres, et non pas d'autres objets, soient utilisés dans la mesure ? Et comment ensuite distinguer les nombres (ce avec quoi on mesure) des entités non numériques ? On l'a vu, concernant le premier problème, Suppes et ses collaborateurs adoptent une position que j'ai qualifiée de « pragmatique » : aucune connexion « d'essence » ne relie nombre et quantité – il se trouve qu'il y a dans le monde des objets qu'on appelle des nombres, et que ces objets se révèlent particulièrement utiles pour représenter n'importe quel type de relation entre des entités quelconque. Cette première réponse présuppose donc que l'on puisse identifier ce qu'est un nombre indépendamment de toute considération relative à la mesure. Or, comme nous venons de le voir, les théoriciens du *measurement* ne donnent aucune définition convaincante de ce qui constitue un système numérique – fragilisant du même coup leur première réponse. Toute l'approche représentationaliste est basée sur l'analogie entre mesure et représentation : les mesures sont comme un miroir reflétant la réalité. Mais le miroir a une matérialité propre, qui le singularise et le distingue des autres objets. Qu'est-ce qui dans la mesure joue le rôle occupé par la matière du miroir ? Suppes répond : les nombres – sans parvenir toutefois à donner à la notion une quelconque consistance. Sa réponse n'est donc pas satisfaisante. Pourquoi alors ne pas renoncer à l'analogie ?

### II-3. *Measurement theory*, quantité et application des mathématiques

Les philosophes qui s'inspirent de la théorie du *measurement* tendent souvent à confondre la question de la mesure avec le problème de l'application des mathématiques à la réalité. Citons un passage, particulièrement révélateur, tiré de Batitsky 1998 (53) :

Les discussions philosophiques traditionnelles de la question du rapport entre la théorie et le monde sont complètement vides de sens (...), à moins que cette articulation soit comprise comme ayant lieu entre :

- (i) les valeurs quantitatives assignées par nous à certains attributs physiques sur la base de certaines interactions avec le monde, et
- (ii) les valeurs quantitatives imputées aux attributs en question par la théorie.

Mais les interactions avec le monde qui nous permettent d'assigner des valeurs quantitatives aux attributs physiques des objets dans le monde sont précisément ce que le terme « mesure » pris dans son sens le plus général veut dire.

L'articulation des mathématiques à la réalité est ici explicitement présentée comme un problème relatif à la mesure des phénomènes. Pour Batitsky, les théorèmes de représentation et d'unicité ne sont pas seulement des résultats légitimant l'usage d'un système de mesure ; ils permettent plus généralement d'expliquer pourquoi une proposition mathématique portant sur des entités non physiques, les nombres, peut véhiculer une information sur la réalité. Prenons un exemple élémentaire : l'addition des mesures des masses du corps *A* et du corps *B* est la mesure de la masse du corps composé de *A* et de *B* ; dans les échelles ordinales, en revanche, l'addition n'a pas de « signification » physique. Les théorèmes de représentation et d'unicité permettent d'expliquer de façon tout à fait satisfaisante pourquoi l'addition a une valeur représentative dans un cas et pas dans l'autre. Batitsky, et d'autres avec lui<sup>1</sup>, proposent de concevoir toutes les formes d'application des mathématiques à la réalité sur ce modèle. Cette thèse pose, au moins, deux difficultés : elle semble présupposer d'abord une réduction très problématique des mathématiques à une théorie des fonctions de nombres réels ; elle ne tient, en second lieu, absolument pas compte du fait que ce que l'on mesure, ce sont des quantités, et non pas n'importe quelle forme de réalité.

<sup>1</sup> Voir notamment Swoyer 1991, 247, 251.

### III-31. Appliquer les mathématiques et mesurer les phénomènes

Le premier point a été partiellement traité dans la section précédente, mais j'y reviens parce que la question me permet de combiner d'une façon nouvelle la théorie du *measurement* avec les *Principia*. Rappelons que, dans livre V des *Principia* (voir notre chapitre 4), les notions de limite, de convergence, de continuité d'une fonction, etc... sont des concepts purement ordinaux, qui doivent être définis indépendamment de toute référence aux nombres réels. Selon les logicistes, ces concepts s'appliquent directement à des *series* (des ensembles ordonnés) non numériques, comme la série temporelle par exemple. La possibilité de donner un sens à l'expression « limite d'une série convergente d'instantes », loin d'être fondée sur une assignation de nombres aux instants, puis sur un théorème de représentation, procède directement de la définition générale de la convergence et de l'hypothèse que la série temporelle forme un ordre total dense et complet. Vu cette perspective, l'approche des théoriciens du *measurement* apparaît inutilement compliquée et très inélégante : Batitsky, pour rendre compte de la possibilité d'utiliser les concepts de base du calcul différentiel, commence par démontrer la possibilité de mesurer le temps (théorème de représentation), puis prouve que l'échelle de mesure est telle que la considération de limites, de suites convergentes, etc... a une signification empirique (théorème d'unicité). Toute cette démarche repose sur un préalable consistant à faire de l'analyse mathématique l'étude de certaines propriétés de fonctions à variable réelle. Or rien n'oblige d'accorder ce préalable. Russell et Whitehead considèrent que lorsque les concepts de base de l'analyse sont généralisés et débarrassés de toutes leurs scories inessentiels, lorsque le véritable objet de la théorie est identifié, le détour par la mesure est complètement superflu<sup>1</sup>.

Pour Batitsky, les mathématiques « portent » sur les nombres ou sur les fonctions de « nombres » (sans pour autant que cette notion de nombre ou de système numérique fassent l'objet d'un examen approfondi, voir *supra*.) ; l'application des mathématiques à la réalité est donc toujours perçue comme une mesure, c'est-à-dire comme un transport d'une structure numérique dans un autre, non numérique. Pour Russell et Whitehead, les mathématiques ne sont pas une théorie des « nombres ». Il n'est donc pas nécessaire, pour eux, de concevoir l'application des mathématiques à des domaines « non-mathématiques » (i.e. dont les éléments ne sont pas des nombres) en termes de mesure, ou même de représentation. L'argument ne consiste pas à dire que toutes les applications possibles d'une théorie mathématique doivent nécessairement être contenues en germe dans la définition de ses concepts de base (ce qui serait complètement irréaliste). Il consiste simplement à rappeler une évidence : dans de très nombreux cas, les mathématiques utilisées par les scientifiques n'ont absolument rien à voir avec la théorie des fonctions de variables réelles – pensons, par exemple, au rôle fondamental qu'ont joué les groupes en physique quantique, à celui des graphes en cryptologie. Dans de telles situations, l'application des mathématiques ne peut pas être conçue en termes de mesure. Dit autrement, la mesure est une application particulière de certaines parties des mathématiques ; elle n'a pas vocation à devenir le modèle conceptuel à partir duquel aborder le problème général de l'application. Ce n'est qu'en distinguant les divers types de mathématiques utilisés, et, corrélativement les diverses sortes d'applications, que l'on peut espérer jeter quelques lumières sur les difficultés philosophiques liées à l'usage des mathématiques dans les sciences empiriques. Le premier pas dans la bonne direction est

---

<sup>1</sup> On peut faire un parallèle entre cette discussion et les débats qui ont, au XIX<sup>ème</sup> siècle, opposé les partisans et les détracteurs de la géométrie des coordonnées. L'approche cartésienne était alors critiquée parce qu'elle introduisait dans la théorie des figures géométriques une référence inessentielle aux nombres. Ainsi, L. Carnot, un des premiers à avoir souligné la nécessité de développer une approche synthétique, rejetait les « hiéroglyphes de l'analyse » (1803, 12-13) qui, en masquant les réalités géométriques derrière un voile numérique, nous faisaient perdre de vue les problèmes mathématiques eux-mêmes. Le détour par les nombres était ici aussi considéré comme superflu, inutilement compliqué et inélégant.

ici de se garder de toute velléité d'unification : il n'y a pas un problème de l'application des mathématiques ; il y en a plusieurs, de diverses sortes<sup>1</sup>. Penser l'application à partir de la *theory of measurement*, comme le fait Batitsky, nous empêche de faire ce premier pas.

On pourrait estimer que la critique précédente atteint un certain usage de la doctrine représentationaliste, mais non pas la doctrine elle-même. Après tout, Suppes présente sa théorie comme une théorie de la mesure, non comme une conception générale des rapports entre mathématiques et réalité. Je voudrais montrer néanmoins que le vers est dans le fruit et que certains traits de la *theory of measurement* ouvrent la voie à cette excessive généralisation.

### III-32 : Quantité et mesure des quantités

Avant les travaux de Suppes, l'interrogation concernant les conditions de possibilité de la mesure était toujours liée à une autre question, considérée comme plus originaire, ayant trait à la nature des quantités. Le concept de quantité a été, pendant tout le XIX<sup>e</sup> et le début du XX<sup>e</sup> siècle, un concept fondamental relevant de l'ontologie générale ou de la théorie générale de la science. Pour les philosophes (Hegel, Lotze, Bradley, Russell, etc...) comme pour les savants (Helmholtz, Kelvin, Fechner, ...), la quantité était une catégorie qui délimitait un certain domaine de la réalité. Et, point décisif pour nous, la question de la mesure ne se posait que pour les êtres qui appartenait à ce domaine – seules des quantités pouvaient faire l'objet d'une mesure. Cela ne signifiait pas que toute quantité était *ipso facto* mesurable – bien au contraire, comme nous l'avons vu au chapitre 1, la question de la mesurabilité des quantités psychologiques a opposé savants et philosophes au moins jusque dans les années 30s. Mais cela voulait dire que ce qui était mesurable était nécessairement quantitatif.

Cette idée disparaît dans l'approche de Suppes. Dans *Foundations of Measurement*, la notion de mesure (de représentation numérique) devient fondamentale et celle de quantité secondaire. Une quantité n'est en effet dans cette perspective qu'un élément d'un système empirique représentable par un système numérique. C'est donc le fait de pouvoir être mesuré qui constitue le trait distinctif d'une quantité. Disparaît ici non seulement la possibilité de penser des quantités non mesurables, mais plus fondamentalement, l'idée que la quantité est une catégorie délimitant une région de la réalité et un champ problématique. Ce bouleversement a des avantages. Rappelons que le souhait de délimiter exactement la sphère de la quantité avait conduit la *British Association* à exclure de la science tout un ensemble de recherches (la psychophysique) qui s'est révélé fécond. L'approche de Suppes permet de libéraliser l'approche de la mesure, et d'apporter une réponse nuancée à la question de savoir dans quelles conditions une certaine assignation de nombre est une mesure. Il reste qu'en renonçant à élaborer une théorie « substantielle » de la quantité, on rend problématique toute tentative de délimiter la place occupée par la mesure dans la science. Tout, absolument tout, est, dans la *theory of measurement*, susceptible de devenir une quantité. Ainsi, Platini et tous les joueurs stéphanois de l'époque bénie de la fin des années 70s, doivent être considérés comme des quantités, parce qu'ils sont « mesurés », représentés, par le numéro inscrit sur leur maillot. Or, si tout est susceptible d'être mesuré et d'être donc conçu comme une quantité, alors plus rien ne limite en droit le champ de la théorie du *measurement*, qui peut être utilisée pour rendre compte de n'importe quel type d'application des mathématiques à la réalité. Dans une approche à la Campbell, où la quantité est conçue comme une structure ordonnée additive, il est impossible de développer une théorie de l'applicabilité des mathématiques à partir de la mesure, tout simplement parce que les entités susceptibles d'être mesurées, les

---

<sup>1</sup> Voir sur ce point, Steiner 1995.



quantités, ne constituent qu'une petite partie des choses auxquelles les mathématiques sont habituellement appliquées. Lorsqu'en revanche la théorie de la mesure n'est plus soumise à une doctrine de la quantité, rien ne s'oppose à l'exportation des problématiques liées à la mesure à d'autres domaines. La disparition de tout concept substantiel de quantité fait ainsi sauter la « digue catégorielle » qui, au XIX<sup>ème</sup> et encore au début du XX<sup>ème</sup>, assignait à la mesure une place bien délimitée dans la science et la réalité. C'est cette réduction du quantitatif au mesurable qui est, semble-t-il, à l'origine de la tendance qu'a l'approche représentationaliste à phagocyter toutes les questions relatives à l'applicabilité des mathématiques.

Pour éviter cette extension incontrôlée du paradigme représentationaliste, faut-il en revenir à une conception plus substantielle et « dogmatique » du concept de quantité ? Bien entendu, une telle proposition se heurte immédiatement à l'objection que Stevens adressait déjà à Campbell : délimiter veut dire exclure ; or comment justifier l'exclusion de certaines pratiques de mesure, surtout lorsqu'elles s'adosent à un théorème de représentation ? Comment définir un concept « substantiel » de quantité ? Dans *Principia* VI, la notion de famille de vecteurs, censée formaliser l'idée de quantité, est élaborée indépendamment de toute référence à la mesure. Certes, un tel cadre, pourtant plus souple que celui de Campbell, oblige à rejeter hors du champ de la mesure certaines formes, aujourd'hui considérées comme légitimes (systèmes conjoints, mesure ordinale, ...) de quantification. Mais, dans le même temps, ce cadre est ce qui permet de séparer complètement l'application des concepts de base du calcul différentiel (*Principia* V) de toutes considérations relatives à la mesure, et de clarifier ainsi l'ensemble de la question. S'ils n'avaient pas posé des contraintes fortes sur la notion de grandeur, Russell et Whitehead n'auraient eu aucun moyen de s'opposer à l'idée que les *series* denses et complètes sont des types de quantité, et que l'application des concepts de l'analyse mathématique à ce genre d'entité procède d'une mesure. Mon argument ne consiste pas ici à dire que la définition donnée dans la section B de *Principia* VI est parfaite. Il consiste à faire remarquer qu'il faut distinguer deux problèmes : celui consistant à trouver une « bonne » définition de la quantité ; celui, plus fondamental, consistant à savoir si chercher une définition substantielle de la quantité a un sens. Le parti pris des théoriciens du *measurement* est de répondre négativement à ce second problème : Suppes et ses collaborateurs, en subordonnant la question de quantité à celle de la mesure, refuse de donner un sens à tout concept « substantiel » de quantité<sup>1</sup>. Mon propos est d'attirer l'attention sur les conséquences philosophiquement dévastatrices d'une telle attitude, qui entraîne inévitablement la pensée vers une extension non maîtrisée de la problématique de la mesure à tous les cas d'application des mathématiques. C'est précisément pour résister à cette tendance qu'il faut, me semble-t-il, ne pas abandonner le projet d'élaborer une théorie forte (i.e. indépendante de la mesure) de la quantité. Bien évidemment, parvenu à ce stade, se repose la première des deux questions distinguées : comment définir un « bon » concept de quantité ? Je n'ai pas de réponse à apporter à cette question – mais le fait de ne pas pouvoir y répondre ne signifie pas que la question n'a pas de sens.

---

<sup>1</sup> Ce souhait de trouver une unité commune à tous les systèmes de mesure n'est pas complètement absent de *Foundations of Measurement*. Dans le troisième volume, une place particulière semble être ainsi faite à l'axiome d'Archimède (Luce & alii 1990, 246-250), consubstantiellement lié, selon les auteurs, à la possibilité de construire des échelles de mesure. Plus révélateur peut-être, ce passage de la préface du volume I de *Foundations of Measurement* (xviii) : « Lorsqu'on explore la littérature sur la mesure (*measurement literature*), il devient clair que, en dépit du fait que chaque preuve utilise de façon particulière la structure (considérée), de nombreuses preuves sont très similaires. De plus, peu de choses sont faites pour relier un théorème particulier étudié à d'autres – à l'exception de ceux qui comportent exactement les mêmes concepts primitifs. Cela peut devenir en définitive frustrant : des résultats sont prouvés plusieurs fois ; il est extrêmement difficile de conserver une idée claire de la structure du champ ; on ne sait pas combien d'idées fondamentales il y a (...). Nous avons tenté d'organiser les résultats centraux d'une manière cumulative. » Si l'on en croit ce passage, la rédaction de *Foundations* proviendrait du désir de mettre de l'ordre et de dégager une unité aux différents systèmes quantitatifs. Il n'en demeure pas moins que cette unité n'est jamais explicitée. Aucune définition générale de la quantité n'est formulée dans *Foundations*.

Concluons. Il y a des similarités entre la *theory of measurement* et *Principia*. L'idée que la mesure est un transport de structure est présente dans les sections C et D du livre VI. De plus, les familles de vecteurs peuvent être considérées comme des systèmes de différences ou d'intervalles : les quantités sont des relations ou des couples, et l'addition entre grandeurs est un produit relationnel ou une « mise bout à bout » des intervalles. Les différences l'emportent toutefois, car elles sont philosophiquement très significatives<sup>1</sup>. Ce qui frappe en effet le lecteur des *Principia*, lorsqu'il parcourt *Foundations of Measurement*, c'est le caractère extrêmement indéterminé des deux concepts de nombre et de quantité. Les nombres sont isolés de toutes leurs propriétés structurelles, sans que soit clairement précisé ce qui leur reste en propre. Les quantités sont définies comme les éléments d'un système empirique mesurable et la notion de grandeur n'est donc plus caractérisée indépendamment des théorèmes de représentation.

Cette double indétermination a deux conséquences majeures. La première est qu'on ne trouve pas, dans la théorie du *measurement*, de justification à la définition de la mesure comme assignation de *nombres*. Dans les *Principia*, le lien entre nombres et quantités était logique et définitionnel : les grandeurs, en tant que relations, tombaient dans le champ des relations de relations qu'étaient les nombres. Aucune explication de ce genre n'est donnée par Suppes et ses collaborateurs, et le fossé entre les nombres et les objets qu'ils mesurent n'est (au mieux) comblé que par un récit pragmatico-historique, censé illustrer l'utilité qu'ont les nombres pour représenter les choses. La seconde conséquence de cette indétermination est qu'il existe une tendance à étendre de façon non contrôlée le schéma conceptuel du *measurement* à toutes les questions relatives aux rapports entre mathématiques et réalité. Ces deux mouvements ne vont pas, me semble-t-il, dans la bonne direction : ils tendent à brouiller les problèmes et à abolir des distinctions conceptuelles que les auteurs *Principia* cherchaient, eux, à mettre en relief.

Je voudrais, avant de passer à l'analyse des travaux de Wiener, relever une ressemblance entre la critique adressée ici aux théoriciens du *measurement* et celle émise dans le chapitre 5 à l'encontre du structuralisme. Suppes partage la même réserve que Shapiro à l'égard de tout ce qui relève de la métaphysique. Toute notion « substantielle » de la quantité est, chez le premier, évacuée au profit d'une conception plus positive de la mesure comme représentation ; le second entend développer une interprétation des mathématiques qui n'aille pas au-delà de ce que les mathématiciens eux-mêmes disent de leur sujet. L'ironie de l'histoire est que dans les deux cas, cette volonté de congédier la métaphysique au profit d'une philosophie « positive » produit de la métaphysique – et selon moi, de la mauvaise métaphysique. Les structuralistes en assimilant fidélité aux pratiques mathématiques à fidélité aux langages des mathématiciens rigidifient à l'extrême le rapport des mathématiciens à leurs formes d'expression et oblitérent du même coup tout ce qui, dans les mathématiques elles-mêmes, relève de considérations architectoniques. Les théoriciens du *measurement*, en rejetant tout forme d'interrogation ontologique sur l'essence de la quantité, généralisent à l'extrême la problématique de la mesure, et ce faisant, rendent impossible une analyse différenciée des mathématiques et de leurs applications. La charge est très classique et ne prétend à aucune originalité ; elle consiste à dire, après Kant, qu'on ne se débarrasse pas de la métaphysique par un simple *fiat*. Il reste que la critique possède, dans le contexte ici étudié, une certaine efficacité.

### III. La nouvelle théorie de la mesure de N. Wiener

---

<sup>1</sup> Je m'oppose donc sur ce point à Michell 1999. Voir chap. 1 pour plus sur l'interprétation de Michell,

Dans la dernière section de ce chapitre, je vais m'intéresser à une autre critique de la théorie représentationnelle, articulée pour la première fois par H. E. Kyburg (1984). Le lien entre cette attaque et la théorie des *Principia* n'est pas direct, il passe par N. Wiener<sup>1</sup>, qui, en 1921 a publié un article anticipant sur bien des points l'approche de Kyburg. À part le *Technical Report* de M. Gerlach (voir *infra.*), aucune étude, à ma connaissance, n'existe sur Wiener 1921. Mon premier objectif est donc ici de donner un aperçu rapide de ce qui est explicitement présenté par Wiener lui-même comme un prolongement des travaux de Russell et Whitehead. Mais une autre raison me pousse à parler de ce texte. Un des points faibles de la conception développée dans les *Principia* est son absence de généralité – même si la structure de famille vectorielle est très générale, elle est loin d'englober l'ensemble des systèmes de mesure pris en compte dans la théorie représentationnelle. L'extension que lui donne Wiener montre cependant que ces limitations sont en partie contingentes, simplement dues au fait que Russell et de Whitehead s'intéressaient surtout à la géométrie. Il est possible, sans bouleverser le cadre mis en place, d'élaborer une théorie d'un système de mesure dont la complexité et l'importance, même évaluée selon les canons de la *measurement theory*, est très grande.

Dans un premier temps, je présenterai succinctement le raisonnement de Kyburg, en insistant sur ce qui le rapproche de celui de Wiener. Dans les deux sections suivantes, j'exposerai les principales étapes de Wiener 1921. Je m'appuierai pour ce faire sur un travail de Gerlach, une élève de Suppes, qui, en 1957, a « traduit » les constructions de Wiener dans les termes de la théorie du *measurement*<sup>2</sup>. Ce commentaire permet d'entrer plus facilement dans le raisonnement, par moment très technique, du mathématicien ; parce que Gerlach projette sur l'approche de Wiener les catégories représentationnistes, il permet également de mettre en relief les différences entre l'approche de Suppes et celle de Wiener. Dans une quatrième partie, je reviendrai sur le fossé qui sépare Wiener de ses lecteurs représentationnistes.

### III-1. La mesure, idéalisation ou représentation ? Kyburg et Wiener

Nous avons jusqu'à présent accepté l'idée que mesurer, c'était représenter. On trouve cependant dans la littérature des voix qui s'élèvent contre cette assimilation. H. E. Kyburg (1984), notamment, maintient qu'il n'y a pas de théorie de la mesure sans théorie de l'erreur de mesure. Pour Suppes et ses collaborateurs en revanche, l'erreur est un phénomène parasite, brouillant la mesure et causé par le caractère défectueux des instruments, que l'on peut ignorer<sup>3</sup>. Afin de mieux cerner ce qui oppose les deux conceptions, je vais me concentrer sur la manière dont elles traitent de la question de la transitivité des jugements d'égalité. Dans de nombreux contextes, le fait que je ne puisse pas discriminer entre  $x$  et  $y$ , et entre  $y$  et  $z$ , ne signifie pas que je ne puisse pas distinguer les grandeurs  $x$  et  $z$ . La relation d'indiscernabilité en grandeur (c-à-d la relation pour une grandeur donnée de n'être ni plus grande ni plus petite qu'une autre) est souvent non transitive. Le problème est que les théorèmes de représentation semblent exiger la transitivité. Selon Kyburg, il y a là un dilemme. La fidélité à nos jugements perceptifs devrait nous conduire à considérer que la relation d'égalité n'est pas transitive ; mais le souhait de mesurer les grandeurs que nous percevons conduit à poser que la relation est transitive. Devons-nous sacrifier nos jugements comparatifs sur l'autel de la mesure ? Ou bien devons-nous abandonner toute velléité de mesurer des quantités dont l'égalité ne paraît

<sup>1</sup> N. Wiener est venu à Cambridge travailler avec Russell entre 1912 et 1914.

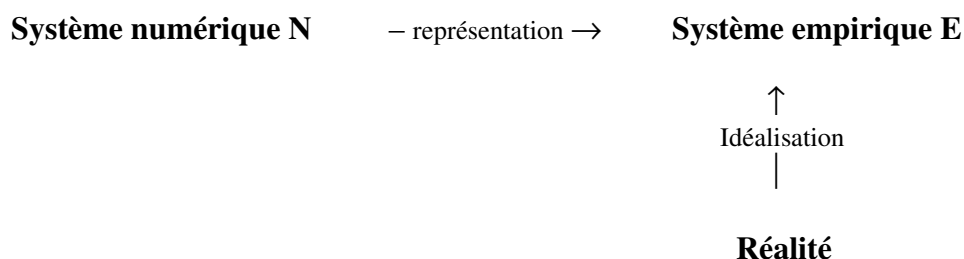
<sup>2</sup> Voilà ce que dit l'auteur à la fin de son introduction (Gerlach 1957, 23) : « Notre travail trouve son origine, et beaucoup de son contenu dans les idées sur la mesure sensorielle présentée par N. Wiener dès 1919. Nombre de ses suggestions, cependant, se sont avérées formellement allusives ; de plus, son esquisse comporte de graves lacunes qui doivent être remplies pour arriver à un développement axiomatique de ses idées ; enfin, sur certains points, nous avons pris nos distances avec les idées de Wiener pour introduire des notions jamais évoquées par lui. Ces exceptions considérées, notre travail doit être considéré comme une axiomatisation des premières études de Wiener. »

<sup>3</sup> Voir Suppes 1989, 299-382.

pas transitive ? C'est, selon Kyburg, cette alternative qui doit être placée au cœur toute théorie de la mesure (1984, 8-9) :

La clé pour parvenir à un équilibre entre les deux *desiderata* est à trouver dans la théorie des erreurs de mesure. Nous pouvons éliminer les erreurs de mesure en posant que nos jugements comparatifs sont infaillibles et incorrigibles. Les systèmes de mesure résultant seront pires que complexes, et inutiles ; ils seront dénués de pouvoir prédictif, et sans efficace communicationnelle. Ou nous pouvons choisir un système de mesure simple et élégant, et supposer que les jugements qui entrent en conflit avec lui sont dans l'erreur ; mais si nos jugements sont très fréquemment dans l'erreur, alors de nouveau le système de mesure est sans aucune utilité pour nous.

La première branche de l'alternative est celle suivie par la *measurement theory*. Elle consiste à développer une théorie des systèmes empiriques « non-transitifs » et à démontrer que, malgré cette complication, des théorèmes de représentation sont démontrables. Selon Kyburg, cette voie est une impasse, car même si, formellement, la démarche est cohérente, la complexité des systèmes est telle qu'elle les rend inutilisable. Pour le philosophe, la transitivité de la relation d'égalité est ainsi une condition nécessaire à la mesure. La seconde branche de l'alternative consiste à développer une théorie de la mesure qui reste simple (« transitive »), mais qui est en contradiction avec les jugements perceptifs et qui est donc également inutilisable. C'est cette piste que va pourtant explorer plus avant Kyburg. L'originalité de Kyburg est en effet de poser un hiatus entre la structure de la réalité, telle qu'elle se présente aux scientifiques et les réquisits de la mesure. Un schéma résume le propos :



Les partisans de la théorie du *measurement* ignorent, selon Kyburg, que le véritable problème de la mesure est celui, présenté dans la colonne de droite, du rapport entre les systèmes empiriques (i.e. les structures quantitatives) et l'expérience. Kyburg reproche ainsi à Suppes et ses disciples d'avoir cru à la réalité de leurs systèmes empiriques – de n'avoir pas vu qu'ils ne sont jamais que des représentations *idéalisées*, non exactes, de situations concrètes. Les représentationalistes pourraient rétorquer que rien n'oblige à prendre pour système empirique des systèmes aussi simples que les systèmes extensifs – qu'il est possible de « capturer » dans des structures relationnelles plus complexes ce que Kyburg distingue sous la catégorie de « réalité » (c'est précisément la solution évoquée dans la première branche de l'alternative). Mais pour Kyburg, cette manœuvre est un échec car elle introduit au niveau des jugements quantitatifs une « irrégularité »<sup>1</sup> qui leur ôte tout intérêt. Bien entendu, toute la difficulté est alors de déterminer plus précisément la nature de la relation d'idéalisation. C'est à ce niveau que la théorie de l'erreur joue un rôle crucial : au lieu d'opposer la transitivité de l'égalité quantitative à la non-transitivité de l'indiscernabilité

<sup>1</sup> J'emploie l'opposition régulier / irrégulier dans le sens vague suivant : un système relationnel est régulier lorsque les relations qu'il contient ont des propriétés formelles très riches (comme la transitivité) qui permet de démontrer facilement le théorème de représentation ; un système est irrégulier lorsque ce n'est pas le cas.

perceptive, Kyburg propose en effet de concevoir la non-transitivité comme la conséquence d'erreurs de jugement. L'élaboration de cette idée, assez banale finalement, est, dans le détail, très délicate. Selon Kyburg 1984, la construction du système quantitatif **E** procède de l'arbitrage entre deux *desiderata* jouant en sens contraire : le premier vise à une simplification du système de nos jugements perceptifs, le second à une minimisation des erreurs de jugement. Ce dernier objectif est tout aussi important que le premier, puisque, en cherchant à minimiser le désajustement entre le niveau quantitatif et le niveau perceptif, il permet d'expliquer pourquoi les jugements quantitatifs nous renseignent sur la réalité. Mais l'idée de minimisation fait difficulté : pour minimiser l'erreur, il faut pouvoir la quantifier ; mais pour la quantifier, il faut, semble-t-il, connaître les véritables valeurs des quantités cibles – ce qui n'est par définition pas possible ici, puisque ces valeurs « idéales » sont celles-là mêmes qu'il s'agit de construire<sup>1</sup>. Afin de contourner l'obstacle, Kyburg utilise deux principes statistiques, le principe de « rejet minimum » et le principe de « distribution », qui permettent d'induire une théorie quantitative de l'erreur à partir des seuls jugements de perception, et de construire sur cette base une théorie de la quantité<sup>2</sup>. Je laisse de côté ce point qui touche plus aux conceptions que Kyburg développe de la probabilité et de la rationalité des agents que de la théorie de la quantité.

On retrouve la séparation entre système quantitatif idéal et jugements perceptifs concret dans les chapitres 3 et 4 de Kyburg 1984, consacré à l'analyse des systèmes extensifs de mesure des longueurs. Kyburg y distinguent cinq langages différents, cumulativement liés uns aux autres<sup>3</sup>. Les trois premiers, non quantitatifs, sont censés codifier nos jugements perceptifs de comparaison des longueurs<sup>4</sup> ; les deux derniers sont quantitatifs<sup>5</sup>. La structure du langage  $L_4$  est particulièrement intéressante : son vocabulaire contient celui de  $L_3$ , notamment une relation « perceptive »  $<$  d'ordre et une relation « perceptive »  $\oplus$  de concaténation, auxquelles s'ajoute une relation « quantitative » d'ordre  $<^*$  et une relation « quantitative » de concaténation  $\oplus^*$ . Les deux nouvelles relations sont définies sur exactement le même domaine que les relations « quasi-observables »  $<$  et  $\oplus$ , et des axiomes garantissent que les nouvelles relations  $<^*$  et  $\oplus^*$  se comportent de la façon « régulière » (ainsi, la relation d'égalité entre quantités est transitive<sup>6</sup>). On retrouve donc au niveau de la structure syntaxique de  $L_4$  les deux étages du schéma précédent : les relations « perceptives », représentées par les symboles «  $<$  » et «  $\oplus$  », les relations « quantitatives », plus « régulières », appartenant au système **E**, représentées par les symboles «  $<^*$  » et «  $\oplus^*$  ». Au niveau de  $L_4$ , toutefois, aucun axiome particulier ne relie les deux couches syntaxiques : la machinerie mise en place « reste sans usage à cause du manque de connexion entre la relation (quasi-observable  $<$  et la relation sans irrégularité (*nicely behaved*)  $<^*$  ». Ce sont les axiomes de  $L_5$ , formalisant la théorie « quantitative » de l'erreur, qui permettent de lier les deux niveaux (en ce sens, les axiomes de

<sup>1</sup> Ainsi, comme le résume Kyburg (1984, 256) : « Puisque toute tentative pour évaluer une quantité peut rater sa cible avec une marge essentiellement illimitée, nous ne pouvons pas commencer à mesurer (ou prendre au sérieux nos mesures) sans avoir une connaissance statistique quantitative de la distribution des erreurs de mesure. Ceci semble présenter un problème insoluble : (...) comment pouvons-nous obtenir des données sur les erreurs de mesure, sans connaître les vraies valeurs correspondant aux mesures que nous sommes en train de faire ? »

<sup>2</sup> Le premier principe s'énonce ainsi (1984, 44) : « Etant donné un ensemble d'énoncés incluant des [jugements perceptifs] qui sont incohérents avec les axiomes de notre langage, le nombre de [jugements perceptifs] rejetés pour garantir la cohérence doit être le plus petit possible ». Le second ainsi (*Ibid*, 55) : « Etant donné un ensemble d'énoncés incluant des [jugements perceptifs] qui sont incohérents avec les axiomes de notre langage, et en supposant que le principe de rejet minimum soit satisfait, le nombre de [jugements perceptifs] de chaque genre à rejeter est le nombre qui rend le taux de rejet pour les divers genres aussi uniforme que possible ».

<sup>3</sup> Les différents « langages » (qui sont en réalité des théories puisqu'ils contiennent des axiomes) sont tous des extensions des « langages » qui les précèdent.

<sup>4</sup> Kyburg 1984, 36-60.

<sup>5</sup> *Ibid*. 61-84.

<sup>6</sup> Bien entendu, la relation d'indiscernabilité perceptive, définissable à partir de la relation «  $>$  », n'est pas, elle, transitive.

L<sub>5</sub> ne sont pas sans rappeler les *bridge laws* des positivistes logiques), et de donner un contenu à la notion d'idéalisation.

Kyburg fait remonter l'idée selon laquelle mesurer, c'est idéaliser (et non pas seulement représenter), aux travaux de N. Wiener sur la quantité. Il note ainsi, au début de son chapitre 3 (1984, 36) que les « déviations par rapport à la procédure standard tenant compte de l'inexactitude de la perception humaine date [des travaux] de Wiener, qui restèrent largement inconnus pendant soixante ans » (i.e. jusqu'à ce qu'il les redécouvre). Kyburg a d'ailleurs édité les textes que Wiener a consacrés à la quantité dans le volume I des *Collected Works of N. Wiener*<sup>1</sup>. Le philosophe souligne toutefois l'existence d'une différence entre lui et Wiener. Dans L<sub>4</sub>, les relations  $<^*$  et  $\oplus^*$  sont introduites comme des relations primitives, définies sur les mêmes domaines que  $<$  et  $\oplus$ . Kyburg note (1984, 61-62) que l'on pourrait adopter une stratégie différente qui consisterait à construire les relations quantitatives à partir des relations entre observables, et à définir les quantités comme des classes d'équivalences d'objets observables. Cette stratégie qu'il ne reprend pas correspond précisément, explique Kyburg, à celle que Wiener met en œuvre en 1921 (1984, 61-62). Mais avant de revenir de façon plus détaillée sur cette comparaison entre Kyburg et Wiener, il me faut présenter le contenu de *A new theory of measurement* (Wiener 1921).

C'est en 1912-1913 que Wiener est venu à Cambridge étudier la logique avec Russell, et c'est de cette période que datent ses recherches sur la quantité<sup>2</sup>. Le but de Wiener était d'étendre la théorie exposée dans *Principia* VI au système de mesure psychophysique. Au début de son article, Wiener souligne que les familles ouvertes russelliano-whiteheadienne n'ont pas d'élément maximum, et que ce trait interdit d'appliquer la doctrine de la mesure présentée dans la section C à des types de quantités où existe une grandeur maximale, comme le sont les intensités sensorielles (1921, 181-182)<sup>3</sup>. À cette première difficulté s'en ajoute une autre : pour étendre la théorie des *Principia* à la mesure des sensations, il faut prendre en compte les phénomènes de seuils perceptifs, donc la non-transitivité de la relation d'indiscernabilité entre intensités – ce que Russell et Whitehead n'avaient pas fait. C'est ce dernier point, qui, bien entendu, rapproche la démarche de Kyburg de celle de Wiener.

*A new theory of measurement* est un texte difficile (comparable, dans sa technicité, à la section B de *Principia* VI), dans lequel Wiener utilise massivement les symboles russelliens, ce qui n'accroît pas l'intelligibilité de son propos. Le texte se décompose en cinq parties, bien distinctes. Une longue introduction décrit d'abord, sans formalisme, les principales étapes de l'analyse à venir (181-188). La section 1, ensuite, explicite la structure formelle de la famille de vecteurs que l'on cherche à analyser. Dans les sections 2 et 3, deux systèmes de mesure sont successivement envisagés – le premier considère l'intensité maximum comme unité de mesure, le second vise à élaborer un système où l'unité est le seuil d'indiscernabilité. Dans la section 4, Wiener effectue une comparaison entre le contenu de *Principia* VI section C et son second système de mesure et en tire la conséquence que les deux systèmes sont équivalents. Enfin, dans une brève section 5, Wiener tire les conclusions épistémologiques de son analyse. Je vais ici me concentrer sur la section 1, puis sur la différence entre les deux systèmes mis en place dans les sections 2 et 3. Comme je l'ai déjà dit, je ferai usage de la « traduction » élaborée par Gerlach en 1957.

---

<sup>1</sup> Ce qu'il dit à cette occasion fait écho au passage juste cité (Wiener 1976, 86) : « [Cet article de Wiener] fournit une analyse détaillée de la façon dont on peut procéder à partir des relations apparentes de plus grand et plus petit jusqu'aux mesures quantitatives. Bien que ce travail soit extrêmement suggestif, les idées développées n'ont été que très rarement acceptées. À bien des égards, la recherche actuelle sur la théorie du *measurement* s'effectue dans l'ignorance de l'importance séminale de (cet article). »

<sup>2</sup> La correspondance entre Russell et Wiener montre en effet que le contenu de l'article publié en 1921 est déjà en place autour de 1914. Voir notamment la lettre de Russell à Wiener datant du 12 juillet 1914.

<sup>3</sup> Wiener 1921, 183: « Il n'existe pas un degré de bruit autant de fois plus grand que ne l'est celui d'une corne de brume entendu de très près par rapport à celui du tic-tac d'une montre entendu à une distance de dix pieds. »

### III-2. *A new theory of measurement* (1) : Les vecteurs intensités

Wiener commence par fixer ce qu'il nomme « l'expérience fondamentale à partir de laquelle la mesure peut être exécutée » (182), et qui correspond à ce que Kyburg appelle les jugements comparatifs de perception. Selon Wiener, un bon point pour l'analyse est le jugement (183) :

L'intervalle entre  $x$  et  $y$  semble plus petit que l'intervalle entre  $u$  et  $v$ . (\*)

Je noterai dans la suite  $(x, y)$  l'intervalle entre  $x$  et  $y$ , et, comme Wiener,  $\phi(x, y, u, v)$  la proposition (\*). Selon Wiener, donc, les sujets sont dotés de la capacité d'ordonner les intervalles de sensations. Mais, point décisif, si la relation « plus petit », notée  $<'$ , entre intervalles est supposée transitive, la relation d'indiscernabilité entre intervalles, noté  $\approx'$  et définissable à partir de  $<'$ <sup>1</sup>, ne l'est pas. Autrement dit, si  $<'$  est une relation d'ordre strict sur l'ensemble des intervalles ( $<'$  est irréflexive, asymétrique et transitive),  $<'$  n'est que faiblement connectée :  $a$  et  $b$  étant deux intervalles quelconques, on a  $a <' b \vee a \approx' b \vee b <' a$ , mais on n'a pas  $a <' b \vee a = b \vee b <' a$ .

Wiener se concentre ensuite sur les intervalles supraliminaires positifs – c'est-à-dire ceux qui sont strictement supérieurs à l'intervalle « nul »  $(x, x)$ . Il définit l'égalité réelle, noté «  $=*$  »<sup>2</sup>, entre intervalles supraliminaires positifs de la manière suivante. Soient  $x, y, u, v$  des sensations d'un certain type, tels que  $(x, x) <' (x, y)$  et  $(x, x) <' (u, v)$ , alors  $(x, y) =* (u, v)$  signifie que :

$$\forall w \forall z ((x, x) <' (w, z) \Rightarrow [(w, z) \approx' (x, y) \Leftrightarrow (w, z) \approx' (u, v)])$$

Autrement dit, « nous considérons deux intervalles comme réellement égaux quand et seulement quand tous les intervalles qui sont indiscernables de (...) l'un d'entre eux sont indiscernables de l'autre » (184). Cette relation «  $=*$  » est une relation d'équivalence (transitive donc) sur les intervalles positifs supraliminaires. Wiener introduit alors une relation d'ordre réel «  $<*$  » sur ces intervalles supraliminaires :  $(x, y)$  est « réellement » plus petit que  $(u, v)$  ssi il existe un intervalle  $(w, z)$ , indiscernable de  $(x, y)$ , plus petit que  $(u, v)$  ou s'il existe un intervalle  $(w', z')$ , plus grand que  $(x, y)$ , indiscernable de  $(u, v)$ .

Ce concept d'égalité réelle permet à Wiener de définir les vecteurs supraliminaires comme les classes d'équivalence engendrées par l'application de  $=*$  à la classe des intervalles supraliminaires. Un vecteur supraliminaire est donc un ensemble d'intervalles supraliminaires « réellement » égaux entre eux. Wiener suit la démarche de Russell et de Whitehead : il s'agit ici comme là de partitionner un ensemble  $\alpha \times \alpha$  (ici, l'ensemble des intervalles d'intensités sensorielles) de façon à pouvoir associer chaque couple (à chaque quantité) à un et un seul vecteur (une et une seule grandeur)<sup>3</sup>. Le problème est toutefois que la relation d'équivalence «  $=*$  » ne s'applique qu'aux intervalles supraliminaires. La technique utilisée par Wiener ne peut donc pas s'étendre aux intervalles subliminaires qui diffèrent de l'intervalle nul<sup>4</sup>. Comment définir une égalité entre intervalles subliminaires qui n'écrasent pas tous ces intervalles sur l'intervalle  $(x, x)$  ?

<sup>1</sup> Si  $a$  et  $b$  sont des intervalles, on a  $a \approx' b$  ssi  $\sim a <' b \wedge \sim b <' a$ .

<sup>2</sup> C'est la relation  $\text{Id}_\phi$  de Wiener 1921, 190.

<sup>3</sup> Wiener 1921, 184 : « Il est possible donc de grouper de façon naturelle les intervalles positifs supraliminaires en des ensembles exclusifs, tels que qu'aucun élément d'un quelconque ensemble soit réellement égal à un élément d'un autre ensemble, et que chaque élément d'un ensemble soit réellement égal à tous les éléments de cet ensemble. »

<sup>4</sup> Wiener 1921, 184 : « Si notre critère d'égalité réelle entre deux intervalles est que tous les intervalles qui semblent égaux à l'un doivent sembler égaux à l'autre, alors si un intervalle est subliminaire, il doit être réellement égal en grandeur à l'intervalle zéro. »

La question est difficile et une des réussites de Wiener 1921 est d'avoir esquissé une solution. L'idée générale est de concevoir les intervalles subliminaires comme des différences entre intervalles supraliminaires. Comme les choses sont complexes, et les propos de Wiener très lapidaire, je vais d'abord exposer la façon dont Gerlach présente l'affaire dans son 1957, puis revenir ensuite à Wiener 1921. Gerlach introduit la notion, absente chez Wiener, d'intervalle de mesure d'un intervalle subliminaire positif  $(x, y)$  quelconque. En simplifiant, on dit que  $(r, s)$  est un intervalle de mesure de  $(x, y)$  ssi :

$$((r, x) \approx' (x, x) \wedge (y, y) <' (r, y) \wedge (s, y) =^* (y, y)) \vee ((r, x) =^* (x, x) \wedge (x, x) <' (x, s) \wedge (s, y) \approx' (y, y)).$$

En français, et en ne reprenant que la première partie de la disjonction,  $(r, s)$  est un intervalle de mesure de  $(x, y)$  ssi, lorsque  $s$  est placé en  $y$ , alors  $r$  se trouve dans la partie inférieure du seuil d'indiscernabilité entourant  $x$ , tout en restant discernable de  $s$  et donc de  $y$ . La figure 1 permet de comprendre de quoi il retourne. Gerlach associe alors à un intervalle subliminaire quelconque  $(x, y)$  l'ensemble de ses intervalles (supraliminaires) de mesure. Soit  $\wp(x, y)$  cet ensemble (c-à-d l'ensemble des intervalles  $(r, s)$ ), et soit  $\text{Sup} \wp(x, y)$  l'intervalle supraliminaire qui est la plus petite borne supérieure de  $\wp(x, y)$ <sup>1</sup> – Gerlach pose alors que deux intervalles subliminaires  $(x, y)$  et  $(u, v)$  sont égaux ssi les bornes supérieures de leur ensemble de mesure sont « réellement » égales, c-à-d :

$$(x, y) =^* (u, v) \text{ ssi } \text{Sup} \wp(x, y) =^* \text{Sup} \wp(u, v).$$

Gerlach continue en induisant l'ordre entre les intervalles subliminaires à partir de l'ordre « réel » entre les intervalles supraliminaires : un intervalle subliminaire  $(x, y)$  est « réellement » plus petit qu'un autre intervalle subliminaire  $(u, v)$  ssi il existe un intervalle de mesure de  $(u, v)$  strictement plus grand que tous les intervalles de mesures de  $(x, y)$ .

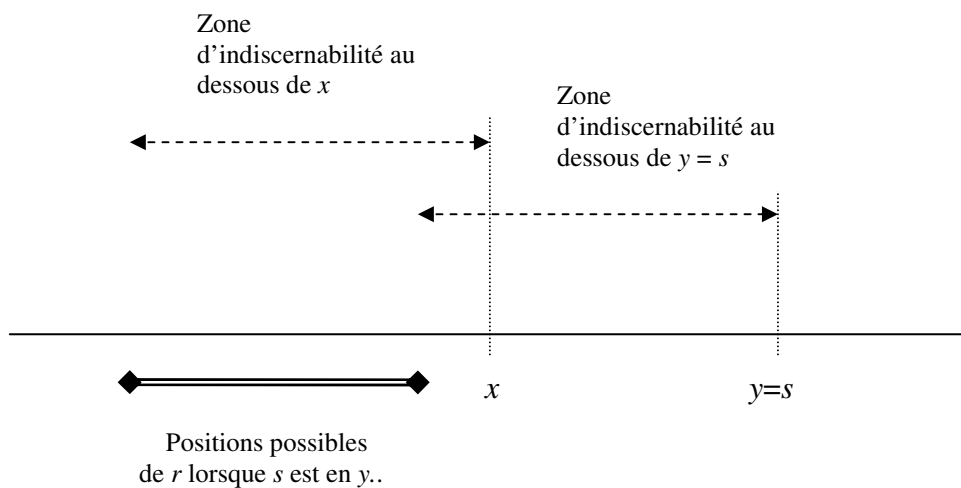


Figure 1 : la notion d'intervalle de mesure.

<sup>1</sup> Gerlach 1957, 55-60.



Gerlach souligne le fait que tout son développement présuppose l'hypothèse (fechnérienne) d'une constance de la mesure des seuils<sup>1</sup>. Si la longueur des zones d'indiscernabilité variait en fonction de la position de leur centre, alors rien ne garantirait que la relation d'identité entre les intervalles subliminaires soit une relation d'équivalence, et rien ne garantirait non plus que la relation « réellement plus petit » soit une relation d'ordre (voir *infra.* pour plus sur ce point).

Comme le note Gerlach, la démarche de Wiener est différente. Au lieu d'associer à un intervalle subliminaire un seul intervalle supraliminaire, le mathématicien pose que les intervalles subliminaires sont des différences de deux intervalles supraliminaires<sup>2</sup>. Plus précisément, Wiener enrichit l'ensemble des vecteurs supraliminaires en considérant toutes les différences (positives) entre ces vecteurs. Il définit ainsi l'ensemble des vecteurs  $V_{c\phi}$  d'intensités sensorielles (Wiener 1921, 191) comme la classe des relations  $T$  telles que,  $R$  et  $S$  étant des vecteurs supraliminaires, et  $R$  étant réellement plus petit que  $S$  :

$$T = S^{-1} | R \vee R | S^{-1}.$$

Rappelons que les vecteurs  $R$  et  $S$  supraliminaires peuvent être « réellement » distincts tout en étant indiscernables.  $T$  peut être supraliminaire (la classe des vecteurs n'est pas alors enrichie par l'opération) mais peut également ne pas l'être ; dans ce dernier cas, le vecteur engendré sera dit subliminaire. Wiener pose alors que deux intervalles (supraliminaires ou subliminaires) associés au même vecteur sont « réellement » égaux.

Bien entendu, si l'on définit l'ensemble des vecteurs de cette façon, alors rien n'assure que la relation d'égalité entre intervalle subliminaire soit transitive. On pourrait tout à fait imaginer que « plusieurs vecteurs distincts » nous permettent d'« aller d'une sensation à une autre » (192). Si, par construction, il est toujours possible d'associer un vecteur  $T$  de  $V_{c\phi}$  à n'importe quel intervalle subliminaire de  $\alpha$  (l'action des vecteurs sur les sensations est transitive), rien ne prouve que ce vecteur soit unique. On retrouve donc une situation familière au lecteur de la section B des *Principia* : la famille de vecteurs  $V_{c\phi}$  qui agit sur  $\alpha$  (sur les sensations) ne peut pas être conçue comme une classe de grandeurs sous laquelle tomberait des ensembles de quantités (des couples) mutuellement exclusifs les uns des autres – un même intervalle subliminaire pourrait avoir plusieurs grandeurs différentes. Wiener reprend alors sa construction, et « fusionne » (*fuse*) les vecteurs qui ont des intervalles en commun, selon un procédé très classique en algèbre (à partir d'une relation binaire réflexive, il est toujours possible d'engendrer une relation d'équivalence minimale qui la contient<sup>3</sup>). Il forme ainsi une nouvelle famille  $V_{s\phi}$ , construite à partir de  $V_{c\phi}$ , dont les éléments sont des classes d'équivalence de  $\alpha \times \alpha$ .

Résumons. La construction de Gerlach et la démarche de Wiener visent le même objectif : il s'agit, dans les deux cas, d'extraire des relations entre intervalles supraliminaires le moyen de distinguer et d'ordonner les intervalles subliminaires. Ce qui distingue les deux auteurs, c'est leur attitude respective vis-à-vis de la question de la constance des seuils de perception. Pour

<sup>1</sup> Gerlach préfère directement raisonner en termes numériques – elle fait correspondre  $\text{Sup } \phi(x, y)$  à la fonction  $m(y) - m(x) + \Delta$ , où  $m$  est la mesure de l'intensité sensorielle et  $\Delta$  la longueur du seuil (*Ibid.* 61-68).

<sup>2</sup> En réalité, c'est ce que fait, Gerlach, puisque, lorsque la taille de l'intervalle  $(r, s)$  est maximale, l'intervalle  $(x, y)$  est identique à la différence entre  $(r, s)$  et  $(r, x)$ , dont la longueur invariante est celle du seuil. L'hypothèse d'une constance du seuil permet ainsi à Gerlach de simplifier la démarche, plus générale, de Wiener, en fixant un des deux termes supraliminaires (le seuil constant) dont on considère la différence.

<sup>3</sup> Voir Howie 1995, 21-22. Soit  $R$  une relation non vide réflexive, alors on démontre que la clôture transitive de  $R$  (l'union des  $R^n$ ,  $n$  étant entier) est la plus petite relation d'équivalence qui contient  $R$ . Notons que cette procédure d'engendrement d'une relation d'équivalence à partir d'une relation réflexive quelconque peut aboutir à la relation universelle, qui lie tous les éléments de l'ensemble sur lequel est définie la relation initiale. Wiener ne discute pas ce risque de trivialisation. Sur cette absence, voir *infra*.

Gerlach, cette uniformité est une structure essentielle du système empirique étudié. Elle est une conséquence de la liste de 15 axiomes, donnée pages 73-75, fixant la structure du système empirique à représenter<sup>1</sup>. À l'opposé, Wiener refuse d'admettre la constance du seuil de discernabilité (188) :

L'intervalle que la plupart des psychologues ont considéré comme (unité de mesure standard) est l'intervalle juste discernable (*just-noticeable interval*). Nous ne savons cependant pas si tous les intervalles juste discernables sont égaux, ni s'il y a des intervalles juste discernables.

Cette position est importante pour Wiener, car comme nous le verrons, un de ses buts est d'explicitier quelles sont les présupposés minima de la mesure psychophysique – établir que la constance de la « *jnd* » n'en est pas un est un résultat intéressant<sup>2</sup>. Wiener ne peut donc fonder sa construction sur la même hypothèse que Gerlach ; plus ambitieux, il vise à atteindre une plus grande généralité. Mais Wiener n'est-il pas trop ambitieux ? A plusieurs reprises, Gerlach fait comme si la constance de la « *jnd* » était une condition nécessaire à la preuve du théorème de représentation. Si tel était le cas, la voie choisie par Wiener se révélerait une impasse. Gerlach a-t-elle raison ? Ce n'est pas certain. L'hypothèse de la constance de la *jnd* facilite la construction d'une relation d'égalité réelle transitive entre intervalles subliminaires. Wiener a cependant les moyens de « forcer » la relation plus générale qu'il construit à être transitive. Le problème est que le remède utilisé pour restaurer la transitivité (« fusionner » les vecteurs qui ont des intervalles en commun) est très puissant, et comme je le rappelle dans la note de la page 120, peut conduire à trivialisier toute la construction : il se pourrait qu'après cette opération, il n'y ait plus qu'un vecteur subliminaire, correspondant à la classe de tous les intervalles indiscernables, le « vecteur zéro ». Wiener ne discute pas les conditions qu'il faut imposer aux diverses relations d'ordre pour éviter cet écueil. L'hypothèse de la constance de la *jnd* est certainement une condition suffisante ; est-elle une condition nécessaire ? Sans doute pas. Pour trancher la question, il aurait toutefois fallu que Wiener analyse davantage les risques de trivialisations.

Avant de passer à la question de la mesure des vecteurs de  $V_{S_0}$ , une remarque sur l'usage qui est fait, dans les deux constructions, de l'intervalle nul. Considérons la notion d'intervalle de mesure d'un intervalle subliminaire  $(x, y)$  ; dans son *definiens* apparaît la formule «  $(s, y) =^*(y, y)$  », qui exprime le fait qu'une des extrémités de l'intervalle  $(r, s)$ , à savoir  $s$ , doit coïncider avec  $y$ . La même idée est présente chez Wiener ; pour que  $xS^{-1}Ry$ , il faut qu'il existe un  $v$  tel que  $xS^{-1}v$  et  $vRy$  – le terme auquel  $x$  est relié doit être le même que celui avec qui  $y$  est lié, et c'est ce concept d'identité entre les sensations  $s$  et  $y$  qu'exprime la formule  $(s, y) =^*(y, y)$ . La procédure consistant à faire coïncider l'extrémité de deux intervalles est donc, chez Wiener comme chez Gerlach, le levier permettant d'extraire des relations entre intervalles supraliminaires ce qui permet de distinguer et d'ordonner les intervalles subliminaires. Or, l'expression «  $(s, y) =^*(y, y)$  » est, rigoureusement parlant, mal formée : la relation «  $=^*$  » est définie sur les intervalles positifs supraliminaires, et l'intervalle nul n'en est à l'évidence pas un. On ne peut évidemment pas éviter la difficulté en substituant à la relation d'identité réelle celle d'indiscernabilité, car les deux constructions requièrent la coïncidence des deux points. Que faire ? Rappelons qu'il s'agit chez Wiener comme chez Gerlach d'étudier les conditions

<sup>1</sup> Plus précisément, elle suivrait, selon Gerlach (*Ibid.*, 77), de l'axiome 4 (tout intervalle subliminaire est plus petit que tout intervalle supraliminaire) et de l'axiome 13 (si  $(x, y)$  est réellement plus petit que  $(u, v)$ , il est possible de trouver deux intervalles égaux à  $(x, y)$  dont une des extrémités est une fois  $u$ , l'autre fois  $v$ ) – deux thèses admises par Wiener. L'argument de Gerlach est toutefois peu convaincant.

<sup>2</sup> Ainsi, dans la conclusion, Wiener explique (204-205) : « (En psychologie), ce que les expérimentateurs considèrent comme acquis avant de commencer leurs expériences est infiniment plus important et intéressant que n'importe lequel des résultats auxquels leur expérience conduit. (...) Les méthodes de mesure données dans cet article décrivent des manières parfaitement univoques d'exploiter les résultats de façon à obtenir des lois quantitatives comme celle de Weber, sans introduire des bouts de stupidité mathématique comme l'interprétation des « différences juste discernables » en termes d'« infinitésimaux ». »

de la mesure d'un continu sensoriel avec seuil de perception. Dans un tel cadre, la possibilité de discriminer entre les éléments du continu est problématique, car, par construction, une sensation  $x$  n'est pas distinguable d'une sensation voisine  $y$ . Dès lors, quel sens donner à  $y=s$ , et à l'instruction consistant à faire coïncider l'extrémité d'un intervalle avec l'extrémité d'un autre ? Concrètement, à cause de l'existence du seuil d'indiscernabilité, il est impossible pour un sujet de s'assurer de la parfaite coïncidence des extrémités. Comment dès lors construire les intervalles de mesure associés à un intervalle subliminaire donné (Gerlach) ? Comment définir le produit relationnel de deux vecteurs donnés (Wiener) ? N'est-il pas étrange de doter les sujets de la capacité à distinguer l'intervalle nul des intervalles qui lui sont indiscernables ?

L'idée n'a en réalité rien d'absurde. On pourrait défendre que la simple présentation d'une sensation  $x$  quelconque est suffisante pour former l'intervalle qui sépare cette sensation d'elle-même, et donc pour donner une signification à  $(x, x)$ <sup>1</sup>. Un tel argument aurait pu, chez Wiener comme chez Gerlach, justifier l'introduction des intervalles nuls. Mon point est qu'il aurait cependant fallu dicter l'usage de  $(x, x)$ . En effet, admettre que les sujets peuvent distinguer l'intervalle nul des autres intervalles subliminaires, c'est, semble-t-il, doter les sujets du pouvoir d'identifier et de réidentifier leurs impressions. Or, Kant et les néo-kantiens, hostiles à la mesure psychophysique, auraient refusé d'accorder ce point. Ils auraient refusé d'admettre qu'un sujet a la capacité de reconnaître qu'une certaine impression  $x$ , extrémité d'un certain intervalle, est la même qu'une impression  $s$ , extrémité d'un autre intervalle<sup>2</sup>. On ne peut donc poser sans discussion, comme le font pourtant Gerlach et Wiener, dans un travail censé expliciter les conditions de la mesure psychophysique, la possibilité pour les sujets de former un intervalle nul, car c'est précisément sur cette possibilité (entre autres) que porte le débat<sup>3</sup>.

### III-3. *A new theory of measurement* (2) : les deux systèmes de mesure.

Après avoir construit la famille  $Vs_\phi$  Wiener se penche, dans les parties 2 et 3 de son article sur la question de la mesure de ses éléments. Wiener fait d'abord un retour sur la définition des rationnels et des réels<sup>4</sup>. La définition standard de Russell et de Whitehead stipulait que deux relations  $R$  et  $S$  avaient le ratio  $\mu/\nu$  si et seulement si il existait deux entités  $x$  et  $y$  telles que  $xR^\nu y$  et  $xS^\mu y$ . Cette définition convient à la mesure dans les familles ouvertes, mais elle s'ajuste mal au cas que Wiener considère ici : dans les familles à maximum, il n'est pas certain que  $\nu$  répétitions de  $R$  (ou  $\mu$  répétitions de  $S$ ) ne nous fassent pas sortir de  $Vs_\phi$ . Reprenant une manœuvre déjà utilisée par Russell et Whitehead dans la section D de *Principia* VI<sup>5</sup>, Wiener pose que, pour une classe de vecteurs  $\kappa$  définie sur un ensemble  $\alpha$ ,  $R$  et

<sup>1</sup> Par exemple, lorsque je vois une certaine intensité lumineuse, il semble que je puisse former une impression de la différence, nulle, entre cette intensité et elle-même sans avoir besoin de me référer à quoi que ce soit d'autres (notamment pas aux sensations voisines). Pour construire l'intervalle nul, la présentation d'une seule impression suffirait.

<sup>2</sup> Kant 1786, 13 : « (La psychologie empirique) ne pourra jamais se rapprocher de la chimie comme art systématique d'analyse ou théorie expérimentale, parce que le divers de l'observation interne n'est séparable que par une simple division en idée, mais ne peut se conserver à l'état séparé, ni se combiner de nouveau à volonté, de plus, il n'est pas possible de soumettre un autre sujet pensant à des expériences convenant à nos fins et l'observation elle-même altère et défigure déjà en soi l'état de l'objet observé. »

<sup>3</sup> Plus profondément, ce qui doit être justifié d'un point de vue kantien ou post kantien, c'est l'application du vocabulaire ensembliste aux données sensorielles. Pour Poincaré, par exemple, penser que les sensations d'un même genre sont un ensemble d'objets, c'est appliquer un régime de l'identité et de la différence à un type de « choses », les sensations, qui n'en relève pas. Pour une éclairante discussion, voir Ly 2004.

<sup>4</sup> Wiener suit ici le plan de *Principia* VI : la première section de Wiener 1921 correspond à la section B, les deux suivantes à la section C ; la redéfinition des rationnels et des réels correspond à la section A de *Principia* VI.

<sup>5</sup> Voir mon chap. 4, III-2. Wiener, dans une note (193), précise que sa définition de ratio n'est pas la même que celle de ratio principal utilisé dans la section D – ce qui est vrai (notamment, aucune considération sur les « racines de l'unité » n'entre ici en jeu). L'inspiration est néanmoins évidemment commune.

$S$  ont le ratio  $\mu/\nu$  si et seulement si il y a une relation  $T$  appartenant à  $\kappa$ , telle que « lorsque nous partons d'un élément du champ de  $T$  et faisons successivement  $\mu$  pas, nous réalisons parfois un pas de  $R$ , tandis que, de façon similaire,  $\nu$  pas successifs de  $T$  couvre parfois le même terrain qu'un pas de  $S$  » (186) :

$$R(\mu/\nu)S =_{\text{Déf}} \exists T \in \kappa, (\exists x, y \in \alpha, (xT^\mu y \wedge xRy)) \wedge (\exists x', y' \in \alpha, (x'T^{\nu'} y' \wedge x'Sy'))$$

Cette définition, qui fait référence à l'existence d'un commun sous-multiple plutôt qu'à celle d'un commun multiple, permet d'éviter tout renvoi à de « grands » vecteurs, susceptibles de dépasser le vecteur maximum<sup>1</sup>. Comme dit Wiener, « avec notre définition, il peut très bien se faire qu'une corne de brume émette un bruit 2/3 de fois moins fort que celui émis par une chambre de chauffe, sans qu'il y ait un bruit deux fois plus fort que celui produit par une chambre de chauffe » (193).

Venons en au premier système de mesure mis en place par Wiener dans la section 2 de son article. Nous ne rentrerons dans les détails de la construction, très complexe par endroit. Le but est seulement de dégager les grandes lignes de l'édifice.

Wiener commence par définir la classe, notée  $Rt_\kappa R$ , des ratios qu'une relation  $R$  donnée a avec toutes les autres relations appartenant à sa famille (193). Dans une famille où il n'existe aucun vecteur maximum,  $Rt_\kappa R$  contient des ratios plus petit que tout ratio donné (i.e. quelle que soit  $R$ , on peut toujours trouver, quel que soit  $n$ , un vecteur  $S$ , tel que  $R^n = S$  – donc, quel que soit  $n$ ,  $1/n \in Rt_\kappa R$ ). Mais dans une famille où il y a un maximum, ce n'est pas toujours le cas. Réutilisant la définition des réels de la section \*310 des *Principia*, Wiener appelle l'indice de  $R$  dans  $\kappa$ , noté  $Ind_\kappa R$ , la plus petite limite de  $Rt_\kappa R$  (186, 194). Grossièrement dit,  $Ind_\kappa R$  est le ratio que  $R$  a avec le vecteur maximum de sa famille (s'il n'y a pas de tel vecteur, alors, quel que soit  $R$ ,  $Ind_\kappa R = 0$ ).  $Ind_\kappa$  permet d'assigner un nombre réel à chaque membre de  $\kappa$ , et il est facile, dit Wiener, de montrer qu'un vecteur ne peut avoir deux indices différents. L'indice d'un vecteur peut donc passer, au moins en première approximation, pour la mesure de ce vecteur.

Wiener examine ensuite le problème de la mesure, non pas des vecteurs et des intervalles, mais des sensations elles-mêmes (187, 194-195). L'idée naturelle est d'assigner à la sensation  $a$ , l'indice de l'intervalle séparant  $a$  de la sensation nulle. Mais comme Wiener ne veut pas faire l'hypothèse qu'il y a une sensation dont l'intensité est nulle, il définit la mesure de la sensation  $a$ , notée  $Meas_\kappa a$ , comme la limite supérieure des indices « des vecteurs menant à  $a$  à partir des *sense-data* de plus petite intensité » (194). Dit autrement, Wiener considère tous les intervalles dont l'extrémité supérieure est en  $a$ , et il associe à  $a$  l'indice du plus grand d'entre eux (ou plus précisément, la plus petite borne supérieure de l'ensemble des indices). Wiener affirme que, par construction, la relation  $Meas_\kappa$  est *many-one*, c'est-à-dire qu'à chaque sensation correspond une et une seule mesure – mais qu'elle n'est généralement pas *one-one*<sup>2</sup>. Pour les mêmes raisons que précédemment,  $Meas_\kappa$  peut donc passer, au moins dans un premier temps, comme un candidat raisonnable au titre de mesure d'une sensation. Wiener conclut son analyse en définissant les intensités sensorielles comme les classes de sensations qui ont la même mesure, au sens de  $Meas_\kappa$ .

<sup>1</sup> La préoccupation de ne pas dépasser le vecteur maximum est constante chez Wiener, notamment dans la section 1. Je n'en ai pas parlé pour ne pas compliquer inutilement les choses. Mais si les éléments  $T$  de  $Vc_\phi$  sont définis par la double disjonction  $S^{-1} \mid R \vee R \mid S^{-1}$ , c'est précisément parce que, si on se trouve trop près du maximum, alors le « trajet »  $R \mid S^{-1}$  ne peut être effectué – de la même manière, si on se trouve trop près du zéro,  $S^{-1} \mid R$  ne peut pas être effectué (cf. 1921, 184-185, 190-191).

<sup>2</sup> Dans la note de la page 195 de son 1921, Wiener donne les conditions formelles sur  $\kappa$  pour qu'une mesure ne corresponde jamais à plus d'une sensation.

Wiener, dans la conclusion de la section 1, illustre sa théorie en prenant l'exemple de la relation de saturation chromatique (197) :

Si  $\phi$  était la relation « L'intervalle de saturation en couleur entre  $x$  et  $y$  semble moins grand que celui entre  $u$  et  $v$  », l'unité naturelle de mesure (...) semble être la saturation complète, et la méthode de mesure que nous avons juste élaborée semble parfaitement naturelle et appropriée. La mesure de la saturation d'une sensation donnée  $x$  serait alors  $\text{Meas}_{V_{s\phi}}x$ . Il serait naturel de dire que deux sensations ont le même degré chromatique si elles (ont la même mesure).

Une intensité ou un degré (chromatique ici) est la classe des sensations qui ont même mesure, au sens du système de mesure élaboré plus haut. La théorie de Wiener s'applique bien à ce cas car le maximum de saturation chromatique constitue une unité « naturelle » de mesure. Pour d'autres genres de sensation, l'usage d'une telle échelle est beaucoup moins évident ; comme le note Wiener, « il ne semble pas naturel de mesurer le tictaquement d'une montre en millionième de puissance d'une chambre de chauffe » (188). D'où la nécessité de passer à un autre système dans lequel l'unité n'est pas le vecteur maximum.

Avant de passer à l'examen de ce second procédé, un mot sur cette première construction. Il est important de prendre conscience de la complexité logique de la théorie, et notamment de la notion d'intensité. Une intensité sensorielle désigne une classe de sensations qu'on ne peut absolument pas mettre en relation directe et simple avec les jugements perceptifs  $\phi(x, y, u, v)$  dont on est pourtant parti. Les termes  $x, y, u, v$  dans ces jugements correspondent à des quantités, et les intensités sont leurs grandeurs. Mais la relation d'égalité en intensité nécessite, pour être définie, l'ensemble des étapes que l'on a parcouru : la définition de  $V_{c\phi}$ , puis de  $V_{s\phi}$  ; la définition de l'indice (par des passages à la limite) ; enfin celle de  $\text{Meas}_{\kappa}$  et de la relation d'égalité intensive transitive (par de nouveaux passages à la limite). Et encore, j'ai volontairement omis dans la présentation que j'ai faite la partie la plus difficile de la construction (Wiener 1921, 195-196). Nous avons vu que l'indice  $\text{Ind}_{\kappa}$  est en effet une relation *many-one*. Or, selon les quatre conditions exposées dans *Principia* VI section C, il faudrait, pour considérer l'indice comme une mesure, que  $\text{Ind}_{\kappa}$  soit *one-one* (c'est le contenu des deux premières demandes) – il faudrait, de plus, que l'addition et la multiplication des mesures soient compatibles avec le produit relationnel des vecteurs (c'est la substance des deux dernières conditions)<sup>1</sup>. Wiener sait tout cela, et pour satisfaire ces critères, il dérive de  $\kappa$  une nouvelle famille de vecteurs, noté  $\text{Reg}_{\kappa}$ , et une nouvelle relation, notée  $\text{Dist}_{\kappa}$ , entre  $\kappa$  et une partie de  $\mathbb{R}$ . Il prouve alors que la restriction de  $\text{Dist}_{\kappa}$  à  $\text{Reg}_{\kappa}$  est *one-one* et démontre que  $\text{Dist}_{\kappa}$  est compatible avec l'addition et la multiplication (196). Je donne un aperçu de cette construction difficile dans l'Appendice. Ce passage, qui montre que Wiener suit les *Principia* de très près, rajoute en tout cas encore à la complexité de la notion d'intensité. Les grandeurs psychophysiques de Wiener 1921 ne sont pas données dans l'expérience, elles sont construites par un processus logique extrêmement raffiné (voir pour plus sur ce point, *infra*. III-4.).

Dans la section 3, Wiener analyse un autre système de mesure, qui généralise celui présenté dans la section 2. L'idée est de choisir une portion  $a$  de la famille  $\kappa$ , limitée par un vecteur maximum  $A$ , et de mesurer les intervalles de cette région en faisant jouer au maximum  $A$  le rôle que jouait le maximum de  $\kappa$  dans la méthode précédente – l'extension de la mesure aux vecteurs de  $\kappa$  supérieurs à  $A$  s'effectuant alors par la considération des fractions de ces vecteurs. Prenons un exemple. Admettons que nous voulions mesurer un vecteur  $R$  de  $\kappa$  plus grand que  $A$ . Il nous faut alors d'abord trouver un vecteur  $S$  appartenant à la « sous-famille »  $a$  bornée par  $A$ , tel que  $S^n = R$ . Comme  $S$  est plus petit que  $A$ , il a un indice dans  $a$ , noté  $\text{Ind}_a'S$  (en simplifiant,  $\text{Ind}_a'S$  est le ratio de  $S$  à  $A$ ). À  $R$ , nous pourrions alors associer le réel

<sup>1</sup> Sur ce point, voir chap. 4, III-1.

$n \times \text{Ind}_a 'S$  (Déf (26), 198), noté  $\text{Inx}_{\kappa, a} 'R$ . Bien entendu, rien n'indique, à ce stade, que  $\text{Inx}_{\kappa, a} 'R$  soit le seul nombre que l'on puisse assigner à  $R$  ; il peut exister d'autres relations que  $S$  dans  $a$  qui soient des fractions entières de  $R$ , et rien ne garantit alors que le nombre obtenu en leur appliquant la même procédure aboutisse toujours au même résultat. Hors de  $a$ ,  $\text{Inx}_{\kappa, a}$  n'est donc pas nécessairement *many-one* et la situation est sur ce point différente de ce qui se passe dans la section 2. Mais Wiener continue malgré tout sa construction et définit un équivalent de  $\text{Meas}_{\kappa}$ , c'est-à-dire un équivalent de la mesure des sensations. Si  $x$  est une sensation,  $\text{Meas}_{\kappa, a} 'x$  est la limite supérieure des valeurs des  $\text{Inx}_{\kappa, a}$ , pris sur les intervalles dont l'extrémité supérieure est en  $x$ . Par définition, à une sensation ne correspond donc qu'une seule valeur numérique – on retrouve la situation de la section 2, et le mathématicien peut définir l'intensité sensorielle comme la classe des sensations qui ont même  $\text{Meas}_{\kappa, a}$ . Wiener indique ensuite, sans le démontrer, que l'équivalent de la construction de  $\text{Dist}_{\kappa}$  peut être effectuée à partir de  $\text{Inx}_{\kappa, a}$  et  $\text{Meas}_{\kappa, a}$ , et qu'elle aboutit aux mêmes résultats.

Cette seconde construction, qui généralise la première en relativisant, si l'on peut dire, le maximum, vise à rendre compte de la façon dont les psychologues procèdent ordinairement pour mesurer certaines sortes de sensation, comme la luminosité : ils « (comptent) le nombre de « seuils » qu'il y a entre une (luminosité donnée) et la complète obscurité » (198). Wiener indique immédiatement que cette méthode, si elle est « *adequate* », ne permet pas de « subdiviser le pas d'un seuil à l'autre en parties égales » (199). Comme on l'a déjà vu, Wiener refuse d'admettre la constance du seuil. Le point commun entre le décompte empirique du psychologue et l'analyse du mathématicien est cependant l'idée d'étalonner les intervalles et les données sensibles à partir d'une portion choisie de la famille  $\kappa$  : le  $a$  de Wiener correspond à la « *just noticeable difference* » des fechnériens. Wiener explique que, dans la plupart des cas, le premier seuil peut être considéré comme l'unité naturelle de décompte.  $\text{Sbl}_{\emptyset}$  est ainsi l'ensemble des intervalles indiscernables de l'intervalle nul  $(x, x)$ , et joue le rôle du  $a$  dans la construction<sup>1</sup>. La relation « mesure des intensités lumineuses » qui se rapproche le plus de la fonction construite par les psychologues est ainsi  $\text{Meas}_{\text{V}_{\text{Sbl}_{\emptyset}}, \text{Sbl}_{\emptyset}}$  – le décompte des seuils des psychologues correspond au nombre de fois qu'il faut répéter le vecteur maximum de  $\text{Sbl}_{\emptyset}$  pour dépasser la sensation considérée<sup>2</sup>.

Les développements des sections 2 et 3 permettent de saisir le sens du projet épistémologique novateur de *A new theory of measurement*. Citons la conclusion de l'article (204-205) :

L'un des grands défauts qui grèvent (la psychologie expérimentale) est sa propension à chercher des réponses à des questions sans avoir préalablement chercher à découvrir ce qu'elles veulent dire. Les travaux expérimentaux sur la loi de Weber constituent une bonne illustration : ce que les expérimentateurs considèrent comme acquis avant de commencer leur expérience est infiniment plus important et intéressant que n'importe lequel des résultats auxquels leur expérience conduit. Une des hypothèses inconscientes est que les sensations et les intervalles de sensations peuvent être mesurés, et que ce procès ne peut être réalisé que d'une seule manière. Il en résulte que chaque nouvel expérimentateur semble consacrer toute son énergie à l'invention d'une méthode logiquement non pertinente relativement à toutes les choses qui ont été proposées avant lui : l'un demande à ses sujets de dire quand deux intervalles entre sensations d'un genre donné apparaissent différent ; un autre base la totalité de sa recherche sur une expérience où le seul problème des observateurs est de diviser un intervalle de couleurs donné en deux parties égales, et ainsi de suite indéfiniment – et même lorsque les expériences sont exactement les mêmes, il n'y a pas deux personnes qui choisissent la même méthode pour exploiter leurs résultats.

<sup>1</sup> Une des idées théoriques intéressantes de *A new theory of measurement* est précisément de lier la question des seuils à celle des maxima : dans la section 3, la notion de « *jnd* » est formellement considérée comme un « maximum local », i.e. comme une portion de l'échelle sensorielle (une sous famille vectorielle) isolée du reste et possédant un maximum.

<sup>2</sup> On pourrait reprocher à Wiener de ne pas expliquer comment, expérimentalement, l'on peut transporter le vecteur maximum de  $\text{Sbl}_{\emptyset}$  le long du *continuum* sensoriel. C'est en effet classiquement l'hypothèse d'une constance de la « *jnd* », rejetée par Wiener, qui permet de répondre à cette question. Le point de vue du mathématicien n'est cependant pas celui de l'expérimentateur ; il est celui du logicien, qui, comme nous allons le voir maintenant, analyse les présupposés conceptuels de la mesure psychophysique.

Wiener reproche aux psychologues de confondre la description de la structure des sensations avec la description des systèmes de mesure. Les psychologues croient, explique-t-il, que la mesure « ne peut être réalisée que d'une seule manière », et en conséquence, consacrent toute leur énergie à la découverte de la bonne procédure, sans articuler leurs travaux à ceux de leurs prédécesseurs. La distinction que Wiener propose, après Russell et Whitehead, entre description du système des grandeurs (des familles vectorielles) effectuée dans la section 1 et élaboration de divers systèmes de mesure dans la section 2 et 3, permet de mettre un point d'arrêt à ces vaines tentatives – si la structure du champ quantitatif doit être univoquement déterminée, rien n'oblige à adopter les mêmes systèmes de mesure. Dans le cadre construit par Wiener, les principales « procédures » mises au point par les psychologues, réputées pourtant incompatibles entre elles, sont toutes « *adequates* ». Les intensités sensorielles peuvent être mesurées par la technique mise en place dans la section 2 (à laquelle Wiener fait allusion lorsqu'il parle de la subdivision des intervalles de couleur) ou par la procédure différente de la section 3 (à laquelle Wiener réfère lorsqu'il évoque le décompte des seuils). Ces méthodes sont plus ou moins bien adaptées selon les cas (selon en particulier la facilité avec laquelle on peut manipuler les intensités maximales) ; mais elles ne sont pas exclusives l'une de l'autre. L'analyse logique, en révélant la complexité mathématique de l'architecture quantitative sous-jacente, est perçue par Wiener comme le seul moyen de retrouver un cadre de discussion entre les différentes écoles psychologiques<sup>1</sup>.

#### III-4. La mesure, représentation ou construction ?

Nous en savons à présent suffisamment sur Wiener 1921 pour saisir à quel point la connexion qui le lie ce texte à *Principia* VI est étroite. *A new theory of measurement* ne pouvait être compris que par un lecteur de la dernière partie des *Principia*, c'est-à-dire, à l'époque, que par Russell et Whitehead eux-mêmes. Non seulement les notations, mais encore la structure du raisonnement, sont basées sur la théorie logiciste de la grandeur<sup>2</sup>. On sait que Russell a été très impressionné par les travaux de Wiener – notamment par une première esquisse de la théorie, formulé dès 1914<sup>3</sup>. Cette appréciation, extrêmement positive, n'est pas étonnante, car, comme nous allons maintenant le voir, Wiener n'a pas été simplement un technicien hors pair, généralisant et complexifiant la machinerie mise en place dans les *Principia* VI, ou (ce qui est plus connu) définissant astucieusement, dans Wiener 1914a, la notion de couple en terme ensembliste. Une idée méthodologique centrale, qui prolonge (en l'infléchissant) une intuition

<sup>1</sup> On trouve un écho de cette position dans l'introduction de Wiener 1948, 2-3 : « (Depuis Leibniz), la science a été de façon de plus en plus poussée l'affaire de spécialistes de domaines qui tendent à devenir progressivement de plus en plus étroits. (...) Les domaines de spécialisation prennent continuellement de plus en plus d'importance et envahissent des territoires toujours nouveaux. Le résultat ressemble à ce qui s'est passé lorsque l'Oregon a été occupé simultanément par des colons américains, anglais, mexicains et russes – un réseau inextricable d'explorations, de nomenclatures et de lois (...). Ce sont ces régions frontalières qui offrent les plus grandes opportunités au chercheur qualifié. Elles sont simultanément les plus réfractaires aux techniques communes d'attaque de masse et à la division du travail. Si la difficulté d'un problème physiologique est d'essence mathématique, dix physiologistes ignorant en mathématique n'arriveront pas plus loin qu'un seul physiologiste ignorant des mathématiques. Si un physiologiste qui ne connaît rien aux mathématiques travaille avec un mathématicien qui ne connaît rien en physiologie, le premier sera incapable de formuler son problème de telle manière à ce que le second puisse le traiter, et ce dernier sera incapable de donner une réponse que l'autre puisse comprendre. » Dans Wiener 1921 aussi, il s'agit d'apporter une forme d'unité au réseau inextricable que constitue le territoire de la psychophysique.

<sup>2</sup> Et encore, dans notre commentaire, nous avons laissé de côté la section 4, entièrement consacrée à une comparaison de la section C avec le système de mesure avec maximum relativisé.

<sup>3</sup> Citons le début de la lettre que Russell adresse à Wiener le 12 juillet 1914 : « Cher Wiener, votre papier me semble admirable et très intéressant. ». On trouve aux Archives Russell un document de 5 pages (148001F), écrit par Russell, reproduisant les définitions et les étapes du raisonnement de Wiener 1921 – Russell a donc soigneusement lu l'article de son ancien étudiant.

fondamentale du logicisme, anime tous les travaux de Wiener datant de cette époque. C'est un passage de *Studies in Synthetic Logic* (1914c) qui formule le plus clairement la visée (22) :

Nous avons prouvé que, partant d'une relation triadique ou tétraédrique quelconque, nous sommes capable de construire, respectivement, une relation entre ou une relation de séparation. Il faut faire jouer à ce fait, qui explique comment les relations régulières de l'espace peuvent être dérivées des relations irrégulières trouvées dans notre expérience, le même rôle que le fait analogue concernant les relations dyadiques, qui explique comment la relation sérielle des instants du temps peut être dérivée de la relation non sérielle de succession complète entre événements. Sur le plan logique, également, ce fait a un intérêt considérable, car il ouvre la voie à une autre méthode de définition des systèmes mathématiques, différente de celle qui use des postulats ; étant donnés nos postulats logiques fondamentaux, nous pourrions être capable de sélectionner les 'indéfinissables' fondamentaux d'un système mathématique de manière à ce que, quelles que soient les valeurs qu'ils prennent à l'intérieur de leurs domaines de signification, les propriétés fondamentales du système resteront invariantes.

Quelques mots du contexte. Wiener vient de montrer comment, à partir d'une relation ternaire (quaternaire) quelconque, on peut définir une relation qui a toutes les propriétés formelles de la relation « entre » (de la relation « séparation »). Dans le passage, il met en parallèle cette construction avec celle d'une relation d'équivalence à partir d'une relation binaire réflexive et symétrique (par exemple, avec la définition de la relation d'égalité transitive « = » à partir de la relation «  $\approx$  » ; voir *infra*). Si les procédés logiques utilisés sont dans les deux cas très différents, une commune inspiration méthodologique relie les deux dérivations : au lieu d'introduire axiomatiquement, par la méthode des postulats, les concepts de base de la théorie (d'énoncer les propriétés formelles des relations d'ordre ou des relations d'équivalence), on définit, dans les deux cas, à partir d'objets très irréguliers, une entité qui possède, par construction, les « bonnes » propriétés. Ainsi, de même qu'à une relation ternaire quelconque (il faut que l'entité soit une relation ternaire, mais cette restriction est logique, elle fait partie de la théorie des types, d'où l'allusion dans le texte au « domaine de signification des variables »), peut être associée une autre relation qui a les caractéristiques formelles de la relation « entre », de même, à partir d'une relation binaire très irrégulière (réflexive et symétrique mais non transitive) une relation d'équivalence très régulière peut être construite. On retrouve donc ici la méthode de la « structuration des variables », chère à Russell, dont j'ai parlé dans le précédent chapitre – mais dans une version quelque peu radicalisée toutefois. Wiener est en effet en train d'expliquer que l'on pourrait se passer de toutes restrictions sur les variables (autres que typologiques) et distinguer les divers objets mathématiques par leurs structures intrinsèques. Dans les *Principia*, certains chapitres s'ouvrent par des définitions axiomatiques ; ainsi, Russell et Whitehead définissent les relations ordinales par une liste de conditions que certaines relations satisfont. Wiener suggère, poussant la logique des *Principia* au-delà d'elle même, que ce recours aux postulats pourrait être évité, en remplaçant systématiquement les entités introduites axiomatiquement par des constructions procédant à partir de variables complètement générales. Il semble que ce soit cette approche, une version extrême de la méthode de structuration des variables, qu'il nomme « *synthetic logic* ».

*A new theory of measurement* doit être perçue comme un exercice de « logique synthétique ». Plusieurs éléments le montre. Citons d'abord la conclusion de Wiener 1914c (28), dont la seconde partie esquisse Wiener 1921 :

L'intérêt et l'importance de ce travail sur les intensités sensorielles réside dans le fait que les psychologues supposent naïvement que la série des intensités sensorielles est (...) une donnée de l'expérience et non pas une construction. En conséquence, ils sont conduits à des interprétations, toutes plus grotesques les unes que les autres, des formules numériques comme la loi de Weber. Une série d'intensités sensorielles est souvent traitée comme si elle était une série de *quantités* sensorielles, sans qu'aucune analyse, de quelque sorte que ce soit, ne soit proposée de la base à partir de laquelle cette série est mise en correspondance un-un avec la série de 0 et des réels positifs, pris dans l'ordre de leur grandeur. C'est en tout état de cause un préliminaire nécessaire (...) que



de savoir ce que les séries d'intensités sensorielles sont réellement, et de quelle nature est leur relation à notre expérience : sans cette analyse, aucune psychophysique scientifique n'est possible.

Ici, la vieille distinction des *Principles* (voir chap. 2) entre quantités « concrètes » et grandeurs « abstraites » est explicitement convoquée pour expliquer que les intensités ne sont pas, comme le croient la plupart des psychologues, données, mais *construites* à partir du donné. La tâche que se fixe Wiener est de dégager la structure des intensités sensorielles (des grandeurs), en montrant comment ces intensités peuvent être définies à partir des relations (quantitatives) données dans l'expérience. Cette façon de décrire le projet de Wiener n'est toutefois pas entièrement exacte, car comme le souligne le mathématicien, la relation  $\phi$ , point de départ de la construction, n'est elle-même pas une donnée phénoménale (1921, 182) :

Nous considérerons donc la relation « l'intervalle entre  $x$  et  $y$  semble plus petit que celui entre  $u$  et  $v$  » (...) comme étant la relation qui forme la base de la mesure des sensations. En la considérant comme notre expérience primitive, nous ne voulons pas affirmer (en réalité nous nions même catégoriquement) que cette relation est donnée telle quelle dans notre expérience, et qu'aucune analyse plus avancée ne soit possible : ce que nous affirmons est qu'elle représente une analyse plus minutieuse de la base de nos mesures des intensités sensorielles que toutes celles qui sont actuellement données, et qu'elle forme un point de départ commode pour une théorie des intensités sensations.

Les propositions  $\phi$ , dont la structure logique est déjà fort riche (puisque  $<'$  est un ordre strict partiel sur l'ensemble des intervalles), sont explicitement présentées des « idéalisations » du donné phénoménal, idéalisations dont une analyse plus poussée pourrait révéler la structure. Le fossé entre les données phénoménales et les grandeurs psychophysiques, suggère le mathématicien, pourrait donc se révéler encore plus grand qu'il ne le dépeint.

La façon dont Wiener présente et développe ses thèses montre également que *A new theory of measurement* est le fruit du constructionnalisme et de l'opposition aux méthodes axiomatiques. Prenons l'exemple des premières définitions de Wiener 1921, plus précisément de la proposition (4) qui définit  $=*$  à partir de  $<'$  (*Ibid.*, 190). Wiener construit d'abord (définition (2)) la relation  $P_{se}$  : soit  $P$  une relation binaire quelconque,  $xP_{se}y$  signifie que  $\sim xPy \wedge \sim yPx$  ; puis (définition (3)), il introduit  $P_s$  ainsi :

$$xP_sy \quad \text{si et seulement si} \quad \forall z \in C'P (zP_{se}x \Leftrightarrow zP_{se}y)$$

Il applique enfin (définition (4)) sa construction à  $<'$  pour obtenir  $=*$ . Dit autrement,  $=*$  est la relation  $<'_s$ . Wiener présente sa construction d'abord dans le cas général : aucune contrainte (autre que typologique) n'est posée sur  $R$  en (2) et (3). Les indices « se » et « s » dans  $P_s$  et  $P_{se}$  désignent ainsi des opérateurs que l'on peut appliquer à n'importe quelle relation pour obtenir de nouvelles relations. Si toutefois les relations initiales  $P$  sont des relations d'ordre partiel strict, alors la relation  $P_{se}$  sera une relation d'équivalence (Wiener reprend là un résultat démontré dans son 1914b). Les opérateurs « se » et « s » rendent donc plus « régulières » les relations auxquelles ils sont appliqués. Ils constituent des outils permettant de dériver « de l'expérience grossière (*crude*) et fruste (*uncouth*) des fonctions qui auront, comparativement, de bonnes propriétés » (*Ibid.* 182)<sup>1</sup>. Dans Wiener 1921, les constructions nécessaires à l'élaboration d'une théorie des grandeurs psychophysiques sont donc explicitement présentées comme l'application d'une doctrine logique plus générale (la logique « synthétique »

<sup>1</sup> Le rêve de Wiener serait, si l'on n'en croit le passage cité plus haut de 1914c, de n'imposer absolument aucune condition (autre que typologique) aux relations fondamentales, données dans l'expérience, et d'en extraire, par des opérateurs suffisamment puissants, les entités très régulières dont on aurait besoin dans la mesure. Ce projet a de nombreux points communs avec ce que met en place Carnap dans son *Aufbau*. Voir pour plus à ce sujet, conclusion *infra*.

précisément), visant à montrer comment, à partir de relations très irrégulières, il est possible de construire des relations qui ont, « comparativement, de bonnes propriétés ».

Résumons. L'originalité de Wiener 1921 est de conjointre deux sortes de considérations, déjà présentes, mais jamais combinées entre elles chez Russell : les analyses sur la quantité et la mesure d'une part ; les recherches sur les constructions logiques d'autre part. La nouvelle théorie de la grandeur est, pour Wiener, au même titre que la théorie des instants ou des objets physiques, une application de la méthode constructionnelle. Dans tous ces cas, il s'agit en effet de partir des données de l'expérience (d'une expérience en réalité déjà idéalisée), et de structurer les variables de façon à retrouver à la fin les objets (les grandeurs, les instants, les corps) sur lesquels portent les théories que l'on étudie. Ce cadre constructionnaliste conduit donc à poser l'existence d'un hiatus entre les propriétés des objets immédiatement données et celles des entités construites. Wiener insiste beaucoup sur le fait que ce qui est mesuré, ce ne sont ni les sensations, ni les intervalles de sensations, mais les intensités sensorielles c'est-à-dire des classes d'équivalence engendrées par des relations extrêmement complexes,  $\text{Meas}_{V\>\phi, a}$  ou  $\text{Meas}_{V\>\phi, a}$ .

Il y a, en conséquence, sur ce point, une opposition frontale et complète entre l'approche de Suppes et de ses collaborateurs, qui conçoivent la mesure en termes de représentation d'un donné empirique, et celle de Wiener, qui comme Kyburg, cherche à creuser l'écart entre les jugements de perceptions et les entités mesurées. Gerlach, dans son *Technical Report* de 1957, ne semble pas prendre la mesure de cette différence. L'élève de Suppes adopte, sans jamais le mettre en question le paradigme représentationaliste. Ainsi, dans la partie IV de son *Technical Report*, Gerlach formule une axiomatique du système empirique considéré par Wiener, et la partie VI, conclusive, de son texte, est entièrement consacrée à la démonstration du théorème de représentation<sup>1</sup>. Cette adhésion sans distance à la théorie du *measurement* l'empêche de saisir dans sa globalité ce que la démarche de Wiener a d'original. Certes, Gerlach a tout à fait raison de mettre en question certains points techniques dans la construction de Wiener<sup>2</sup>. Mais elle a tort de considérer Wiener 1921 comme une première tentative brouillonne de définir un système empirique intéressant. L'élève de Suppes manque complètement l'idée que la mesure n'est pas, pour Wiener, une représentation, mais au contraire le résultat d'une construction<sup>3</sup>.

Si Kyburg et Wiener se rejoignent dans leur opposition commune à l'approche représentationaliste, ils diffèrent cependant dans leur façon de concevoir le hiatus entre données phénoménales et grandeurs. Kyburg base son approche sur certains principes de minimisation qui gouvernent le sujet rationnel dans la systématisation de ses jugements comparatifs de perception. Dans la structure du langage  $L_4$  examiné plus haut, les mêmes éléments observationnels (les longueurs perçues des segments) peuvent avoir deux types de relations : les relations perceptives, très irrégulières, et les relations quantitatives qui jouissent

---

<sup>1</sup> Gerlach 1921, 128 : « le théorème garantit que si  $K$  est n'importe quel ensemble d'entité ordonné par une relation  $<$  tel que  $K$  et  $<$  satisfont nos axiomes, alors nous avons la chose suivante : (i) une assignation de nombres peut être réalisée sur  $K$  qui préserve (...) l'ordre des intervalles induit par notre relation quaternaire « réelles »  $<^*$  et  $=^*$ . (...) (ii) Cette assignation de nombres sera telle qu'elle reflétera l'existence des différences subliminaires. Ainsi, par exemple, les nombres assignés à deux éléments quelconques discernables différeront d'une valeur au moins aussi grande que le nombre assigné à la *jnd*. La différence numérique entre les distances de deux intervalles discernables l'un de l'autre sera au moins aussi grande que le nombre assigné à la *jnd*. De plus, deux intervalles dont l'un est subliminaire seront distinguables seulement si l'autre est supraliminaire. Finalement (iii) n'importe quel assignement satisfaisant (i) et (ii) sera du type connu sous le nom de « mesure d'intervalle », i.e. unique relativement à une transformation linéaire. »

<sup>2</sup> Il est ainsi possible que Wiener ait mal évalué les risques de trivialisation que lui fait encourir l'abandon de l'hypothèse fechnérienne de la constance du seuil (voir *supra*).

<sup>3</sup> Que la perspective de Wiener (comme celle de Kyburg) soit très différente de celle des théoriciens représentationalistes n'interdit pas la possibilité et même la fécondité d'une lecture croisée. Gerlach reprend dans la partie III de son *Technical Report* l'essentiel des définitions de Wiener – définitions qui jouent un rôle décisif dans l'élaboration de la preuve de son théorème de représentation. Inversement, la sophistication de l'approche représentationaliste permet de pointer des potentielles faiblesses dans Wiener 1921 (voir note précédente).

de propriétés formelles très simples. La connexion entre les deux types de jugements engendrés par les deux sortes de relations est fournie par la théorie de l'erreur, développée en L<sub>5</sub>. Les jugements perceptifs initiaux, dont la structure était très irrégulière apparaissent ici comme des saisies approximatives de jugements quantitatifs appartenant à un système beaucoup plus simple. L'ensemble de la complexité initiale est en quelque sorte, chez Kyburg, absorbée et prise en charge par la théorie de l'erreur. Il en va différemment chez Wiener. Les relations quantitatives régulières ne sont pas introduites comme de nouveaux termes primitifs ; elles sont construites, c'est-à-dire définies à partir des relations primitives. Les relations quantitatives ne s'appliquent donc absolument pas aux mêmes objets que les relations perceptives : les intensités sensorielles ou les vecteurs intensités sont des entités dont la structure logique est extrêmement compliquée, et auxquels ne correspond aucun corrélat dans l'expérience. Les données perceptives sur lesquelles la théorie est basée ne sont pas ainsi « révisées » dans Wiener 1921, contrairement à ce qui se passe dans Kyburg 1984<sup>1</sup>. Ce qui prend en charge la complexité des données de l'expérience, et permet l'émergence d'un système quantitatif plus « régulier », ce n'est pas chez Wiener, une théorie quantitative de l'erreur, mais la complexité logique des variables d'intensité.

On pourrait, pour finir, se demander quelle a été la postérité des premiers travaux de Wiener dans son œuvre ultérieure. Le mathématicien, après la publication de *A new theory of measurement*, ne produira plus rien en logique, et abandonnera (personne ne s'en plaindra) l'usage du formalisme russellien. Je crois néanmoins que Wiener 1921 n'est pas une parenthèse sans lendemain. On peut me semble-t-il le voir comme une première exploration d'un champ qui sera de nouveau abordé dans les travaux sur le traitement du signal datant des années 40s. Wiener s'est beaucoup intéressé aux techniques de filtrage, c'est-à-dire aux dispositifs théoriques (qui peuvent être parfois implémentés physiquement) permettant de séparer le signal émis du « bruit » engendré par les capteurs ou causées par le milieu de transmission<sup>2</sup>. Or il existe une analogie entre, d'une part, le souhait d'extraire des données « bruitées » de l'expérience des relations quantitatives dotées de propriétés très régulières et, d'autre part, le désir de reconstruire, à partir du phénomène capté, le signal émis. Je ne prétends pas, cela va de soi, que les techniques de filtrage dans la théorie des signaux sont les descendants directs des opérations de « régularisation » employées par Wiener dans son analyse des seuils perceptifs. Je suggère seulement qu'il y a dans la nature des problèmes une forme de parenté conceptuelle. Ce qui va, d'ailleurs, dans ce sens, c'est le fait, qu'à partir des années 60s, la théorie du signal devient le cadre de l'étude des seuils perceptifs en psychologie<sup>3</sup>. *A new theory of measurement* est donc peut-être plus que le plus beau fruit de la parenthèse russellienne de Wiener. Il pourrait représenter la première manifestation d'un intérêt pour les phénomènes liés aux perturbations de l'information qui conduira Wiener à développer certains de ses plus célèbres travaux.

## Conclusion

Dans les *Principia*, Russell et Whitehead développent une théorie formelle de la quantité à laquelle ils n'articulent aucune conception philosophique déterminée. Il est cependant possible d'extraire de leur construction des idées susceptibles de renouveler certaines discussions contemporaines. J'ai ainsi montré, au chapitre 5, comment l'usage

<sup>1</sup> Ainsi, dans *A new theory of measurement*, les jugements d'indiscernabilité perceptive restent vrais d'un bout à l'autre de l'analyse et ne sont pas contredits par les jugements sur les intensités sensorielles.

<sup>2</sup> Pour plus sur la théorie de signal, et en particulier pour une définition du « filtrage de Wiener », voir Le Roux 2000.

<sup>3</sup> Sur la théorie dite de la détection du signal, voir Green & Swets 1966. L'idée de base est de considérer que le sujet à qui l'on présente des stimulations proches de son seuil de détection se trouve dans une situation analogue à celle dans lequel est un dispositif de mesure dans un contexte bruité.

« architectonique » de l'*Application Constraint* dans les *Principia* se distinguait de la manière dont les philosophes néo-fregéens la mettent en œuvre aujourd'hui, et comment cette utilisation est elle-même liée à une certaine conception, très riche, des mathématiques et de la philosophie des mathématiques. Le présent chapitre poursuit cette piste. J'y confronte l'approche aujourd'hui standard de la quantité (la *theory of measurement*) au cadre mis en place dans *Principia* VI. Dans la *theory of measurement*, la notion de quantité est subordonnée à celle de mesure et le concept de nombre n'a aucune caractéristique structurelle. Les auteurs des *Principia* auraient rejeté ces deux thèses. Vidant la notion de quantité de toute substance, la première conduit à concevoir toute application des mathématiques comme un cas particulier de mesure ; privant le concept de nombre de tout contenu déterminé, la seconde interdit toute réponse autre que pragmatique à la question de savoir pourquoi les savants usent des nombres pour mesurer les phénomènes.

Il y a un point cependant sur lequel les *Principia* restent en deçà du paradigme représentationaliste. Un des objectifs avoués de Suppes et de ses collaborateurs est d'élaborer une théorie qui rende compte de la diversité des systèmes de mesure effectivement utilisée par les scientifiques. Sur ce plan, les analyses de Russell et de Whitehead demeurent prisonnières du modèle de la grandeur additive. Certes, on l'a vu, les familles de vecteurs de *Principia* VI correspondent, dans la classification de la théorie du *measurement*, à des systèmes d'intervalles, plus généraux que les systèmes extensifs. Il reste cependant que l'accent mis sur l'additivité inscrit *Principia* VI dans une perspective bien déterminée, relativement étroite et datée, dominée par le modèle des grandeurs extensives et de la géométrie. D'où l'intérêt de *A new theory of measurement*, qui, tout en restant fidèle au cadre mis en place par Russell et Whitehead, traite d'un sujet beaucoup plus complexe et contemporain, la mesure psychophysique. Les recherches de Wiener démontrent que le cadre des *Principia* est suffisamment souple pour donner lieu à des développements dont le raffinement et la généralité n'ont rien à envier aux analyses des théoriciens du *measurement*. Mieux, en appliquant la méthode des constructions logiques à la question de la grandeur, Wiener questionne l'assimilation de la mesure à la représentation, et met ainsi le doigt sur un autre présupposé, non questionné, de la théorie de Suppes.

Dernier point – il est difficile, en lisant Wiener 1921, de ne pas faire de liens avec l'*Aufbau* de Carnap (1928). La tâche que Wiener s'assigne à lui-même peut se résumer ainsi : construire logiquement la notion de grandeurs à partir des données sensorielles, en se concentrant notamment sur la dérivation de relations transitives à partir de relations qui ne le sont pas. Or Carnap cherche lui aussi à construire l'ensemble des objets de la science à partir d'une base auto-psychique, et insiste également, exactement comme le fait Wiener, sur l'importance qu'à la procédure consistant à dériver d'une relation qui n'est pas transitive une relation qui l'est (c'est la tâche de la quasi-analyse)<sup>1</sup>. Si j'ai laissé de côté cette comparaison, c'est uniquement parce qu'elle nous aurait détourné trop de notre axe principal. Une telle analyse comparative serait en effet, je crois, très fructueuse. Plusieurs études, dont le point commun est d'accroître la distance entre Carnap et Russell, ont récemment renouvelé l'interprétation l'*Aufbau*. M. Friedman (1999) a soutenu que la première œuvre de Carnap appartenait à la tradition néo-kantienne et devait être lu dans cette perspective ; J. English (à paraître) et E. Schwartz (à paraître) ont, eux, attiré l'attention sur l'influence de la phénoménologie du premier Husserl. L'intérêt du travail de Wiener est précisément de fournir une sorte d'étalon de mesure pour tester cette hypothèse. Le mathématicien américain est en effet à l'époque une « créature russellienne » ; Wiener développe, prolonge, radicalise les intuitions méthodologiques de son maître. La comparaison systématique de Wiener 1921 et Carnap 1928 permettrait ainsi de

---

<sup>1</sup> Signalons que le chapitre 1 de Gerlach 1957 est une confrontation systématique entre Wiener 1921 et Goodman 1951, dont on sait à quel point il a été influencé par Carnap 1928.

préciser ce qu'il y a de non russellien dans l'approche du philosophe allemand, à la fois sur le plan philosophique<sup>1</sup> et sur le plan technique<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Ce qui manque très certainement à Wiener, c'est, sur le plan philosophique, la systématique de la pensée de Carnap. Le but de Wiener n'est pas d'élaborer une théorie générale des objets, ni même une théorie générale de la mesure – beaucoup plus modeste, il est de rendre compte de la mesure psychophysique. Sur la notion de système chez Carnap, voir Schwartz 2002.

<sup>2</sup> L'analyse des procédures techniques utilisées par les deux auteurs demanderait à elle seule un développement important. Mais il me semble que Carnap n'aurait jamais accepté de ne pas discuter les conditions de trivialisation de la construction de  $V_{S\phi}$  à partir de  $V_{C\phi}$ .

## APPENDICE : la construction de $\text{Dist}_\kappa$ et $\text{Reg}_\kappa$

Je donne ici quelques précisions sur la construction de la famille  $\text{Reg}_\kappa$  dérivée de  $\kappa$ , et sur les définitions (15) et (16) de Wiener (1921, 195). (15) est la définition de la relation  $\text{Dist}_\kappa$  :

$$(15) \quad \text{Dist}_\kappa =_{\text{Df}} \{(R, u) \mid R = \text{Meas}_\kappa^{-1} \cdot u + \}.$$

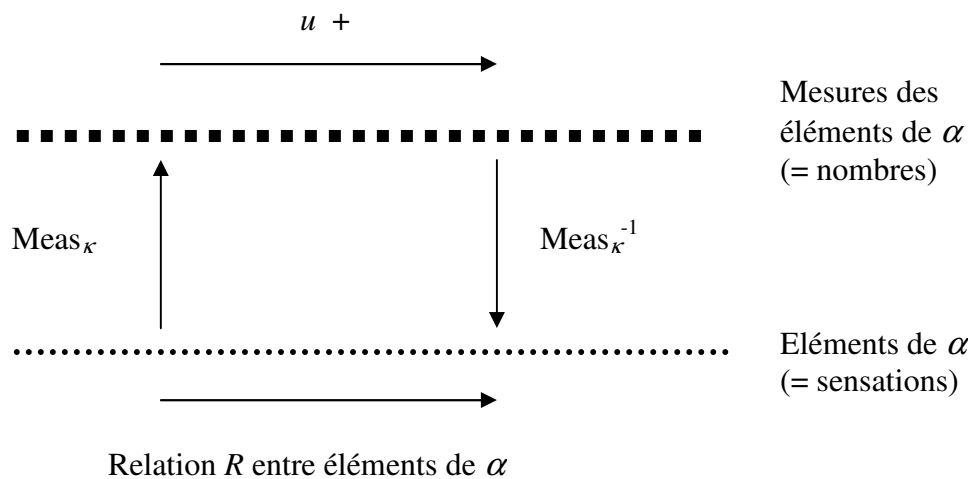
(16) est la définition de la famille  $\text{Reg}_\kappa$  :

$$(16) \quad \text{Reg}_\kappa =_{\text{Df}} \text{D}'\text{Dist}_\kappa - \mathfrak{v}'\Lambda.$$

Expliquons d'abord la définition (15). Wiener considère la relation  $R$  suivante : soit  $u$  un réel quelconque, deux sensations (deux éléments de  $\alpha$ ) ont la relation  $R$  lorsque la différence de leurs mesures (par la relation  $\text{Meas}_\kappa$ ) est  $u$ . Formellement,  $R = \text{Meas}_\kappa^{-1} \mid u + \mid \text{Meas}_\kappa$  (voir la figure illustrant la définition).  $R$  est donc une relation définie sur  $\alpha$ , qui n'est pas nécessairement *one-one* (à un nombre donné,  $\text{Meas}_\kappa^{-1}$  peut faire correspondre plusieurs sensations). Mais Wiener considère malgré tout  $R$  comme un vecteur.

$\text{Dist}_\kappa$  peut alors être définie comme la relation entre un vecteur  $R$  de ce type et le nombre  $u$ . L'ensemble des relations  $R$ , non vides, ainsi caractérisées, est la classe  $\text{Reg}_\kappa$  (16).

Figure illustrant la  
définition (15) de  
 $\text{Dist}_\kappa$ .



Wiener pose que la mesure d'un membre de  $\text{Reg}_\kappa$  est « la valeur de  $u$  pour lequel ce membre est  $\text{Dist}_\kappa^{-1}u$  ». Autrement dit, la restriction de  $\text{Dist}_\kappa^{-1}$  à  $\text{Reg}_\kappa$  peut être considérée comme une mesure des éléments de  $\text{Reg}_\kappa$ . Par construction, à une valeur de  $u$  ne peut pas correspondre plus d'un élément de  $\text{Reg}_\kappa$ . Wiener démontre que l'on a en réalité plus : la restriction de  $\text{Dist}_\kappa^{-1}$  à  $\text{Reg}_\kappa$  est *one-many*, ce qui signifie qu'à un vecteur de  $\text{Reg}_\kappa$  ne peut correspondre plus d'une valeur  $u$ . La relation entre les éléments  $R$  de  $\text{Reg}_\kappa$  et leur mesure «  $\text{Dist}_\kappa^{-1}R$  » est donc *one-one*, et les deux premiers critères de *Principia* VI, C sont satisfaits. Reste à étudier la compatibilité entre produits relationnels des vecteurs de  $\text{Reg}_\kappa$  et les opérations additives et

multiplicatives entre leur mesure. Il est facile de montrer que la mesure du produit relationnel de  $R \mid S$  est la somme de leurs mesures (l'introduction du terme «  $+u$  » dans la définition des vecteurs de  $\text{Reg}_\kappa$  visait à obtenir ce résultat). Plus délicate est l'étude de la compatibilité entre produit relationnel et produit arithmétique. Mais Wiener parvient à montrer que la mesure de  $R$  selon l'unité  $S$  est le produit de la mesure de  $R$  selon l'unité  $T$  par la mesure de  $T$  selon l'unité  $S$  (voir 196-197). La restriction de  $\text{Dist}_\kappa^{-1}$  à  $\text{Reg}_\kappa$  a donc toutes les propriétés que Russell et Whitehead exigeaient d'une mesure.





## Conclusion

En rassemblant les différents éléments du tableau (en mettant certains détails de côté), on peut dire que deux grands mouvements structurent l'évolution des conceptions de Russell sur la quantité. Le premier a trait à la théorie relationnelle de la grandeur. Russell élabore la doctrine dès 1900. Mais il n'en fait pas alors une pièce maîtresse de son approche. Les « *distances* » jouent certes un rôle important dans les *Principles* – notamment dans la partie VI consacrée à la géométrie. Mais il n'empêche : en 1903, les grandeurs relationnelles sont considérées comme un genre de quantité parmi d'autres, non comme le socle à partir duquel la doctrine de la grandeur doit être construite. Dans les *Principia*, la théorie des réels comme relations de relations (explicitement présentée comme une généralisation de la théorie euclidienne classique) conduit en revanche à accorder une place centrale à la doctrine des grandeurs relationnelles. La notion de distance, considérablement généralisée en devenant famille de vecteurs, s'applique désormais à des structures qui n'ont pas la forme très particulière du continu des distances algébriques sur la droite euclidienne, de sorte qu'une extension du schéma relationnel à toutes les formes de grandeurs est en 1913 envisageable – Russell et Whitehead notent d'autre part qu'une telle extension, en plus d'être formellement possible, suit le principe selon lequel tout jugement quantitatif est un jugement de comparaison. Il y a donc, à partir du séminal Russell 1900b, une bifurcation : en 1903, le canevas relationnel n'est pas la matrice de la théorie de la grandeur, mais une grandeur d'un genre particulier, tandis qu'en 1913, la doctrine, généralisée, constitue semble-t-il la base de la conception de la quantité et de la mesure. Je dis « semble-t-il », car, comme nous l'avons vu, Russell et Whitehead ne prolongent pas, en 1913, leur théorie formelle par une doctrine métaphysique de la quantité.

A ce recentrage sur la doctrine relationnelle, il faut combiner une autre évolution, plus discrète et moins aboutie que la précédente. Alors que la doctrine absolutiste est défendue dans les *Principles* de façon très ferme, la position de Russell et de Whitehead dans les *Principia* est plus indéterminée. Les deux auteurs ne se prononcent pas explicitement sur la question et, des constructions qu'ils présentent, on ne peut pas tirer des conclusions univoques. D'une part, en effet, les grandeurs, en tant que relations, sont toujours données indépendamment de leurs instanciations concrètes – ce qui semble indiquer que Russell et Whitehead distinguent encore entre grandeurs et quantités. Mais d'autre part, les relations entre les quantités (les couples d'éléments de l'ensemble  $\alpha$ ) et les grandeurs (les vecteurs de  $\kappa$ ) ne sont pas conçues comme étant d'emblée *many-one*. Cette dernière propriété fait l'objet d'une déduction, toute entière basée sur le concept de famille connectée, dont a vu, au chapitre 4 (II-3), les liens qu'il avait avec le fait fondamental selon lequel « nous référons nos perceptions sensibles des choses à une origine que nous appelons « ici » » (Whitehead 1911, 125). Ce serait ainsi la forme de notre interaction avec les systèmes de quantités qui permettrait de garantir qu'à une quantité n'est associée pas plus d'une grandeur. Cette lente dérive vers les positions relativistes n'est véritablement parachevée que par Wiener, qui pose explicitement que les grandeurs sont des constructions à partir des quantités (des classes d'équivalence particulières de couples d'éléments de  $\alpha$ ) dans le contexte d'une réflexion sur les systèmes de mesure psychophysique (Wiener 1921). Wiener n'est pas seulement un « technicien » hors-pair, qui nettoie et améliore ponctuellement la présentation des *Principia* ; il a su déceler et accomplir un geste qui n'était encore qu'esquissé par Russell et Whitehead –

il a su concevoir la grandeur comme une construction logique, au même titre que les points de l'espace et les instants.

Les conceptions du philosophe ne restent donc pas figées durant la période ; certainement en partie sous l'influence de Whitehead, les analyses s'infléchissent, les constructions s'affinent et gagnent en généralité, des choix sont modifiés. Ce que j'ai toutefois cherché à mettre en valeur, c'est que la base du questionnement russellien restait extrêmement stable et cohérente. Le seul fait de pouvoir résumer aussi facilement les grands mouvements qui animent sa pensée montre en négatif à quel point le paysage dans lequel se déroule cette histoire reste stable. Les textes de Russell sur la quantité ne forment pas une rhapsodie sans queue ni tête. Ils ont leur logique ; un ordre, une forme de systématisme les traverse. Les évolutions conceptuelles importantes qui se font jour sont elles-mêmes le produit d'oppositions qui affectent la structure la plus intime des théories élaborées. Comme ont su le voir Bigelow et Pargetter, les conceptions qui font de la grandeur une relation (1900b et 1913) et les approches qui divisent la grandeur en genres distincts (1903) sont en tension les unes avec les autres. L'hésitation russellienne entre les deux schémas n'est ainsi pas le fruit de coups de tête ou de décisions arbitraires, mais le produit d'une difficulté à concilier deux stratégies efficaces, mais incompatibles. J'ai soutenu (chap. 2) qu'une des raisons pour lesquelles Russell adopte une position absolutiste dans *Principles* III est précisément due à la reconnaissance de l'existence de divers genres de grandeurs. On pourrait donc aller plus loin dans l'unification de la description de l'évolution russellienne en liant la montée en puissance de la doctrine relationnelle à l'abandon progressif de l'absolutisme : si Russell et Whitehead peuvent, en 1913, adhérer (ou du moins ne sont plus opposés) au relativisme, c'est précisément parce qu'ils adoptent une conception relationnaliste de la grandeur, dans laquelle la question des genres perd sa centralité. Bien entendu, ni Russell ni Whitehead ne connectent les deux thèses de cette manière – mais on ne peut qu'être frappé par le fait que les deux évolutions se renforcent l'une l'autre.

L'existence d'une forte continuité dans les conceptions de Russell sur la quantité appelle quelques remarques plus générales concernant la façon dont la pensée de Russell progresse et évolue. L'auteur des *Principles* est célèbre, on le sait, pour ses changements fréquents d'opinions. C. D. Broad a dit de lui qu'il produisait un nouveau « système de philosophie tous les cinq ans » (Broad 1924, 79). En un sens, cette versatilité se vérifie en ce qui concerne les théories de la grandeur. En 1897-1899, Russell soutient une théorie relationnaliste de la quantité, tout en développant une formalisation basée sur les algèbres vectorielles. En 1900-1908 (qui marque le début de la rédaction par Whitehead de la partie VI des *Principia*), il adhère à une doctrine non relationnaliste et absolutiste de la *magnitude*, où les grandeurs relations sont des genres de grandeur parmi d'autres. En 1908-1913, il retourne à une approche relationnaliste et amorce un virage vers le relativisme. Le compte est bon : en une quinzaine d'année, trois systèmes se succèdent. Mais décrire les choses de cette manière laisse de côté l'essentiel – à savoir les raisons pour lesquelles Russell change aussi souvent d'« avis ». La question de la grandeur est de ce point de vue instructive, car elle est un sujet à la frontière de plusieurs autres – la théorie des rationnels et des réels, la géométrie, la logique des relations, la métaphysique. Une bonne théorie de la grandeur doit ainsi pouvoir résoudre des problèmes extrêmement hétérogènes entre eux : comment se fait-il que l'on puisse appliquer les nombres aux grandeurs ? Quel est le statut de la métrique euclidienne ? Comment formaliser dans le calcul des relations l'additivité ? De quelle nature est le rapport entre une grandeur et son genre ? L'analyse russellienne de la grandeur est essentiellement polyphonique ; le philosophe fait toujours simultanément plusieurs choses, il travaille toujours sur plusieurs niveaux, entre lesquels il circule constamment. C'est cette prise en compte du caractère polyphonique de l'analyse russellienne que l'on perd lorsque l'on se focalise sur les « changements de système ». Certes, Russell remanie effectivement de façon profonde sa

théorie de la grandeur de 1897 à 1913. Mais son analyse se déploie toujours sur divers plans, et les changements globaux s'appuient sur des continuités locales extrêmement fortes – en l'occurrence, celles concernant l'analyse formelle originale des grandeurs relations, présente en 1903 et mise au premier plan en 1913. Comme l'enquête sur la grandeur, dans sa dimension polyphonique, est représentative de la façon dont la pensée de Russell se déploie en général, je vais m'arrêter sur ce point pour faire trois remarques plus générales.

La première concerne le rapport entre les calculs (le développement dans une langue logique ou mathématique d'une doctrine particulière) et la prose (les commentaires ajoutés aux calculs ou la même théorie couchée dans le langage de tous les jours). Selon Broad, Russell élaborerait des vastes systèmes cohérents de propositions cohérentes, qu'il réviserait régulièrement (pensons à ses diverses théories du jugement, aux théories des types successives, aux différentes théories de l'ameublement du monde, etc.). L'erreur d'une telle approche est de voir en Russell un philosophe purement « argumentatif », qui passerait son temps à discuter la valeur de tel ou tel raisonnement effectué dans le langage ordinaire. Or, Russell ne se contente jamais d'une telle approche ; les propositions philosophiques sont souvent pour lui des commentaires de développements logiques et mathématiques. On ne peut donc isoler l'exposé philosophique des thèses et des arguments des élaborations formelles qui l'accompagnent et lui donne sens. Reconstituer la cohérence et le mouvement de la pensée russellienne nécessite la prise en compte des « calculs ». Par exemple, l'exposé formel de la notion de distance dans Russell 1900b permet seul de connecter la théorie des *Principles* à celle des *Principia* : les trois paragraphes supprimés permettent de comprendre que la doctrine de 1913, loin d'être simplement un nouveau « système » surgi de l'esprit fertile, mais un peu vain, de Russell, est une généralisation naturelle de la notion de distance de 1903. Il ne faudrait cependant pas croire que les développements logiques soient la clé de voûte de l'édifice. Les analyses métaphysiques ne sont jamais, chez Russell, des justifications *a posteriori* de « calculs » dont le développement est conçu comme étant autonome. Dans les *Principles* comme dans les *Principia*, la métaphysique norme, autant qu'elle est normée, par les constructions mathématiques. L'épistémologie russellienne n'est pas une « philosophie de savant » – à la différence d'un Poincaré, Russell ne cherche pas à dégager une *épistémé* qui serait reflétée par la pratique des mathématiciens et des logiciens. Au contraire, Russell rejette des tentatives de formalisation pour des raisons purement métaphysiques ; ainsi, si Russell abandonne ses premiers travaux sur les algèbres grassmaniennes, c'est parce qu'ils ne permettent pas de donner corps à l'intuition proprement philosophique selon laquelle une quantité est une comparaison, i.e. une relation ; de même, si Russell replace en 1903 sa doctrine de la distance dans le contexte plus général d'une analyse des divers genres de grandeurs, c'est parce qu'il estime que l'analyse métaphysique du concept interdit de réduire les grandeurs aux relations. Cette exigence consistant à motiver par des raisons philosophiques indépendantes les principes de base des développements formels se retrouve partout chez Russell – dans la théorie des types bien sûr, mais également dans la théorie du jugement, ainsi que dans celle des constructions logiques. L'ajustement, l'équilibre entre la prose et les calculs doit s'effectuer, selon Russell, sans sacrifier l'un ou l'autre. Le pari est qu'une bonne analyse métaphysique peut toujours s'explicitier symboliquement, et que, inversement, lorsque les indéfinissables et les premiers principes des théories mathématiques ont été bien dégagés, alors une reprise philosophique est toujours possible.

Ce va-et-vient constant entre analyses techniques et considérations philosophiques est le contexte dans lequel il faut replacer la collaboration entre Russell et Whitehead. La lecture de leur correspondance (seules les lettres de Whitehead conservées par Russell ont survécu) montre que si les deux auteurs se sont divisé le travail (Russell se chargeant des premiers livres, Whitehead du livre VI et de la géométrie), l'ensemble des sujets faisait l'objet d'une reprise commune. Les manuscrits de Russell (qui ne contenaient la plupart du temps que les

développements formels) faisaient l'objet d'une lecture soignée par Whitehead, qui élevait des objections de nature fondationnelle ou technique, et explorait des voies alternatives. Russell répondait, et la recherche avançait ainsi de cette manière. Inversement, pour ce qui concerne la partie VI, Whitehead envoyait les manuscrits que Russell relisait, critiquait et réorganisait. Si, donc, il est bien vrai que Russell s'est concentré plutôt sur les parties logiques, et que Whitehead a pris en charge plutôt les parties mathématiques, on aurait tort de croire que la théorie des types<sup>1</sup> n'a été l'œuvre que du premier et la partie VI l'œuvre que du second. On aurait surtout tort de penser que Russell était dans le tandem le « philosophe », et Whitehead le « technicien » ; les deux auteurs endossent tour à tour les habits du philosophe et du logicien. Cette réversibilité des points de vue a sans aucun doute joué un rôle fondamental dans la maturation des *Principia*. Pour pouvoir ajuster les calculs à la prose, pour éviter de faire de l'un l'annexe de l'autre tout en maintenant une forme d'équilibre entre les deux, il fallait en effet être deux. Il fallait pouvoir s'immerger complètement dans les développements formels, pour s'en déprendre ensuite totalement. Les échanges entre Russell et Whitehead donnent à chacun cet autre regard, indispensable à l'accomplissement de leur projet commun. Seul, la tentation aurait été en effet grande de sacrifier la « prose » philosophique pour garantir la cohérence, la simplicité et la systématisme du « calcul », ou, encore de ne pas expliciter le désaccord entre les réquisits techniques et les analyses philosophiques. Whitehead a été pour Russell une voix le rappelant constamment à l'exigence de leur entreprise ; dans telle lettre, Whitehead convainc son ami de la nécessité de tenir bon sur certains présupposés philosophiques (par exemple, l'universalisme) ; dans telle autre, il lui rappelle que la voie de nouveau explorée, si elle est métaphysiquement plus satisfaisante, est techniquement une impasse. Que les *Principia* aient été coécrits – qu'ils aient été écrits par un philosophe faisant de la logique et un mathématicien qui se révélait de plus en plus intéressé par la philosophie – est beaucoup plus qu'anecdotique : l'œuvre nécessitait une telle collaboration.

Dans mes deux premières remarques, j'ai opposé, reprenant une distinction wittgensteinienne, la prose au calcul – le point étant de montrer que Russell intervenait dans les deux champs simultanément et que cette simultanité a été rendue possible par la collaboration avec Whitehead. Mais l'opposition entre prose et calcul est elle-même assez grossière, et ne rend pas justice à la singularité et la diversité des domaines dans lesquels se déploient l'enquête russellienne. Je l'ai dit : la théorie de la quantité recoupe différents nœuds problématiques de la réflexion russellienne, parmi lesquels on peut citer l'analyse de la géométrie métrique (passées en revue dans les chapitres 1, 3 et 4), la question de la division en genres (chapitres 2 et 5), le problème de l'application des mathématiques (chapitres 5 et 6), le rapport à la psychologie (chapitre 1, 3 et 4) – auquel il faudrait ajouter la théorie des constructions (chapitres 4 et 6). Il est absolument nécessaire de prendre en compte tous ces champs lorsque l'on veut donner un sens à la doctrine russellienne. La multiplicité et la simultanité des enjeux rendent la tâche du commentateur difficile. J'ai été ainsi fréquemment obligé de reprendre à l'intérieur de tel ou tel chapitre le développement laissé en suspens dans un chapitre antérieur – ou au contraire d'anticiper sur des considérations ultérieures. La force d'un argument ne s'apprécie chez Russell que lorsque plusieurs contextes sont gardés en tête ; le commentateur, qui déploie une après l'autre ses idées, est ainsi souvent frustré par cet aspect polyphonique dont il est, par nature, difficile de rendre compte. Russell n'est pas un penseur systématique ; mais il n'est pas non plus un penseur du fragment. Il travaille sur

---

<sup>1</sup> Les remarques de Whitehead concernant la théorie des types sont notamment extrêmement intéressantes d'un point de vue philosophique. Je renvoie le lecteur à Gandon 2009e pour un échantillon commenté de ces textes. Mais la chose vaut plus généralement de tous les sujets abordés. Chacun des deux auteurs adoptent successivement la position extérieure du philosophe qui commente et présente les développements formels, et du mathématicien-logicien qui prouve les théorèmes et inventent les systèmes de notation nécessaires.

l'ajustement réciproque de parties développées de façon autonome, indépendamment les unes des autres. Son art est celui du tailleur, qui apprécie la coupe d'un costume – le fait que différents éléments, cousus les uns aux autres, tombent juste et s'accordent globalement. De même qu'un beau morceau d'étoffe peut être utilisé par un tailleur pour une veste ou une robe, de même Russell peut placer la même analyse dans des contextes extrêmement différents. Le plus bel exemple est sans doute fourni par la reprise dans le §52 des *Principles* de passages entiers de *Do the Differences differ?* pour montrer en 1903 une conclusion qui contredit frontalement celle défendue en 1900. Il y a des connexions entre les différentes analyses locales, mais ces liens, ces « coutures », ne remettent jamais en cause le fait que c'est localement que les enquêtes conceptuelles doivent faire leur preuve. Une analyse peut donc être réutilisée si elle est « bonne » (même dans des contextes extrêmement différents, voire contradictoires) ; mais jamais un développement ne devra être admis simplement pour rendre le système cohérent. On retrouve ici une des idées fondamentales du platonisme de Moore, tel qu'il est mis en place dans *Principia Ethica*. Les systèmes et les définitions ne doivent pas faire obstacle à l'examen des vérités éthiques dans leurs singularités, et de reconnaître la pluralité, l'hétérogénéité et la spécificité des « *intrinsic Goods* »<sup>1</sup>.

Revenons à la question des nombreux revirements russelliens. Il faut prendre en compte le caractère polyphonique de la pensée de Russell pour les apprécier à leur juste mesure. La question n'est pas de savoir si la continuité ou au contraire les ruptures priment dans l'évolution des idées russellienne, car une telle alternative met l'accent sur la linéarité, l'unidimensionalité de ce qui est censé évoluer. Le point essentiel est de comprendre que Russell travaille sur plusieurs niveaux en même temps et que les changements sont souvent le résultat d'une différence d'appréciation concernant le rôle d'éléments déjà présents à l'étape antérieure. Certains passent au premier plan, d'autres sont relégués à l'arrière plan. Dans le cas de la grandeur, la théorie relationnelle de la quantité, qui joue déjà un rôle important dans les *Principles*, passe ainsi au devant de la scène dans les *Principia* tandis que la théorie des genres de grandeurs disparaît. Russell recherche toujours une forme d'équilibre, de stabilité relative entre des enquêtes qui valent avant tout par les clarifications qu'elles apportent à des niveaux locaux. Les réorganisations globales sont donc la plupart du temps seulement un réarrangement, un réajustement des poids relatifs des diverses doctrines. Elles ne constituent pas uniquement des changements successifs de « systèmes ».

\*

\*

\*

Dans *Recherches sur l'universalisme logique*, F. Rivenc place, de façon selon moi très pertinente, l'idée que la logique est universelle au centre de la pensée russellienne<sup>2</sup>. Trois

<sup>1</sup> Voir Moore 1903, §134 : « On doit reconnaître que certaines des attributions de valeur intrinsèque (faites dans ce chapitre), qui m'ont parues vraies, ne manifestent pas la symétrie et la systématité que l'on a coutume de demander aux philosophes. Si on veut attribuer à cette remarque la valeur d'une objection, je voudrais souligner de façon respectueuse qu'elle en est complètement dépourvue. Nous n'avons absolument aucun droit de supposer que la vérité concernant n'importe quel sujet que ce soit possède les symétries que nous désirons y voir – ou (pour utiliser une expression vague commune) qu'elle possède quelque forme particulière d'unité que ce soit. La recherche de l'unité et du système, au détriment de la vérité, n'est pas, je le crois, l'affaire propre de la philosophie, quelle qu'ait été la pratique universelle des philosophes. Et que toutes les vérités concernant l'univers possèdent les unes avec les autres toutes les diverses relations qui peuvent constituer le sens du terme 'unité' peut être légitimement assertée seulement lorsque nous aurons soigneusement distingué ces diverses relations et lorsque nous aurons découvert ce que ces vérités sont (...). L'étude de l'Éthique serait, sans aucun doute, bien plus simple et ses résultats bien plus 'systématiques' si, par exemple, la souffrance était un mal ayant exactement la même grandeur que le plaisir comme bien ; mais nous n'avons aucune raison de supposer que l'univers est tel que les vérités éthiques doivent manifester ce genre de symétrie. »

<sup>2</sup> Au moins deux autres ouvrages récents (Rouilhan 1996, Landini 1998) ont mis l'accent sur le caractère à la fois singulier et absolument central de la thèse universaliste dans la pensée russellienne. Même si de profondes divergences les opposent, notamment concernant la nature de la théorie des types (F. Rivenc et P. de Rouilhan adoptant une interprétation réaliste, alors

éléments fortement connectés entre eux forment le noyau dur de la thèse universaliste : l'affirmation que la variable en logique est non restreinte, i.e. que les lois logiques s'appliquent à toutes choses, quels que soient leurs domaines ; l'idée que la logique est absolument première, i.e. qu'elle ne présuppose aucune science, mais qu'au contraire toutes la présuppose ; enfin, la thèse selon laquelle la logique se précède elle-même, i.e. qu'elle engendre les différences auxquelles elle doit elle-même, en tant que forme théorique, se plier. Citons Rivenc 1993 (22) :

Si les connexions logiques sont à l'œuvre dans tout domaine d'objets offrant matière à l'activité théorique, alors la théorie logique est, à la différence des autres théories, une théorie universelle (...). Mais ces connexions logiques, en tant qu'objets de la théorie logique, président également au déploiement de la logique en tant que théorie particulière. D'où la position spéciale de la logique dans l'ensemble des théories : en tant que recherche générale sur les conditions et les formes du discours sensé, sur le mode théorique du discours, elle apparaît comme une discipline première puisqu'elle ne peut présupposer ni des traits généraux de la réalité (...), ni des principes d'articulation du discours (...) qui lui seraient donnés par une théorie antérieure (...). Par ailleurs en tant que Théorie rigoureusement construite, elle tombe sous sa propre juridiction, elle doit se présenter conformément aux normes du mode théorique du discours qu'elle est en charge de fonder et de décrire.

La logique est souvent aujourd'hui présentée comme une discipline formelle, un art de raisonner, qui permettrait, à partir de prémisses quelconques, de déduire des conclusions correctes. La logique, entendue en ce sens, serait *topic-neutral* – simplement formelle, elle serait elle-même dépourvue de contenu et pourrait s'appliquer indifféremment à n'importe quelle proposition de n'importe quelle science régionale. On reconnaît là une position qui est celle de la théorie des modèles contemporaine ; toutes les théories mathématiques particulières ont leur théorie des modèles ; il y a une théorie des modèles de la théorie des groupes, une théorie des modèles de la théorie des nombres, une théorie des modèles de la théorie axiomatique des ensembles, etc. L'idée que la logique est en elle-même *topic-neutral* a été aussi développée à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle dans la tradition dite algébrique, considérée par J. Hintikka comme l'ancêtre de l'approche modèle-théorique<sup>1</sup>. Dans toutes ces conceptions, le contenu auquel la logique est appliquée est extérieur à la logique elle-même. Pour Russell, à l'inverse, la logique est une science – elle a un contenu propre et n'est pas un simple moule dans lequel les contenus viennent s'articuler. Les théories mathématiques particulières (la géométrie, l'arithmétique, la mécanique théorique même) sont de la logique, elles ne sont pas ce à quoi la logique s'applique. L'idée selon laquelle la logique « en tant que Théorie rigoureusement construite (...) tombe sous sa propre juridiction » veut donc également dire qu'il n'est pas possible de considérer la logique comme étant, vis-à-vis des mathématiques, *topic-neutral*. Ce point est fondamental. Il est lié à une thématique qui est revenue constamment tout au long de nos développements, celle relative à l'architecture des mathématiques. Dans la perspective universaliste, les différences à l'intérieur des

---

que Landini développe une conception universaliste), les trois commentateurs partagent tous l'idée que la théorie substitutionnelle est fondamentale pour comprendre le genre de recherche dans laquelle Russell était engagé.

<sup>1</sup> Voir Hintikka 1988, notamment 1-3 : « Selon les principes de (la tradition universaliste), nous sommes prisonniers (...) de notre langage. Nous ne pouvons sortir de lui, nous ne pouvons le réinterpréter sur une grande échelle, et nous ne pouvons même pas exprimer sa sémantique dans le langage lui-même. (...) Comme la métalogue est impossible, le métalangage l'est également. Ou plutôt, à la fois le langage objet et le métalangage doivent être pris localement, puisqu'ils sont des parties du langage, le seul et unique langage que nous avons. La victime principale de cet interdit pesant sur la métalogue est le concept de vérité. Car le concept de vérité a rapport avec les relations de nos énoncés et du monde, et doit par conséquent être ineffable pour quiconque croit au langage comme un medium universel. (...) Les idées les plus importantes de (la tradition modèle-théorique) incluent les notions telles que « l'univers de discours » et « *Denkbereich* » (qui montrent que le logicien en question est prêt à varier l'interprétation de son langage), un mélange de considérations logiques et métalogiques (...), l'usage du concept de vérité (...) etc. (...) Prise au sérieux, la tradition modèle-théorique donne naissance à l'idée que la relation d'un énoncé à ses modèles est la pierre angulaire de toute sémantique. Selon cette conception modèle-théorique consistante, ce qu'un énoncé *S* dit, il le dit en spécifiant une classe de modèles *M(S)*. »

mathématiques tombent sous la juridiction de la logique. C'est évidemment vrai chez Frege<sup>1</sup>, chez qui l'arithmétique seule, non la géométrie, relève de la logique – mais cela l'est aussi chez Russell, qui inclut quant à lui dans les mathématiques pures beaucoup plus que ne l'avait fait Frege. Dans l'approche modèle-théorique, la diversité des champs mathématiques est considérée comme une donnée sur laquelle le logicien n'a pas *a priori* de prise. Au contraire, pour le logiciste russellien, dire que la logique se précède elle-même, c'est dire que la logique peut et doit rendre raison de l'organisation interne aux mathématiques – que la diversité des domaines peut et doit être « internalisée », c'est-à-dire exprimée dans le langage logique.

Rivenc poursuit son analyse en distinguant deux formes d'universalisme, un universalisme négatif, qu'il attribue à Frege et Wittgenstein, et un universalisme positif, dont la figure inspiratrice serait Russell. Dans la première forme, le statut absolument singulier de la logique se manifeste par le fait qu'il est impossible d'expliquer dans un langage pourvu de sens les distinctions logiques fondamentales. Ainsi, lorsque Frege cherche à convaincre Kerry de la pertinence de sa distinction entre fonction et objet, il reconnaît dans le même temps que ses « élucidations » sont à prendre *cum grano salis* – il est rigoureusement impossible d'explicitier la nature d'une telle distinction : la *Begriffsschrift* la présuppose et le langage ordinaire, logiquement défectueux, ne peut énoncer la règle qu'en la violant. Les concepts et principes logiques sont des conditions de possibilités de la pensée et du discours. Ils ne peuvent pas faire eux-mêmes l'objet d'un discours. Dans l'universalisme positif de Russell, en revanche, ces interdits ne sont pas de mises (Rivenc 1993, 30-31) :

C'est qu'à la différence de l'universalisme négatif de Frege ou de Wittgenstein, avec ses renoncements tranchés et définitifs, l'universalisme positif se présente plutôt comme un mouvement, une tendance ; on pourrait dire qu'il est essentiellement animé par l'intention de l'internalisation ou qu'il est guidé par l'idéal heuristique de tout dire dans le langage artificiel, en tant que représentant parfait du langage, sans préjuger par avance du point où la chose s'avérera (éventuellement) impossible, sans se sentir tenu non plus d'accomplir toutes les démarches en une seule fois. Ce trait de progressivité, si l'on peut dire, est l'un des aspects de la croyance généralement partagée par les tenants de l'universalisme positif que la « philosophie » est susceptible de progrès comme la science, et que la démarche *piecemeal*, fragmentaire et locale de la science est l'une des conditions générales de l'avancement des connaissances.

Russell souligne fréquemment que refuser, comme Frege, qu'une fonction puisse devenir valeur d'une variable d'objet conduit paradoxalement à faire jouer à la fonction le rôle de sujet logique (dans « une fonction n'est pas un objet », le terme « fonction » est sujet), donc de valeur possible de la variable. Frege l'avait vu, et c'est pour cela qu'il demandait à Kerry d'abandonner le langage ordinaire au profit de son idéographie. Mais pour Russell, et c'est en ce sens que son universalisme est positif, ce qui se montre doit pouvoir se dire. Rivenc souligne de façon très juste l'importance cruciale qu'a chez Russell l'exigence d'expressivité. L'internalisation, c'est-à-dire la traduction dans le langage logique doit permettre, idéalement, de tout exprimer, de tout expliquer, sans aucun reste. Bien entendu, on ne peut pas préjuger par avance de la réussite d'une telle entreprise – mais on ne peut pas, exactement pour les mêmes raisons, la condamner *a priori*, comme le font Frege et Wittgenstein. L'universalisme, en son sens positif, est une aventure ; il est « un mouvement, une tendance », qui ne présume pas du point où « l'internalisation dans le langage idéal s'avérera impossible ».

---

<sup>1</sup> Pour Frege, l'arithmétique n'est pas un contenu extérieur auquel la logique est appliquée : l'arithmétique est la logique. On peut à ce propos reprendre la très belle image de la condensation de l'air en eau que Frege expose au §23 de la *Begriffsschrift*. Commentant la définition de la  $\omega$ -sequence qu'il donne dans sa troisième partie, Frege affirme que cet exemple nous montre « comment la pensée pure, faisant abstraction de tout contenu donné par les sens, ou même par une intuition *a priori*, peut produire des jugements ne paraissant être possibles à première vue qu'en se fondant sur une intuition quelconque, à partir du contenu qui provient uniquement de sa propre caractéristique particulière ». Il ajoute : « On peut faire une comparaison avec la condensation par laquelle on est parvenu à changer l'air, qui paraît n'être rien à la conscience d'un enfant, en un liquide visible formant des gouttes. »

J'adhère pour ma part complètement à cette description de la différence entre logicisme fregeen et logicisme russellien<sup>1</sup>. À la différence de Rivenc, je ne me suis cependant pas intéressé ici à la logique russellienne proprement dite. La tâche à laquelle Rivenc, avec d'autres, s'est attelée est celle d'expliquer comment, à partir de prémisses universalistes, Russell en vient, sous la pression des paradoxes, à adopter une théorie des types qui semble contredire son intuition initiale. Le problème est absolument central, à la fois sur le plan philosophique et sur le plan logique, et on comprend pourquoi il a attiré beaucoup d'attention. Je n'ai cependant pas ici pris les choses par ce bout là, mais me suis penché sur la façon dont Russell (puis Russell et Whitehead) développait une théorie mathématique particulière (la théorie de la quantité) dans des sections très « reculées » des œuvres (*Principles* III et VI, *Principia* VI). Pour autant, malgré cette différence dans les cibles visées, c'est bien, en un certain sens, toujours les contours de l'universalisme positif que j'ai tenté d'explorer. On l'a vu, pour un universaliste comme Russell, la question des divisions internes aux mathématiques (la question de leur architecture) est une question logique. La logique, en tant qu'elle « prend soin d'elle-même », contrôle la manière dont elle s'articule et se développe, et l'exigence universaliste conduit donc inévitablement à poser la question de la justification logique de l'architecture des mathématiques. Mais quel sens donner à cette question ? Les mathématiciens du début du XX<sup>e</sup> siècle ne sont pas d'accord sur la façon dont on doit organiser les mathématiques. Certes, tout le monde reconnaît l'existence d'une différence entre arithmétique et géométrie, disons ; mais il n'y a pas consensus sur la question de savoir s'il faut (et, dans ce cas, comment ?) distinguer entre algèbre et analyse, entre analyse et géométrie, entre algèbre et arithmétique ; d'autre part, la question des différences entre branches des mathématiques n'est pas conçue comme une affaire purement scientifique – des considérations historiques, institutionnelles, etc., sont liées à ces distinctions. Comment, dès lors, « internaliser » des délimitations disciplinaires dont l'existence est souvent problématique pour les mathématiciens, et dont le statut n'est pas, la plupart du temps, purement scientifique ? Y a-t-il un sens à entretenir un tel projet ?

On pourrait croire que le seul objectif du logiciste russellien est de dériver le contenu des principales théories mathématiques – sans avoir aucun égard pour la façon dont les mathématiciens développent leurs sujets. On pourrait ainsi, et c'est parfois de cette manière que le travail russellien est présenté, croire qu'une fois l'arithmétique construite sur des bases logiques, l'ensemble des mathématiques sont à portée de main. Dedekind et Cantor ont montré comment développer une théorie du continu à partir des entiers ; une fois le continu atteint, l'analyse et la géométrie peuvent être reconstruites. Toutes les mathématiques seraient donc conçues, chez Russell, comme une gigantesque extension de l'arithmétique. Le problème est que cette vision, confortable, ne correspond absolument pas à la réalité du travail effectué par Russell<sup>2</sup>. J'ai montré ailleurs que non seulement Russell n'adoptait pas une approche analytique de la géométrie, mais qu'il se concevait comme l'héritier d'une tradition qui s'opposait à la géométrie cartésienne<sup>3</sup>. Russell prend donc en compte, dans son analyse des mathématiques, la singularité de la géométrie par rapport à l'analyse et l'arithmétique. Toujours dans la même perspective, j'ai cherché à défendre ici l'idée que, même si Russell considérait en 1903 que l'étude de la grandeur n'était « qu'une concession faite à la tradition », le philosophe développait très tôt une théorie logique, relationnaliste, de la quantité, qui constitue le socle de la définition des réels en 1913. Là encore, Russell et

<sup>1</sup> Une telle distinction est à l'arrière-plan de Gandon 2002. Le seul point de désaccord pourrait concerner la place de Wittgenstein. Rivenc voit dans le *Tractatus* l'incarnation de l'universalisme négatif. J'aurai tendance à penser que Wittgenstein élabore une théorie de l'universalisme positif russellien (en reprenant la terminologie de Rivenc 1993) – ce qui est en soi une entreprise risquée, puisque cette forme d'universalisme est plutôt à concevoir comme une « tendance », un « mouvement » qu'une théorie fixe. Pour plus sur le « russellianisme » du premier Wittgenstein, voir Gandon 2002.

<sup>2</sup> Sur ce point, Gandon 2008.

<sup>3</sup> Gandon 2004 et 2009a.



Whitehead auraient pu faire plus simple : introduire les réels comme des éléments d'une *series* de type  $\theta$ . Mais cette réduction aurait manqué une différence qu'ils considèrent comme importante et qui, pour cette raison, doit être exprimée dans le système logique.

S'intéresser aux parties « reculées » des *Principles* et des *Principia* permet de mettre à jour une autre facette de l'exigence universaliste russellienne. Lorsque l'on se concentre sur le début des deux œuvres, la question au premier plan est celle du rapport entre l'ambition universaliste et l'existence des paradoxes. Le problème de Russell est de trouver une voie moyenne entre ces deux écueils – d'éviter les contradictions tout en ne privant pas la logique de sa puissance déductive et de son universalité. Russell utilise souvent une métaphore médicale pour caractériser sa recherche : il s'agit de trouver un remède aux paradoxes qui ne tue pas son patient. S'il s'avérait qu'il y en avait plusieurs, alors ce serait tant mieux – à ce stade, l'urgence est simplement de trouver au moins une façon de dériver les mathématiques de la logique sans tomber dans la contradiction. La phase critique passée (disons, une fois la notion de nombre cardinal définie et l'axiomatique de Peano déduite), un autre genre de problème fait son apparition : celui de la pluralité des possibilités de développer le contenu logique. D'une certaine façon, même bridée à cause des paradoxes, la logique est chez Russell toujours trop puissante : il y a diverses manières de définir, par des moyens logiques, un espace géométrique ; il y a de très nombreuses façons de construire les nombres réels à partir des concepts logiques primitifs. Entre ces diverses possibilités, laquelle choisir ? On reconnaît là le dilemme benacerrafien des réductions multiples, pain quotidien des auteurs et des lecteurs des dernières parties des *Principles* et des *Principia*. La question de l'universaliste n'est pas là seulement celle de savoir comment internaliser, comment exprimer, dans le langage logique, les principes de la logique que ce langage présuppose – elle est plutôt celle de savoir quoi internaliser, et pourquoi.

L'universalisme positif est, selon Rivenc, animé « par l'idéal heuristique de tout dire dans le langage artificiel, en tant que représentant parfait du langage, sans préjuger par avance du point où la chose s'avérera (éventuellement) impossible, sans se sentir tenu non plus d'accomplir toutes les démarches en une seule fois ». D'une certaine façon, l'examen des diverses tentatives que Russell a proposé pour faire face aux paradoxes illustre la façon dont Russell ne préjuge pas par avance du point où la chose (« tout dire ») s'avère impossible. Mais pour bien saisir toute la justesse et la pertinence de la seconde remarque (selon laquelle Russell ne se sent pas non plus « tenu d'accomplir toutes les démarches en une seule fois »), il faut se pencher sur les textes mathématiques du logiciste. Les problèmes qu'une théorie des types est censée réglée doivent en effet être réglés avant de commencer la construction – ils ne peuvent pas être repoussés. En revanche, les questions relatives à la réduction multiple ne peuvent et ne doivent pas être résolues « en une seule fois ». Les décisions d'internaliser telle ou telle différence entre disciplines (celle par exemple de considérer que les nombres ne sont pas seulement des éléments d'un type d'ordre particulier) ne peuvent pas être prises au commencement, avant l'analyse des configurations conceptuelles particulières qui occasionnent ces choix. Les décisions de Russell et de Whitehead ne sont jamais arbitraires ; le logicisme n'est pas un formalisme<sup>1</sup> – l'exigence universaliste, celle d'un développement logique autonome, sans reste, oblige les auteurs à motiver à chaque fois leurs décisions. Mais en même temps, les raisons qui déterminent ces choix doivent nécessairement être ajustées aux contextes particuliers dont il est question ; les décisions ne peuvent donc pas être anticipées, elles sont nécessairement prises en cours de route. Comme l'a bien vu Rivenc, l'universalisme dans sa version positive n'est pas l'ennemi de la progressivité et du cas par

---

<sup>1</sup> Russell reproche à Hilbert de ne jamais donner les raisons pour lesquelles il choisit telle définition plutôt que telle autre. Voir notamment la seconde préface aux *Principles*.

cas<sup>1</sup> – au contraire, un universalisme bien compris, parce qu’il ne présuppose pas une fois pour toutes ce qui relève de la logique (ce qui doit être « internalisé ») et ce qui n’en relève pas (ce qui peut ne pas l’être), conduit à une attention extrême aux détails des situations singulières. Il n’y a pas de règle pour décider généralement comment choisir entre différentes réductions possibles d’un concept ou d’une théorie ; il est cependant nécessaire de rendre compte de toutes les décisions prises. Contrairement à ce que croit Benacerraf, il n’y a là pour autant nulle catastrophe, mais simplement la conséquence d’un universalisme bien compris – aucune méthode ne peut normer, de l’extérieur, le développement logique de la logique, aucun critère général ne peut déterminer comment les mathématiques doivent être « internalisées »<sup>2</sup>.

\*

\*

\*

L’étude qui précède, et plus généralement, l’enquête sur les parties mathématiques « reculées » des *Principles* et des *Principia*, doit donc, de mon point de vue, être conçu comme un complément des travaux sur l’universalisme logique et la théorie des types russellienne. Il ne fait aucun doute que, pour Russell lui-même, la partie la plus importante de sa recherche était constituée par ses tentatives de trouver une solution satisfaisante aux paradoxes. Le philosophe n’a pas ainsi reçu très favorablement l’espèce de réécriture des *Principles* à laquelle Couturat s’est livré dans son ouvrage de 1905 : Russell reprochait principalement à son ami français de ne pas avoir mis suffisamment l’accent sur la dimension logique de ses travaux, donc de ne pas avoir pris la mesure de leur véritable nouveauté<sup>3</sup>. On pourrait adresser la même critique à l’étude que j’ai menée. N’est-ce pas d’abord et avant tout la confrontation entre la tradition de l’universalisme positif telle qu’elle s’exprime dans le livre I des *Principia* et celle de la théorie des modèles qui est source, de nos jours encore, d’un questionnement toujours vivant<sup>4</sup> ? Laisser de côté cette question, n’est-ce pas faire preuve d’aveuglement ?

J’ai établi dans les chapitres 5 et 6 que la théorie de la grandeur des *Principia* avait encore quelque chose à nous apporter : elle permet de complexifier les discussions autour de l’*Application Constraint* ; elle permet également de pointer des faiblesses conceptuelles du paradigme aujourd’hui standard, celui de la *theory of measurement*. Ces deux « apports » sont toutefois très spécifiques, et concernent des sujets qui ne peuvent rivaliser en généralité et en profondeur avec les questions soulevées par l’universalisme logique. Il y a néanmoins une

<sup>1</sup> En plus de la caractérisation générale de l’universalisme positif cité *supra.*, Rivenc, contre toute une tradition de lecture, voit dans la méthode « pas à pas » de définition des types adoptée dans les *Principia* l’ultime expression de l’ambition universaliste (voir 137-139, notamment : « La procédure *step by step* peut donc être comprise comme une voie étroite pour concilier une ontologie réaliste dont on ne peut parler en bloc sans transgresser la syntaxe qu’elle fonde, et la nécessité de réduire autant qu’il est possible la sphère de ce dont on ne peut vraiment pas parler. »). Le point intéressant pour nous est indépendant de la question toujours très disputée des types ; il est que Rivenc ait développé l’idée que la procédure *step by step* puisse être un refuge de l’universalisme – précisément parce qu’une telle méthode évitait tout recours à une arithmétique ordinaire déjà constituée. C’est cette idée, que (dans un contexte complètement différent) je réutilise ici.

<sup>2</sup> Ce développement doit beaucoup aux discussions que j’ai eues avec B. Halimi.

<sup>3</sup> Cela est sensible même dans les remerciements que Russell adresse à Couturat pour l’envoi de son livre (voir lettre du 19/12/1905, Schmid 2001, 573 : « J’ai tout d’abord à vous remercier très cordialement pour l’envoi de votre livre, et pour l’éloge vraiment trop flatteur que vous avez prononcé dans l’avant-propos. Vous avez fait pour mes travaux une œuvre très rare, dont j’apprécie vivement la générosité. Mais mon volume n’est guère, il me paraît, « l’aboutissement nécessaire et le couronnement » des recherches dont il s’inspire. Il reste beaucoup à faire, et je suis persuadé que la forme définitive de la logistique sera très différente de la forme actuelle. Je compte même y apporter moi-même bien des changements, quoique ceux-ci ne toucheront probablement rien aux conséquences générales et philosophiques de mes doctrines. »

<sup>4</sup> Voir Rivenc 1993, introduction et préface (notamment xiv : « sans doute il ne saurait s’agir aujourd’hui de revenir à l’universalisme logique, au sens où les grands anciens de la logique moderne le comprenaient ; mais on ne saurait se dispenser de faire droit à un certain type de questions dont la critique (au sens philosophique) de la théorie des modèles et de son auto-interprétation n’est qu’un exemple parmi d’autres »). Voir également Halimi non publié.

raison qui justifie qu'on s'intéresse, aujourd'hui particulièrement, aux dernières parties des *Principles* et des *Principia*, c'est-à-dire à la façon dont Russell concevait le rapport entre sa logique et les mathématiques telles qu'elles étaient développées par les mathématiciens. Est réapparu récemment dans la philosophie des mathématiques de tendance analytique un clivage entre, d'une part, les recherches que l'on pourrait qualifier de fondationnelles, axées sur la logique et l'axiomatique, héritées des travaux de Carnap, Gödel, Kreisel, Brouwer, etc., et d'autre part, des considérations sur les pratiques mathématiques, plus historicistes, qui mettent la machinerie logique et l'axiomatisation au second plan<sup>1</sup>. De nombreux auteurs critiquent aujourd'hui le fait que les discussions qui traversent la philosophie des mathématiques « standard » (la question du platonisme versus nominalisme, le problème de la naturalisation des mathématiques, le rapport des mathématiques à la réalité, etc) ignorent complètement les mathématiques telles que pratiquées par les mathématiciens<sup>2</sup>. Corfield écrit ainsi (2003, 270) :

On peut avancer sans crainte d'être contredit qu'aujourd'hui, en philosophie des mathématiques, c'est la philosophie qui dicte l'agenda. La question posée dans ce (livre) est celle de savoir jusqu'à quel point il incombe au philosophe d'adopter l'attitude inverse, et de laisser les mathématiques avoir leur mot à dire dans ce que l'on dit à leur propos.

La charge n'est pas excessive : il est tout à fait exact que les mathématiques « avancées » (la théorie des nombres, la combinatoire, la géométrie algébrique, etc.), à l'exception de certaines recherches en théorie des ensembles et peut-être certaines parties de la théorie des probabilités, sont absentes du débat philosophique contemporain. Et il est tout à fait vrai que cette disparition des mathématiques « réelles », comme le dit Corfield, a des conséquences sur la philosophie elle-même. Si l'activité philosophique ne se réduit sans doute pas, comme le pensait Wittgenstein, à un choix des exemples, il n'en demeure pas moins que l'appauvrissement des données sur lesquelles s'exerce l'analyse contribue à la déconnecter de son objet, et donc à appauvrir la réflexion.

Mais la réaction des partisans d'une philosophie des pratiques n'est pas elle-même sans danger. Comment, en effet, « laisser les mathématiques avoir leur mot à dire » ? Où trouver les mathématiques « réelles », pures et non déformées par le regard des philosophes ? Le problème que pose cette réaction historiciste et pragmatiste est celui, général, de tous les appels à retrouver une forme d'« authenticité » : on peut toujours les soupçonner de substituer à une réalité complexe et aux contours mal définis le fantasme d'un état naturel dans lequel l'objet à saisir se manifesterait dans sa transparence et sa pureté – donc de reconduire paradoxalement ce que ces appels condamnent, à savoir le refus de prendre en compte une certaine forme de réalité. Comment en effet dégager ces pratiques ? Où sont-elles déposées ? Dans les manuels de mathématiques, qui façonnent l'enseignement des mathématiques dans les universités ? Certes, un étudiant de Master de mathématiques éprouverait aujourd'hui certainement des difficultés à reconnaître dans certains livres de philosophie des mathématiques la discipline qu'il étudie. Mais on sait bien également que les manuels donnent peu d'information sur les pratiques de recherche et la manière dont les savoirs se sont constitués. Faut-il alors, pour saisir le travail du mathématicien en acte, se tourner vers les articles et les ouvrages originaux ? Mais quel domaine choisir ? Les mathématiques sont aujourd'hui dans un état d'éparpillement extrême, et il n'est absolument pas certain que le

<sup>1</sup> On peut dater la naissance de ce second mouvement de la publication du volume *History and Philosophy of Modern Mathematics*, édité par Apray et Kitcher en 1988. Mais Kitcher, dont l'originalité consiste à mettre l'accent sur la dimension historique des mathématiques, a été lui-même très influencé par Kuhn et Lakatos.

<sup>2</sup> Voir, par exemple, Corfield 2003, Wilson 2008, Grosholz 2007. Voir également Detlefsen 1993 pour un très éclairant et très maîtrisé exposé des critiques adressées à la philosophie des mathématiques standard (dans la tradition analytique) rapportées à la dispute entre Russell et Poincaré sur le statut de la logique.

choix du sujet n'ait aucune incidence sur les conclusions de l'analyse philosophique. Et puis, le processus de recherche mathématique (celui qui passe par les discussions, les tâtonnements, etc.) est souvent camouflé dans la communication finale, de sorte que l'examen des résultats n'est sans doute la meilleure façon d'explorer l'activité mathématique elle-même. Doit-on alors s'engager dans une psychologie de la découverte mathématique comme Hadamard (1959) l'avait proposé ? Ou bien, au contraire, faut-il tenter de ressaisir les pratiques mathématiques à partir d'une analyse des réseaux de communication et des institutions qui régulent la recherche – élaborer une sociologie des pratiques mathématiques ? On le sait, toutes ces pistes ont été et sont encore de nos jours explorées. Mon argument n'est pas qu'elles mènent à des impasses, mais que l'appel à un retour aux « pratiques », s'il permet de pointer les défauts d'une certaine philosophie contemporaine, ne fonde, à lui seul, rien sur lequel on puisse s'appuyer. Le concept de « pratique » est trop vague et trop ambiguë pour constituer le socle d'une nouvelle approche.

On peut d'autre part, comme l'a fait L. Corry dans son 1990, émettre certaines réserves, tenant à la nature même de l'activité mathématique. S'il reconnaît la fécondité des « nouvelles » approches sociologiques et historiques, Corry met l'accent sur une dimension propre aux mathématiques, leur réflexivité, qui rend difficile une approche purement sociologique ou historiciste de la discipline. En mathématique, et à la différence de ce qui se passe dans les autres sciences exactes, « les mathématiques offrent la possibilité de produire et de confronter des thèses concernant la discipline dans le cadre même de cette discipline » (414)<sup>1</sup>. Corry propose de distinguer, à l'intérieur de toutes les grandes théories mathématiques, un corps, qui regrouperait les questions et les théorèmes « substantiels » de la discipline, et une image, qui rassemblerait les questions et les propositions de second-order, métathéoriques, concernant la discipline en tant que discipline – bien entendu, Corry insiste que l'on ne peut pas faire de distinction tranchée entre les deux couches<sup>2</sup>. Le souhait de revenir aux « pratiques », de laisser les mathématiques « réelles » aux commandes, pourrait présenter le danger d'occulter la dimension réflexive de l'activité du mathématicien : la volonté de fixer, d'identifier ce que sont les pratiques conduit semble-t-il inévitablement à les « substantifier », c'est-à-dire à laisser de côté tout ce qui relève en elles d'une réflexion sur leur statut et sur leur nature – bref, à réduire les disciplines à leur corps et à ignorer leur image<sup>3</sup>. À l'inverse, l'universalisme positif de Russell, le projet d'« internaliser » autant qu'il est possible toutes les questions relatives aux mathématiques, n'est qu'une généralisation et un approfondissement de cette réflexivité mathématique. On l'a vu, pour Russell, le logicien ne doit pas seulement dériver les « corps » des disciplines qu'il reconstruit, mais également leurs « images » (ce qui veut dire également qu'il doit décider ce qui appartient à ces images). Russell, en affirmant qu'il y a un divorce entre forme réelle et forme apparente des propositions mathématiques et en rejetant la *faithfulness constraint* (chap. 5) ne peut éviter le dilemme benacerrafien des réductions multiples – or, ce dilemme n'est que la conséquence du

<sup>1</sup> Le caractère réflexif des mathématiques a été souligné à maintes reprises, voir notamment Brunschvicg 1912, Cavaillès 1938.

<sup>2</sup> Corry explique que « la raison de cette interaction particulière (entre corps et image) est que, alors que dans les autres sciences exactes, la discipline et son objet d'étude sont deux entités séparées d'une nature complètement différente (la chaleur et les lois de la chaleur, par exemple), en mathématique, la nature de la discipline et la nature de son objet d'étude ne divergent pas nécessairement. » (415).

<sup>3</sup> On objectera que le but de ces approches antifondationalistes est précisément de ressaisir la réflexivité à l'œuvre dans les mathématiques à même les pratiques. Mais précisément, la question est celle de l'ajustement entre la méthode et le projet. Si par « retour aux pratiques », on entend l'adoption d'une approche purement sociologique ou psychologique (et bien entendu, il faudrait préciser encore à quel type de sociologie et à quel type de psychologie on réfère), alors, puisque que ces approches s'appliquent une sphère très étendue d'activité humaine, le caractère singulier de l'activité mathématique (sa réflexivité) risque d'être perdu de vue. Si, on entend par « retour aux pratiques » autre chose, alors il appartient à ceux qui défendent cette perspective d'être un peu plus explicite sur ce point : en quel sens une pratique qui est à elle-même sa propre théorie est-elle encore une pratique ?

fait que le problème de la forme des théories mathématiques (celui de l'image des disciplines) est un problème qui se pose à ces théories elles-mêmes.

C'est replacé dans ce contexte de l'émergence récente des philosophies des pratiques mathématiques que les textes appartenant aux parties « reculées » des *Principles* et des *Principia* ont encore quelque chose à nous apprendre. Russell est souvent pris pour cible comme étant le représentant de l'approche « standard », centrée sur la question des fondements, et ignorante des pratiques spécifiques des mathématiciens<sup>1</sup>. Or l'étude des développements que Russell consacre à l'espace ou à la quantité montre au contraire que le philosophe fait droit dans son analyse aux traits particuliers des champs disciplinaires. Le Russell « réel » ne ressemble donc pas au portrait qu'on en dresse. Y a-t-il là un simple fait anecdotique ? Je ne le pense pas. Ce qui s'exprime dans cette attention aux détails et à la réflexivité interne aux disciplines mathématiques, c'est une facette de l'ambition universaliste du logicisme russellien. La logique doit, selon Russell, prendre soin d'elle-même : elle n'est soumise à aucune instance plus haute, et ne saurait donc se réduire à un simple formalisme indifférent au contenu mathématique. Un universaliste positif se doit d'expliquer comment la logique s'applique à, ou plutôt s'incarne dans, la matière mathématique, sans sacrifier ce qui donne au contenu toute sa spécificité. Il se doit de rompre avec une approche *topic-neutral* de la logique, il se doit de dire (l'exigence universaliste est une exigence d'expressivité), dans chaque cas, comment la logique universelle se particularise. Loin de détourner de la considération des situations concrètes, l'ambition russellienne oblige le philosophe à s'y plonger complètement et sans reste, c'est-à-dire sans fausses méthodes élaborées en sous-main permettant de décider par avance ce qui doit, et ne doit pas, être « internalisé ». Opposer comme le font à la fois les partisans des approches fondationnelles et les amis des « pratiques » la positivité mathématique au formalisme de la logique n'est, de ce point de vue, pas sans danger : une telle opposition nous fait perdre sur les deux tableaux. Elle nous oblige en effet à en rabattre sur l'universalisme, tout en nous privant également du cadre permettant d'exprimer, de mesurer, les différences et les particularités des divers champs mathématiques. Il est bien vrai que Russell n'a pas aimé la réception que Couturat a fait de son livre, et que mon travail se situe en quelque sorte dans le sillage de celui de Couturat. Mais la scène philosophique n'a aujourd'hui rien à voir avec celle d'il y a un siècle. Ce qui passait alors pour une évidence (une philosophie des mathématiques doit parler des mathématiques du temps présent) n'est plus universellement admis ; à l'inverse, ce qu'il fallait établir (le fait que la logique est une discipline autonome avec ses problèmes propres) est de nos jours un truisme. Dans le contexte actuel, l'intérêt de relire les parties mathématiques des *Principles* et des *Principia*, est d'une part de dénoncer l'alternative, un peu facile mais qui rencontre un certain succès, entre philosophie des fondements et philosophie des pratiques (Russell fait les deux !) – d'autre part d'explicitier le rapport subtil entre l'exigence universaliste et l'attention aux spécificités (à l'« image », dirait Corry) des diverses disciplines mathématiques.

---

<sup>1</sup> Et souvent de façon moins articulée que dans Detlefsen 1993 ; voir par exemple Grosholz 2007.



# BIBLIOGRAPHIE

Arana, A.

2008. Logical and Semantic Purity, *ProtoSociology*, 25, 36-48.

2009. On formally measuring and eliminating extraneous notions in proofs, *Philosophia Mathematica*, 17(2):189-207.

Armstrong, D.

1978. *Universals and Scientific Realism*, Cambridge, CUP.

1987. Comments on Swoyer and Forge, in Forge J. ed., *Measurement, Realism and Objectivity*, Reidel Publishing Company, 311-317.

1988. Are Quantities Relations? A Reply to Bigelow and Pargetter, *Philosophical Studies*, 54, 1988.

1997. *A World of States of Affairs*, Cambridge University Press, 1997.

Artin, E.

1957. *Geometric Algebra*, Wiley-Interscience (1988).

Aspray, W. & Kitcher P. eds

1988. *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Vol. XI.

Ballard, J. W.

2005. *The Logical Foundations of Bradley's Metaphysics*, CUP.

Batitsky, V.

1998. Empiricism and the Myth of Fundamental Measurement, *Synthese*, 116, 51-73.

2002. Some Measurement-Theoretic Concerns about Hale's 'Reals by Abstraction', *Philosophia Mathematica*, 10, 286-303.

Belna, J.-P.

1997. Les nombres réels : Frege critique de Cantor et de Dedekind, *Revue d'histoire des sciences*, 50, 131-158.

Benacerraf, P.

1965. What Numbers Could Not Be, *The Philosophical Review*, 74, 47-73.

1973. Mathematical Truth, *Journal of Philosophy*, 70, 661-679.

Bettazzi, R.

1890. *Teoria delle Grandezze*, Enrico Spoerri.

Bigelow J.,

1988. *The Reality of Numbers. A Physicalist's Philosophy of Mathematics*, OUP.

Bigelow J. & Pargetter R.

1988. Quantities, *Philosophical Studies*, 54 : 3, 287-304.

1991. *Science and Necessity*, CUP.

Boi, L.

1995. *Le problème mathématique de l'espace - Une quête de l'intelligible*, Springer-Verlag.

Boolos, G.

1986. Saving Frege From Contradiction, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 87, 137-151.

1990. The standard of equality of numbers, in Boolos ed., *Meaning and Method: Essays in Honor of Hilary Putnam*, CUP, 261-277.

1994. The Advantages of Honest Toil over Theft. In Jeffrey, R. éd., *Logic, Logic and Logic*, Harvard University Press, 1998, 255-274.

Bosanquet, B.

1888. *Logic or the Morphology of Knowledge*, Oxford, Clarendon Press.

Brannan A. & Esplen M. F & Gray J.

1999. *Geometry*, CUP.

Broad, C. D.

1924. Critical and Speculative Philosophy, in Muirhead J. éd., *Contemporary British Philosophy*, Routledge, 1924.

Brunschvicg, L.

1912. *Les étapes de la philosophie des mathématiques*, 1912, Nouveau tirage, A. Blanchard, 1981.



Burali-Forti, C.

1893. Sulla teoria delle grandezze, *Rivista di Matematica*, 3, 76-101.

1898. Les propriétés formales des opérations algébriques, *Rivista di Matematica*, 6, 141-177.

1903. Sulla teoria general delle grandezze e dei numeri, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 39, 256-272

Byrd M.

1985. Part I of *The Principles of Mathematics*, Russell, n.s., 4, 271–88.

1987. Part II of *The Principles of Mathematics*, Russell, n.s., 7, 60–70

1994. Part V of *The Principles of Mathematics*, Russell, n.s., 14, 47–86

1996. Part III–IV of *The Principles of Mathematics*, Russell, n.s., 16, 145–68.

Campbell N.

1920. *Physics: the elements*, Cambridge: CUP.

Carnap, R.

1928. *La construction logique du monde*, tr. fr. Rivain T., révision et notes E. Schwartz, Paris : Vrin, 2002.

Cavaillès, J.

1938. *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles, étude historique et critique*, Hermann, Actualités scientifiques et industrielles.

Cayley, A.

1878. On the Theory of Groups, *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. 9, p. 126-133.

Chang, H.

2004. *Inventing Temperature: measurement and scientific progress*, Oxford : OUP.

Cohen, H.

1999. *Le principe de la méthode infinitésimale et son histoire*, trad. M. de Launay, Paris, Vrin.

Cohen, M. & Nagel, E.

1934. *Introduction to Logic and Scientific Method*, Londres, Routledge & Kegan Paul.

Corfield, D.

2003. *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge University Press.

Corry, L.

1989. Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematical Knowledge, *Science in Context*, 3, 409-440.

Cotterrell B. & Kamminga J.

1992. *Mechanics of pre-industrial technology: An introduction to the mechanics of ancient and traditional material culture*, Cambridge University Press.

Couturat, L.

1896. *De l'Infini mathématique*, Paris, Blanchard, nouveau tirage, 1973.

1900. Études critiques. L'algèbre universelle de M. Whitehead, *Revue de métaphysique et de morale*, 8, 1900, p. 323-362.

1905. *Les Principes des Mathématiques*, Paris, Blanchard, nouveau tirage, 1980.

Coxeter, H. S. M.

1947. *Non-Euclidean Geometry*, seconde édition, Toronto : Toronto University Press.

1949. *The Real Projective Plane*, York : Maple Press Company.

Crosby, A. W.

1996. *The Measure of Reality: Quantification and Western Society, 1250-1600*, Cambridge University Press.

Darrigol, O.

2003. Number and measure: Hermann von Helmholtz at the crossroads of mathematics, physics and psychology, *Stud. Hist. Phil. Sci.*, 34: 515-573.

Dedekind, R.

1872. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, in Boniface, J. éd., *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*, Ellipse, 2002, 101-135.

Demopoulos, W.

1995. *Frege's Philosophy of Mathematics*, HUP.

- Desmet, R.  
Non publié. *Speculative philosophy as a generalized mathematics*.
- Detlefsen, M.  
1993. Poincaré vs. Russell on the role of logic in mathematics, *Philosophia Mathematica* (3) 1, 24-49.
- Diez, J. A.  
1997. A hundred years of numbers, an historical introduction to measurement theory 1887-1990, *Studies in History and Philosophy of Science*, 28, 167-185, 237-265.
- Dummett, M.  
1991. *Frege : Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press.
- Eaton, R. M.  
1931. *General Logic – An Introductory Survey*, New York, Scribner's sons, cité dans l'édition de 1959.
- Ehrlich, P.  
2006. The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes, *Arch. Hist. Exact Sci.* 60: 1–121
- Einstein, A.  
1920. *Relativity: the Special and the General Theory*, trad. par R. W. Lawson, 15ème éd., New York : Crown Publishers, 1961.
- Ellis, B.  
1987. Comments on Swoyer and Forge, in Forge J. éd., *Measurement, Realism and Objectivity*, Reidel Publishing Company, 318-325.
- English, J.  
A paraître, *La 3ème Recherche Logique et l'Aufbau*, in Schwartz éd., *L'Aufbau de Carnap : traditions et postérités*, Vrin.
- Epples, M.  
2003. The End of the Science of Quantity: Foundations of Analysis (1860-1910), 291-324, in Jahnke, H. N., *A History of Analysis*, AMS Bookstore.
- Ewald, W. B. éd.  
1996. *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics*, Oxford University Press, Oxford. 2 vols.

Ferreiros, J.

1999. *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*. Birkhäuser Verlag.

Field, H.

1980. *Science Without Numbers: A Defence of Nominalism*, Princeton University Press.

Forster, M. B.

1931. The Concrete Universal: Cook Wilson and Bosanquet, *Mind*, 40 : 157, 1-22.

Frege, G.

1879. *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, trad. fr. Besson C. & Barnes J., Vrin, 1999.

1884. *Grundlagen der Arithmetik*, cité dans la trad. fr. de C. Imbert, *Les fondements de l'arithmétique*, Seuil, 1969.

1903. *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 2, Jena, Pohle, 1903. Réédition Hildesheim, Olms, 1966.

Friedman, M.

1999. *Reconsidering Logical Positivism*, Cambridge University Press.

Fuchs, L.

1963. *Partially Ordered Algebraic Systems*, Oxford, Pergamon Press.

Funkhouser, E.

2006. The Determinable-Determinate Relation, *Noûs*, 40 :3, 548–569

Gandon, S.

2002. *Logique et langage. Etudes sur le premier Wittgenstein*, Vrin.

2004. Russell et l'*Universal Algebra* de Whitehead : la géométrie projective entre ordre et incidence (1898-1903), *Revue d'histoire des mathématiques*, 10, 187-256.

2005a. Algèbre, géométrie et loi d'intensité : l'enjeu de *A Treatise on Universal Algebra*, in Michel Weber et Diane d'Eprémèsnil (éds.), *Chromatikon I, Annuaire de la philosophie en procès - Yearbook of Philosophy in Process*, Presses universitaires de Louvain.

2005b. Pasch entre Klein et Peano : empirisme et idéalité en géométrie, *Dialogue*, 14 : 653-692.

2008. Which Arithmetisation for which Logicism ? Russell on Quantities and Relations, *History and Philosophy of Logic*, 29 : 1, 1-30.

2009a. Toward a topic-specific logicism? Russell's theory of geometry in the *Principles of Mathematics*, *Philosophia Mathematica*, 17 : 1, 35-72.

2009b. La théorie des rapports chez Augustus de Morgan, *Revue d'histoire des sciences*, 61 (2), 2008, 287-312.

2009c. Logicism and mathematical practices – Russell's theory of metrical geometry in *The Principles of Mathematics* (1903), Alvarez C. & Arana A., Palgrave, à paraître.

2009d. Russell, les « *sense data* » et les objets physiques: une approche géométrique de la classification, *Philosophia Scientiae*, 13(1), 71-97.

2009e. Wittgenstein dans la fabrique des *Principia*, sur et autour *Tractatus* 3. 33, à paraître dans C. Chauviré éd., *Lire le Tractatus-Logico-Philosophicus de Wittgenstein*, Paris : Vrin, 91-120, 2009.

Gerlach, M.

1957. Interval Measurement of Subjective Magnitudes With Subliminal Difference, Technical Reports n°7, Psychology and Education Series, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences Stanford University. <http://suppes-corpus.stanford.edu/imsss.html>

Giedymin, J.

1982. *Science and Convention: Essays on H. Poincaré's Philosophy of Science*, Pergamon Press, 1982.

Goodman, N.

1951. *La structure de l'apparence*, trad. fr. sous la direction de Rauzy J.-B., Paris : Vrin, 2005.

Grassmann, H.

1844. *Die Lineale Ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Kristallonomie erläutert*, Leipzig, Verlag von Otto Wigand ; trad. fr. de D. Flament, Paris, Blanchard, 1994.

1861. *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*. Berlin.

1862. *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strender Form bearbeitet*, Berlin, 1862 ; trad. anglaise de L. C. Kannenberg, Providence, American Mathematical Society, 2000.

Grattan-Guinness, I.

1977. *Dear Russell - dear Jourdain. A commentary on Russell's logic, based on his correspondence with Philip Jourdain*, Columbia University Press.

2000. *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940*, Princeton, PUP.

Green, D.M. & Swets J.A.

1966. *Signal Detection Theory and Psychophysics*. New York: Wiley.

Griffin, N.

1990. *Russell's Idealist Apprenticeship*, Oxford, Clarendon Press.

Grosholz, E.

2007. *Representation and Productive Ambiguity in Mathematics and the Sciences*, Oxford University Press.

Guigon, G.

2006. "Meinong on Magnitudes and Measurement", *Meinong Studies*, V (1), 255-296.

Hadamard, J.

1959. *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Paris : Blanchard.

Hahn, H.

1907. "Über die nichtarchimedischen Grössensysteme," *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien, Mathematisch - Naturwissenschaftliche Klasse*, 116 (Abteilung IIa), pp. 601–655.

Hale, B.

1988. *Abstract Objects (Philosophical Theory)*, London, Blackwell.

1996. Structuralism's Unpaid Epistemological Debts, *Philosophia Mathematica*, 4, 124-47.

2000. Reals by Abstraction, *Philosophia Mathematica*, 8, 100-123.

2002. Real Numbers, Quantities, and Measurement, *Philosophia Mathematica*, 10, 304-323.

Hale, B. & Wright, C.

2002. Bencerraf's Dilemma Revisited, *European Journal of Philosophy*, 10: 1, 101-129.

2005. Logicism in the Twentieth-First Century, in Shapiro ed., *The Oxford Handbook for Logic and the Philosophy of Mathematics*, OUP, 166-202.

Halimi, B.  
Non publié. *Models and Universes*.

Hardy, G. H.,  
1910. *Orders of Infinity, The "Infinitärrechner" of Paul Du Bois-Reymond*, Cambridge University Press, Cambridge. Réimp. 1971, Hafner, New York.

Harrell, M.  
1988. Extension to geometry of *Principia Mathematica* and related systems II, *Russell: the Journal of Bertrand Russell Studies*, 8, 140-160.

Hausdorff, F.  
1906. Untersuchungen über Ordnungstypen, I, II, III. *Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Klasse* 58, 106-169.

1907. Untersuchungen über Ordnungstypen: IV, V, *Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Klasse* 59, 84-159.

Hawkins, T.  
2000. *Emergence of the Theory of Lie Groups: An Essay in the History of Mathematics, 1869-1926*, Springer.

Heck, R. G.  
1993. The development of arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*, *Journal of Symbolic Logic*, 58, 579-601.

1998. Introduction au théorème de Frege, tr. by L. Perrin, in M. Marion and A. Voizard, eds., *Frege: Logique et philosophie*, Harmattan, 33-61

Hegel, G. W. F.  
1830. *Encyclopédie des sciences philosophiques. La science de la logique*, trad. fr. de B. Bourgeois, Paris, Vrin, 1986.

Heinzmann, G.  
1986. *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*, Paris, Blanchard.

1992. Helmholtz and Poincaré's considerations on the genesis of geometry, in Boi éd., *1830-1930 : a century of geometry*, Springer, 245-249.

Helmholtz, H. L.

1887. Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet, *Philosophische Aufsätze*, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet, Fues, Leipzig. Cité d'après *Epistemological writings*, 1977, 72-102.

1977. *Hermann von Helmholtz: Epistemological Writings. The Paul Hertz/Moritz Schlick Centenary. Edition of 1921*, trad. M. Lowe, Robert S. Cohen and Yehuda Elkana eds., Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Hilbert, D.

1899. *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig.

1900. Über den Zahlbegriff, *Jahrbuch der Deutschen*

*Mathematiker-Vereinigung*, 8:180–184. Cité d'après Ewald 1996.

Hintikka, J.

1988. On the Development of the Model-Theoretic Viewpoint in Logical Theory, *Synthese*, 77, 1-36.

Hochkirchen, T.

2003. Theory of Measure and Integration from Riemann to Lebesgue, in Jahnke H. N. éd., *A History of Analysis*, American Mathematical Society, 261-290.

Hölder, O.

1901. Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physikalische Classe*, 53, p. 1-64. Cité dans la traduction anglaise de J. Michell et C. Ernst, *Journal of Mathematical Psychology*, 40: 235-252, 1996 (pour la partie I) / 41: 345-356, 1997 (pour la partie II).

Howie, J. M.

1995. *Fundamentals of semigroup theory*, Clarendon Press, Oxford.

Hume, D.

1995. *Traité de la nature humaine, Livre I et appendice*, trad. P. Baranger et P. Saltel, Paris, Garnier-Flammarion.

Huntington, E. V.

1902. A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitudes, *Transactions of the American Mathematical Society*, 3, 264-279.

Hylton, P.



1990. *Russell, Idealism and the Emergence of Analytical Philosophy*, Oxford, Clarendon Press.

Irvine A. D.,

1990. Nominalism, Realism, Physicalism in Mathematics: An Introduction to the Issues, in Irvine A. D. éd., *Physicalism in Mathematics*, Kluwer AP, ix-xxvi.

Johnson, W. E.

1921. *Logic*, Part I, CUP.

1922. *Logic*, Part II, CUP.

1924. *Logic*, Part III, CUP.

Jordan, C.

1882. *Cours d'Analyse*, Gauthiers Villars.

Kant, I.

1781. *Critique de la Raison Pure*, Paris, PUF, 1986.

1786. *Premiers principes métaphysique d'une science de la nature*, Paris, Vrin, 1982.

Klein, F.

1871. Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Mathematische Annalen*, 4, 573-675. Trad. par L. Laugel, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 11, 4, 1897, 1-62.

1872. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, texte prononcé à l'occasion de l'inauguration de la chaire de Klein à l'université d'Erlangen, *Mathematische Annalen*, 43 (1893), 63–100

1898. *Conférences sur les Mathématiques faites au congrès de mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago*, trad. fr. M. L. Laugel, Paris : Hermann.

1928. *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlin : J. Springer.

Krantz, D. H. & Luce, R. D. & Suppes, P. & Tversky, A.

1971. *Foundations of Measurement, vol. I : Additive and polynomial representations*, New York : Academic Press.

Kries (von), J.

1882. Über die Messung intensiver Grösse und über das sogenannte psychophysiches Gesetz, *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie* (Leipzig), 6, 257-294.

Kyburg, H. E.

1984. *Theory and Measurement*, CUP.

1997. Quantities, Magnitudes and Numbers, *Philosophy of Science*, 64, 377-410,

Landini, G.

1998. *Russell's Hidden Substitutional Theory*, Oxford University Press.

2006. "Fregean Cardinals as Concept-Correlates", *Erkenntnis*, 65, 207-243.

2007. *Wittgenstein's Apprenticeship with Russell*, Cambridge University Press.

Non publié. *The Number of Numbers*.

Lebesgue, H.

1935. Sur la mesure des grandeurs, *L'enseignement mathématique*. Rééd. Blanchard, Paris, 1975.

Le Roux, J.

2000. *Techniques numériques pour le traitement du signal*, Cours de l'université de Nice, <http://www.polytech.unice.fr/~leroux/courssignal/>

Levine, J.

1998. From Absolute Idealism to *The Principles of Mathematics*, Critical Notice of *The Collected Papers of B. Russell* vols. 2-3, *International Journal of Philosophical Studies*, 6 (1), 87-127.

2002. Analysis and Decomposition in Frege and Russell, *The Philosophical Quarterly* 52 (207), 195-216.

Linsky, B.

1999. *Russell's Metaphysical Logic*, CSLI Publication.

Luce, R. D., Krantz, D. H. & Suppes, P. & Tversky, A.

1990. *Foundations of measurement, vol. III : Representation, axiomatisation and invariance*, Academic Press, New York.

Ly, I.

2004. Identité et égalité : le criticisme de Poincaré. *Philosophiques*, 31 : 1, 179-212.

2005. L'espace est-il un concept ? Mesure et géométrie dans l'œuvre philosophique de Poincaré, *Textes du séminaire de Histoire de Géométrie*, Fondation Maisons des sciences de l'Homme, 1-18.

2008. *Mathématique et physique dans l'œuvre philosophique de Poincaré*, Thèse de Doctorat de l'Université de Nancy 2.

Maddy, P.

1980. Perception and Mathematical Intuition, *Philosophical Review*, 89, 163-196.

1981. Sets and Numbers, *Noûs*, 15: 4, 495-511.

Marion, M.

1998. *Wittgenstein, Finitism and the Foundations of Mathematics*, OUP, Oxford.

2004. *Wittgenstein, introduction au Tractatus Logico Philosophicus*, PUF, Paris.

Meinong, A.

1896. *Über die Bedeutung des Weber'schen Gesetzes*, reprinted in *Meinong's Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 2, Leipzig 1913.

Michel, A.

1992. *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Vrin, Paris.

Michell, J.

1993. Numbers, Ratios, and Structural Relations, *Australasian Journal of Philosophy*, 71, 325-332.

1997. Bertrand Russell's 1897 Critique of the Traditional Theory of Measurement, *Synthese*, 110, 257-76.

1999. *Measurement in Psychology. A critical history of a methodological concept*, Cambridge, CUP.

Moore, G. E.

1899. The nature of Judgement, *Mind*, 8, 167-193.

1903. *Principia Ethica*, Cambridge University Press.

Moore, G. H.

1995. The Axiomatization of Linear Algebra : 1875-1940, *Historia Mathematica*, 22, p. 262-303.

Morgan (de), A.

1849. *Trigonometry and double algebra*, Londres, Taylor, Walton and Maberly.

Monk, L.

1990. *Ludwig Wittgenstein – The Duty of Genius*, Jonathan Cape Ltd.

Mundy, B.

1987. The metaphysics of quantity, *Philosophical Studies*, 51, 1987, pp. 29-54.

Nabonnand P.,

2000a. La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 6 : 2, 219-269.

2000b. La genèse psycho-physiologique de la géométrie selon Poincaré, *Textes du séminaire « Histoires de Géométrie »*, Fondation Maison des Sciences de l'Homme, Paris, 2000.

2008. La théorie des *Würfe* de von Staudt – Une irruption de l'algèbre dans la géométrie pure, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 62:201–242

Narens, L.

1985. *Abstract Measurement Theory*, Cambridge: MIT Press.

2004. Symmetry, direct measurement, and Torgerson's conjecture, *Journal of Mathematical Psychology*, 50, 290–301

Nasim, O.

2009. *Bertrand Russell and the Edwardian Philosophers – Constructing the World*, New York: Palgrave MacMillan.

Newton, I.

1707. *Arithmetica universalis*, Cambridge: Typis Academicis.

Niall, K. K.

1995. Conventions of measurement in psychophysics: v. Kries on the so called psychophysical law, *Spatial vision*, 9 (3), 275-305.

Pasch, M.

1882. *Vorlesungen über neure Geometrie*, Teubner, Leipzig.

Paty, M.

1999. La place des principes dans la physique mathématique au sens de Poincaré, *Philosophia Scientiae*, 3 : 2, 61-74.

Peano, G.

1887. *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Turin, Fratelli Bocca.

1888. *Calcolo Geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Turin, Fratelli Bocca ; trad. anglaise de L. Kannenberg, Basel, Birkhauser, 2002.

1894. Notations de Logique Mathématiques. Introduction au Formulaire de mathématiques. *Rivista di Matematica*, IV,

1896. Saggio di calcolo geometrico, *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, v. 31, p. 952-975.

1899. *Sui Numeri irrazionali*

1903. La geometria basata sulle idee di punto e distanza, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 6-10.

Plotkin, J. L. éd.

2005. *Hausdorff on Ordered Sets*, American Mathematical Society, Providence.

Poincaré, H.

1902. *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion ; rééd. Paris, Flammarion, 1968.

1893. Le continu mathématique, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1, 26-34.

1898. Des fondements de la géométrie, trad. fr. par L. Rougier de On the Foundations of Geometry, *The Monist*, 9, 1-43, publié dans Poincaré 2002, 5-31.

1908. *Science et méthode*, Nancy, Kimé, 1999.

1930. *Dernières pensées*, Paris, Flammarion.

2002. *L'opportunisme scientifique*, Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser, 2002.

Poli, R.

2004. W. E. Johnson's determinable-determinate opposition and his theory of abstraction, in Idealization XI: Historical Studies on Abstraction and Idealization", *Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities*, 2004, 82, 163-196.

Potrc M., Vospernik M.

1996. Meinong on psychological measurement, *Axiomathes*, 1-2, 1996, 187-202.

Prior A.,  
1949. Determinables, determinates and determinants, *Mind*, 58 : 229, 1-30 / 58 : 230, 178-194.

Quine, W. V. O.  
1941. Whitehead and the Rise of Modern Logic, in *Selected Logic Papers*, Cambridge, Harvard University Press, 1995, p. 3-36.

1962. *Set Theory and Its Logic*, Belknap Press.

Rauzy, J. B.  
2004. Les illusions représentationnelles. Sur l'héritage de la notion leibnizienne d'expression dans la philosophie d'aujourd'hui, *Les Cahiers Philosophiques de Strasbourg*, 18, 177-208.

Rivenc, F.  
1993. *Recherches sur l'universalisme logique*, Payot.

Roche, J. J.  
1998. *The Mathematics of Measurement. A critical history*. Londres: Athlone Press.

Rouilhan (de), P.  
1996. *Russell et le cercle des paradoxes*, PUF.

Rodriguez-Consuegra, F.  
1991. *The mathematical philosophy of Bertrand Russell: origins and development*, Basel, Boston and Berlin, Birkhäuser, 1991.

Russell, B.  
1983-? *The Collected Papers of Bertrand Russell*, London and New-York, Routledge

1896-1898. Various Notes on Mathematical Philosophy, *Papers 2*, p. 6-29.

1897a. *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge, CUP, 1897, cité dans la réédition London and New-York, Routledge, 1996. Trad. fr. de A. Cadenat, Paris, Gauthier-Villars, 1901.

1897b. Review of Couturat, *De l'Infini mathématique*, *Mind*, n. s. 6, p. 112-119, in *Papers 2*, p. 60-67.

1897c. On the Relations of Numbers and Quantity, *Mind*, n. s. 6, p. 326-341, in *Papers 2*, p. 70-82.

- 1898a. On Quantity and Allied Conceptions, *Papers 2*, p. 114-135.
- 1898b. An Analysis of Mathematical Reasoning Being an Inquiry into the Subject-Matter, the Fundamental Conceptions, and the Necessary Postulates of Mathematics, *Papers 2*, p. 155-242.
- 1898c. On the Constituents of Space and Their Mutual Relations, *Papers 2*, p. 309-321.
- 1898d. Note on Order, *Papers 2*, p. 339-358.
- 1899a. The Classification of Relations, *Papers 2*, p. 138-146.
- 1899b. Notes on Geometry, *Papers 2*, p. 359-389.
- 1899c. Miscellaneous Notes : « Fragments on Series », *Papers 2*, p. 457-459.
- 1899d. Review of Meinong's *Ueber die Bedeutung des Weber'schen Gesetzes*, *Mind*, 8, 251-256, *Papers 2*, 148-152.
- 1899e. Sur les axiomes de la géométrie, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 7, 684-707.
- 1900a. *A critical exposition of the philosophy of Leibniz with an appendix of leading passages*, Cambridge, CUP.
- 1900b. On the logic of relations with applications to arithmetic and the theory of series, *Papers 3*, 590-612.
- 1900c. Do Differences Differ?, *Papers 3*, 556-557.
- 1900d. Is position in Time and Space relative or absolute?, *Papers 3*, 221-234.
- 1901a. Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries, *Rivista di Matematica*, 7, 115-136, 137-148 ; *Papers 3*, 613-627.
- 1901b. Recent Italian Works on the Foundations of Mathematics, *International Monthly*, 4, 83-101, *Papers 3*, 352-362.
- 1901c. Is position in Time and Space relative or absolute? *Mind*, 10, 293-317, *Papers 3*, 259-284.
- 1901d. On the Notion of Order, *Mind*, 10, 30-51, *Papers 3*, 287-309.
1902. Geometry, Non-Euclidean. *Encyclopaedia Britannica*, 28, 664-674, *Papers 3*, 474-504.
1903. *The Principles of Mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1903.
1904. Meinong's Theory of Complexes and Assumptions, *Mind*, 13: 204-19 ; 336-54 ; 509-24 ; *Papers 4*, 21-76.
1905. Review of Poincaré, *Science and Hypothesis*, *Mind*, 14, 412-418, *Papers 4*, 589-594.

- 1912a. *The Problems of Philosophy*, cité dans la trad. fr. de F. Rivenc.
- 1912b. What is Logic?, *Papers* 6, 54-56.
1913. *The Theory of Knowledge*, *Papers* 7.
- 1914a. The Relation of Sense Data to Physics, *Scientia*, 4, *Papers* 8, 3-26.
- 1914b. *Our Knowledge of External World as a Field for Scientific Method in Philosophy*, Open Court, London.
1919. *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres, Allen and Unwin, trad. fr. de F. Rivenc.
1927. *Analysis of Matter*, Londres, Routledge, 1992.
1959. *My Philosophical Development*, London, Allen and Unwin, trad. fr. de G. Auclair.
1969. *The Autobiography of Bertand Russell*, 3 vols., Haper & Collins Publishers.
- Russell, B. et A. N. Whitehead,  
 1910. *Principia Mathematica*, vol. I, Cambridge, CUP, cité dans la 2<sup>e</sup> éd., 1925-1927.
1912. *Principia Mathematica*, vol. II, Cambridge, CUP, cité dans la 2<sup>e</sup> éd., 1925-1927.
1913. *Principia Mathematica*, vol. III, Cambridge, CUP, cité dans la 2<sup>e</sup> éd., 1925-1927.
- Sackur, J.  
 2005. *Formes et faits. Analyse et théorie de la connaissance dans l'atomisme logique*, Paris, Vrin.
- Schaar (van der), M.  
 2004. The Red of a Rose. On the Significance of Stout's Category of Abstract Particulars, in Poli, R., Idealization XI: Historical Studies on Abstraction and Idealization, *Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities*, 2004, 82, 197-214.
- Schmid, A.-F. éd.  
 2001. *Bertrand Russell. Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis Couturat (1897-1913)*, vol. I-II, Paris, Kimé.
- Schwartz, E.  
 2002. Introduction à la traduction de *La construction logique du monde*, Paris : Vrin, 6-38.



A paraître, Méthodes logiques et systèmes philosophiques dans l'*Aufbau* : de la neutralisation du concept à la neutralité du langage de la constitution ?, in Schwartz E., *L'Aufbau de Carnap : traditions et postérités*, Vrin.

Searle, J. & Körner, S.

1959. On Determinables and Resemblance, *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes*, Vol. 33, (1959), 125-158

Séguier (de), J. A. M. J.

1904. *Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Paris, Gauthiers-Villard.

Shapiro, S.

1997. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press.

2000. "Frege Meets Dedekind: a Neologicist Treatment of Real Analysis", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 41: 4, 2000.

2006. "Structure and Identity", in McBride Fraser ed., *Identity and Modality*, OUP, 109-145

Shapiro, S. & Weir, A.

1999. "New V, ZF and Abstraction", *Philosophia Mathematica*, 7, 293-321.

Smith, B.

1994. *Austrian Philosophy. The Legacy of Franz Brentano*, Open Court.

Solère, J.-L.

2000. Plus ou moins : le vocabulaire de la latitude des formes, in J. Hamesse et C. Steel, éd., *L'élaboration du vocabulaire philosophique au Moyen Âge*, Turnhout, Brepols, 437-488.

2001. The Question of Intensive Magnitudes according to some Jesuits in the Sixteenth and Seventeenth Centuries, *The Monist*, vol. 84, 4.

Steiner, M.

1973. Platonism and the Causal Theory of Knowledge, *Journal of Philosophy*, 70, 57-66.

1998. *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Harvard University Press.

Stevens, S. S.

1946. On the Theory of Scales of Measurement, *Science*, 103, 667-680.

1986. *Psychophysics – Introduction to its perceptual, neural and social prospects*, Transaction Publishers.

Stolz, O.

1885. *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*. Teubner, Leipzig.

Stout, G. F.

1921. The Nature of Universals and Propositions, *Proceedings of the British Academy*, Vol. X.

Suschkewitsch, A.

1928. Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, *Mathematische Annalen*, 99, 1.

Suppes, P.

1951. A set of Independent Axioms for Extensive Quantities, *Portugaliae Mathematica*, 10, 163-172.

Suppes, P. & Luce, R. D. & Krantz, D. H. & Tversky A.

1989. *Foundations of measurement, vol. II: Geometrical, threshold and probabilistic representations*, Academic Press.

Suppes, P. et Scott, D.

1958. Foundational aspects of theories of measurement, *The Journal of Symbolic Logic*, 23: 2, 113-128.

Suppes, P. et Zinnes, J.

1968. Basic Measurement Theory, in Luce, R. D. & alii éds., *Handbook of Mathematical Psychology*, vol. I., John Wiley & Sons.

Swoyer C.

1987. The Metaphysics of Measurement, in Forge J. ed., *Measurement, Realism and Objectivity*, D. Reidel: Dordrecht, 235-290.

1991. Structural Representation and Surrogate Reasoning, *Synthese*, 87, 449-508.

Torretti, R.

1978. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Reidel.

Veblen O. & Young J. W.

1910. *Projective Geometry*, Ginn and Company.

Veronese, G.

1891. *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Lezioni per la Scuola di magistero in Matematica. Padova, Tipografia del Seminario.

Weber, H.

1895-96. *Lehrbuch der Algebra*. Erster Band, F. Vieweg und sohn (Braunschweig)

Whitehead, A. N.

1898. *A treatise on universal algebra with applications*, Cambridge, Cambridge University Press, 1898. Reéd. New York, Hafner, 1960.

1906a. *On Mathematical Concepts of the Material World*, London, Dulau.

1906b. *The axioms of projective geometry*, Cambridge, Cambridge University Press, 1906. Reéd. New York, Hafner, 1971.

1907. *The axioms of descriptive geometry*, Cambridge, Cambridge University Press. Reéd. New York, Hafner, 1971.

1911. *An introduction to mathematics*, London: Williams & Northgate.

1916. La théorie relationniste de l'espace, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 23, 423-454.

1919. *An Enquiry concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cambridge University Press.

1920. *The concept of nature*, Cambridge, Cambridge University Press.

1922. *The Principle of Relativity with Applications to Physical Science*, Cambridge University Press.

1925. *Science and the modern world*, Cambridge University Press.

1928. *Process and Reality*, Gifford Lectures Delivered in the University of Edinburgh During the Session 1927-28, Free Press.

Wiener, N.

1976. *Collected Works of N. Wiener*, vol. I, Cambridge : MIT Press, 1976.

1914a. A simplification of the logic of relations, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 17, 387-390.

1914b. A contribution to the theory of relative position, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 17, 441-449

1914c. Studies in synthetic logic, *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, 18, 14-28.

1921. A new theory of measurement: a study in the logic of mathematics, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 185-205.

1948. *Cybernetics. Control and Communication in the Animal and the Machine*, MIT Press, 2nde edition, 1961.

Wilson, M.

1994. Can We Trust Logical Form?, *Journal of Philosophy*, 91, 519-544

2008. *Wandering Significance: An Essay on Conceptual Behaviour*, OUP.

Wittgenstein, L.

1922. *Tractatus Logico-Philosophicus*, trad. C. K. Ogden, London: Routledge.

1929. Some Remarks on Logical Forms, *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume*, 9, 162-171.

1953. *Philosophical Investigations*, trad. de G. E. M. Anscombe, Oxford : Blackwell.

Wright, C.

1983. *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press.

2000. Neo-Fregean Foundations For Real Analysis: Some Reflections On Frege's Constraint, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 41:4, 317-333.

Zabell, S. A.

2005. *Symmetry and its Discontents*, CUP.